A. TIMOTIN
V. HORTOPAN
S. MASTERO
A. IFRIM
M. PREDA

Lecții
DE BAZELE ELECTROTEHNICII
II

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI — 1964

PREFAȚĂ LA VOLUMUL AL DOILEA

Volumul al doilea al lecțiilor de Bazele electrotehnicii cuprinde teoria circuitelor de curent alternativ, monofazate și trifazate, studiul regimului permanent nesinusoidal și al regimului tranzitoriu al circuitelor, probleme de linii electrice lungi, de curenți alternativi în conductoare masive și de radiația undelor electromagnetice, cum și unele elemente de teoria microscopică a fenomenelor electromagnetice.

Și de data aceasta, lecțiile se adresează în principal studenților de la cursurile serale ale facultăților de specialitate electrotehnică de la Institutul Politehnic din București și au fost elaborate cu grija de a prezenta un material cît mai sistematizat, cu o extensiune relativ limitată. Totodată, autorii au ținut seama și de importanța inegală a diferitelor capitole, acordînd o atenție deosebită prezentării metodelor de studiu și de rezolvare a circuitelor electrice liniare, care constituie elementele esențiale ale pregătirii inginerului electrician. Spre deosebire de primul volum, anumite capitole din volumul al doilea se predau numai la unele dintre facultățile interesate, în acord cu necesitatea de coordonare cu disciplinele de specialitate respective. De aceea, în raport cu numărul de ore afectat, materialul din volumul al doilea are o extensiune mai mare. Totodată, neexistînd încă o experiență suficientă în predarea acestui material la cursurile serale, unele capitole — sub forma în care apar în această primă ediție — sînt încă departe de o prezentare optimă.

Lecțiile din acest volum au fost redactate de A. Timotin și V. Hortopan (cap. 31—41, 43—48), A. Timotin (cap. 50, 51, 58), A. Timotin și S. Mastero (cap. 49, 53—57), M. Preda (cap. 42), M. Preda și S. Mastero (cap. 52) și A. Ifrim (cap. 59 și 60). Coordonarea întregii lucrări și redactarea finală au fost efectuate de A. Timotin. Și în cazul volumului al doilea, lucrările și îndrumarea profesorului Romus Răduleț, membru al Academiei R.P.R., căruia autorii îi rămîn profund îndatorați, au contribuit în mod esențial la elaborarea acestor lecții.

Pentru ajutorul competent primit la pregătirea manuscrisului autorii aduc mulțumirile lor ing. Alexandrina Petrescu.

TABLA DE MATERII

CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM VARIABIL

31. REGIMUL CVASISTAȚIONAR AL CIRCUITELOR ELECTRICE FILIFORME

Circuitele electrice de curent variabil în timp au o importanță practică foarte mare. Studiul lor constituie și astăzi principalul capitol de aplicații ale electrodinamicii, adică principalul capitol de electrotehnică. Deși rezolvarea riguroasă a oricărei probleme de electrodinamică revine în cele din urmă la rezolvarea ecuațiilor lui Maxwell, pentru cîmpul electromagnetic (v. par. 29.2. vol. I), studiul circuitelor se poate face cu metode mai simple, specifice, suficient de exacte pentru aplicații, dacă sînt îndeplinite anumite condiții destul de generale.

Prima condiție este *caracterul filiform* al conductoarelor care alcătuiesc circuitul: secțiunea lor transversală trebuie să aibă dimensiuni liniare suficient de mici, pentru ca intensitatea curentului să poată fi repartizată uniform pe această secțiune. Realizarea acestei condiții depinde de natura conductorului și de frecvență. Dacă a este o dimensiune liniară a acestei secțiuni (de ex. raza ei), σ conductivitatea materialului conductor, $\mu = \mu_0 \mu_r$ permeabilitatea lui magnetică și $f = \omega/2\pi$ frecvența, studiul cîmpului electromagnetic alternativ în conductoare masive (par. 55.2) arată că se poate considera conductorul filiform, dacă

$$a \ll \sqrt{\frac{1}{\sigma\mu\omega}} = \delta, \tag{31.1}$$

mărimea δ, caracteristică materialului la o frecvență dată, numindu-se adîncimea de pătrundere a undelor în conductor.

A doua condiție e *caracterul cvasistaționar* (v. cap. 25, vol. I) al regimului de variație în timp a mărimilor de stare ale cîmpului electromagnetic. Aceste variații trebuie să fie suficient de lente pentru ca peste tot, cu excepția dielectricului condensatoarelor, să se poată neglija curentul electric de deplasare (v. par. 21.3., vol. I). În dielectricul condensatoarelor, atît intensitatea cîmpului electric, respectiv inducția electrică, cît și suprafața străbătută de fluxul electric (de arie egală cu a armăturilor) sînt suficient de mari pentru ca intensitatea

curentului de deplasare — egală cu intensitatea curentului de conducție absorbit de armături — să poată avea valori comparabile cu ale curenților din celelalte ramuri ale circuitului. Studiul undelor electromagnetice, care se pun în evidență atunci cînd aproximația regimului cvasistaționar nu mai e aplicabilă (v. par. 573), arată că regimul cvasistaționar este practic realizat, dacă cea mai mare dimensiune liniară l a întregului circuit e foarte mică față de lungimea de undă cea mai mică λ (corespunzătoare celei mai mari frecvențe f), care intervine în problema considerată

$$l \ll \lambda = c_0/f, \tag{31.2}$$

unde $c_0 \approx 3 \cdot 10^8$ m/s e viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid.

Condițiile (31.1) și (31.2) arată că într-o problemă dată posibilitatea aplicării metodelor de studiu specifice circuitelor depinde de frecvență. Presupunînd că frecvența f crește de la zero, există un domeniu $0 < f < f_1$, în care ambele condiții sînt realizate, adică circuitul e filiform și regimul e cvasistaționar. Există apoi un domeniu $f_1 < f < f_2$, în care numai condiția (31.2) este realizată, adică circuitul nu mai poate fi considerat filiform, dar regimul este cvasistaționar. Cu anumite precauții și limitîndu-ne la un regim periodic sinusoidal, se pot extinde și în acest caz unele metode specifice circuitelor, operîndu-se cu parametri dependenți de frecvență. În sfîrșit, pentru $f_2 < f$ nici regimul nu mai poate fi socotit cvasistaționar și metodele specifice circuitelor nu mai pot fi aplicate.

31.1. Recapitularea legilor electromagnetismului.

Legile teoriei macroscopice a cîmpului electromagnetic, prezentate în vol. I și discutate în par. 29.1, se exprimă în forma lor cea mai generală cu ajutorul mărimilor de stare locală a cîmpului electromagnetic — intensitatea cîmpului electric **E**, inducția electrică **D**, intensitatea cîmpului magnetic **H**, inducția magnetică **B** — și cu ajutorul mărimilor de stare electrică și magnetică a corpurilor — sarcina electrică q și densitățile ei, intensitatea curentului electric de conducție i și densitatea ei **J**, polarizația electrică **P** și magnetizația **M**. În scrierea raționalizată folosită în acest curs, aceste legi sînt:

— *Legea inducției electromagnetice:*

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma} \mathbf{B} d\mathbf{A}. \tag{I}$$

— *Legea fluxului electric:*

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = q_\Sigma. \tag{II}$$

— *Legea legăturii dintre intensitatea cîmpului electric, inducția electrică și polarizația electrică:*

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \tag{III}$$

— *Legea polarizației electrice temporare* (lege de material caracterizînd dielectricii liniari):

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \tag{IV}$$

din care, cu relaţia III, în dielectricii liniari fără polarizaţie permanentă, rezultă :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{IV'}$$

unde $\varepsilon = D/E$ e permitivitatea dielectricului, χ_e susceptivitatea electrică a lui, iar $\varepsilon_0 \approx (1/36\pi)\, 10^{-9}$ F/m e permitivitatea vidului.

— *Legea circuitului magnetic* :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}d\mathbf{s} = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{J}d\mathbf{A} + \frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma} \mathbf{D}d\mathbf{A} \tag{V}$$

(al doilea termen din membrul drept fiind curentul de deplasare, care se neglijează în regim cvasistaţionar).

— *Legea fluxului magnetic* :

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{B}d\mathbf{A} = 0. \tag{VI}$$

— *Legea legăturii dintre inducţia magnetică, intensitatea cîmpului magnetic şi magnetizaţie* :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}. \tag{VII}$$

— *Legea magnetizaţiei temporare* (lege de material caracterizînd material magnetic liniar) :

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \tag{VIII}$$

din care, cu relaţia VII, în materiale magnetic liniare şi fără magnetizaţie permanentă, rezultă :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{VIII'}$$

unde $\mu = B/H$ e permeabilitatea magnetică a materialului, χ_m susceptivitatea magnetică a lui, iar $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m e permeabilitatea vidului.

— *Legea conservării sarcinii electrice* :

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J}d\mathbf{A} = -\frac{dq_\Sigma}{dt}. \tag{IX}$$

— *Legea conducţiei electrice* (lege de material pentru conductoare electrice liniare, reprezentînd formularea locală generalizată a legii lui Ohm) :

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i), \tag{X}$$

în care $\sigma = 1/\rho$ e conductivitatea electrică a materialului, ρ rezistivitatea lui, iar $\mathbf{E}_i$ intensitatea cîmpului electric imprimat (diferită de zero numai în regiunile de neomogenitate sau accelerate ale conductoarelor).

— *Legea transformării energiei în conductoare* (formularea locală generalizată a legii Joule-Lenz) :

$$p_J = \mathbf{EJ}, \tag{XI}$$

în care p_J e densitatea de volum a puterii cedate de cîmpul electromagnetic conductorului în procesul de conducţie a curentului electric. Alte legi privind fenomenele electrice şi magnetice mai puţin importante din punctul de vedere al cîmpului electromagnetic şi al circuitelor electrice (de ex. legea electrolizei — v. par. 15.2., vol. I), nu mai sînt amintite.

În expresiile integrale ale legilor, sensul de integrare pe curbele închise Γ, adică sensul elementelor de arc $d\mathbf{s} = \mathbf{t}.\, ds$, este asociat după regula burghiului drept sensului de integrare pe suprafeţele deschise S_Γ, sprijinite pe aceste curbe, adică sensului elementelor de arie $d\mathbf{A} = \mathbf{n}.\, dA$ ale acestor suprafeţe; în cazul suprafeţelor închise Σ, sensul lui $d\mathbf{A}$ e sensul normalei exterioare.

În studiul circuitelor electrice (v. şi cap. 13, vol. I) şi magnetice (v. cap. 26, vol. I), aceste legi sau consecinţele lor se exprimă cu ajutorul mărimilor de stare ale circuitelor, definite de integrale de linie sau de suprafaţă ale mărimilor de stare locală, şi anume :

— *Tensiunea electrică:*

$$u = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} \tag{31.3}$$

— *Tensiunea electromotoare (t.e.m.) de contur* [1]*:*

$$e = \oint_\Gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{ds}. \tag{31.3'}$$

— *Fluxul electric:*

$$\psi = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{dA} \tag{31.4}$$

— *Intensitatea curentului electric de conducţie* [2] (curentul electric):

$$i = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{dA}. \tag{31.5}$$

— *Tensiunea magnetică:*

$$u_m = \int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{ds} \tag{31.6}$$

— *Tensiunea magnetomotoare* (t.m.m.):

$$u_{mm} = \oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot \mathbf{ds} \tag{31.6'}$$

— *Fluxul magnetic:*

$$\Phi = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dA} \tag{31.7}$$

Observaţie: Ori de cîte ori se utilizează aceste mărimi integrale, care sînt mărimi scalare algebrice (putînd fi pozitive sau negative), *trebuie să se precizeze sensul în care se efectuează integrarea* (adică sensul lui **ds**, respectiv **dA**), numit *sens de referinţă* al mărimii respective. Fără această precizare, simbolurile acestor mărimi şi relaţiile scrise cu ele nu au o interpretare unică. De aceea, sensurile de referinţă se precizează pe scheme cu săgeţi, aşa cum s-a procedat şi la studiul circuitelor de curent continuu (v. par. 13.1., vol. I).

---

[1] Integrala de contur a lui **E** se numeşte *tensiune electromotoare indusă*, iar aceea a lui $\mathbf{E}_i$ *tensiune electromotoare imprimată.*

[2] De obicei, termenul de intensitate a curentului e folosit atunci cînd S_Γ e secţiunea transversală a unui conductor sau o parte a ei; dacă S_Γ e o suprafaţă înţepată de mai multe conductoare, integrala (31.5) e egală cu suma algebrică a intensităţilor curenţilor ce străbat suprafaţa în sensul ales, se notează cu Θ şi se numeşte *solenaţie* (v. par. 17.6.1.).

31.2. Relații fundamentale pentru studiul circuitelor

În teoria circuitelor electrice de curent variabil în regim cvasistaționar se folosesc multe dintre aceste legi, anumite forme particulare ale lor sau anumite consecințe ale lor, exprimate sub formă integrală cu ajutorul mărimilor de stare definite prin relațiile (31.3)... (31.7). Cele mai importante dintre aceste relații sînt următoarele:

a) *Legea inducției electromagnetice*: Tensiunea electromotoare indusă în lungul unui contur Γ este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin orice suprafață S_Γ sprijinită pe această curbă:

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{s} = e_\Gamma = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{S_\Gamma}}{\mathrm{d}t} \tag{31.8}$$

b) *Legea conducției electrice* (Ohm): Suma dintre tensiunea electrică în lungul unui fir conductor și tensiunea electrică imprimată în lungul firului este proporțională cu intensitatea curentului de conducție din fir:

$$\int_C (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = u_f + e_i = Ri. \tag{31.9}$$

Aici

$$u_f = \int_C \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{s}, \quad e_i = \int_C \mathbf{E}_i\mathrm{d}\mathbf{s}, \quad i = \iint_S \mathbf{J}\mathrm{d}\mathbf{A},$$

curba C fiind luată în lungul axului firului conductor între două puncte oarecare ale lui, iar suprafața S fiind o secțiune transversală a lui. Dacă pe porțiunea de fir, considerată tensiunea imprimată, e nulă (nu există pile electrice), legea lui Ohm se scrie:

$$u_f = Ri. \tag{31.9'}$$

În aceste relații, mărimile au același sens de referință ($\mathrm{d}\mathbf{s} \parallel \mathrm{d}\mathbf{A}$), iar R[1] e *rezistența* electrică a porțiunii considerate a conductorului (v. par. 12.3., vol. I).

c) *Teorema continuității curentului electric de conducție*: În regim cvasistaționar, intensitatea totală a curentului electric de conducție printr-o suprafață închisă Σ care nu străbate dielectricul vreunui condensator e nulă:

$$\oiint_\Sigma \mathbf{J}\mathrm{d}\mathbf{A} = i_\Sigma = 0 \tag{31.10}$$

[1] Se va nota adesea în cele ce urmează rezistența unei porțiuni conductoare de circuit cu litera mică r, spre a o deosebi de rezistența circuitului definită în curent alternativ.

În adevăr, membrul doi al legii conservării sarcinii (IX), egal cu curentul de deplasare prin aceeași suprafață închisă, ca urmare a legii fluxului electric (II), e nul în regim cvasistaționar.

d) *Legea conservării sarcinii electrice :* Intensitatea i a curentului electric de conducție, care intră în (iese din) suprafața închisă Σ, ce conține armătura unui condensator electric, este egală cu viteza de creștere (scădere) a sarcinii q a acestei armături (v. mai departe fig. 31.4.*a*) :

$$\boxed{i = \pm \frac{dq}{dt}}. \tag{31.11}$$

Semnul (+) corespunde cazului cînd sensul de referință al curentului i intră în armătura de sarcină q, iar semnul (—) cazului contrar. De data aceasta, curentul de deplasare printr-o suprafață Σ care trece prin dielectricul condensatorului, $i_D = \frac{d\psi}{dt} = \pm \frac{dq}{dt} = i$, nu mai poate fi neglijat, fiind egal cu curentul de conducție ce alimentează condensatorul.

e) *Teorema capacității electrostatice* (consecință a legilor (II), (III) și (IV) — — v. par. 7.2, vol. I) : Raportul dintre sarcina q a armăturii unui condensator și tensiunea electrică u_C dintre această armătură și cealaltă de sarcină $-q$ e o mărime de material numită *capacitate* electrostatică

$$\boxed{C = q/u_C > 0,}, \tag{31.12}$$

independentă de mărimea sarcinii q (și deci de a tensiunii u_C) pentru dielectricii liniari și determinată de configurația geometrică a condensatorului și de natura dielectricului.

f) *Teorema inductivității* (consecință a legilor (V) — fără curent de deplasare —, (VII) și (VIII) — v. par. 27.1, vol. I) : Raportul dintre fluxul Φ_{rs} (produs de curentul circuitului s prin conturul circuitului filiform r) și curentul i_s, care îl produce, e o mărime de material numită *inductivitate* (sau inductanță).

$$\boxed{L_{rs} = \Phi_{rs}/i_s = L_{sr}}, \tag{31.13}$$

independentă de mărimea fluxului Φ_{rs} (și deci de a curentului i_s) pentru material magnetic liniar și determinată de configurația geometrică a sistemului de circuite și de natura materialelor învecinate. Relația de mai sus definește *inductivitatea proprie* dacă $r = s$

$$L_{rr} = \boxed{L_r = \Phi_{rr}/i_r > 0} \tag{31.14}$$

și *inductivitatea mutuală* dacă $r \neq s$. În cazul a n circuite filiforme situate într-un mediu liniar din punct de vedere magnetic, fluxul rezultat Φ_r, produs

de toate circuitele prin conturul circuitului r, e suma fluxurilor produse de fiecare în parte:

$$\Phi_r = \sum_{s=1}^{n} \Phi_{rs} = \sum_{s=r}^{n} L_{rs} i_s \quad (r = 1,2,...,n). \tag{31.15}$$

Acestea sînt relaţiile lui Maxwell privitoare la inductivităţi.

g) *Teorema energiei electrice* (v. par. 8. 1, vol. I): Energia acumulată în cîmpul electric al unui condensator electric cu dielectric liniar este:

$$W^{(e)} = \frac{1}{2} q u_C = \frac{1}{2} q^2/C = \frac{1}{2} u_c^2 C. \tag{31.16}$$

h) *Teorema energiei magnetice* (v. par. 28.1, vol. I): Energia acumulată în cîmpul magnetic al unui sistem de n circuite situate într-un mediu magnetic liniar este:

$$W^{(m)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{2} \Phi_s i_s = \sum_{s=1}^{n} \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{2} L_{rs} i_r i_s. \tag{31.17}$$

Fiecare dintre termenii cu indici egali ai acestei sume

$$W_r^{(m)} = \frac{1}{2} \Phi_{rr} i_r = \frac{1}{2} L_{rr} i_r^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi_{rr}^2}{L_{rr}} \tag{31.18}$$

este *energia magnetică proprie* a circuitului r, iar fiecare pereche de termeni cu aceiaşi indici distincţi

$$W_{rs}^{(m)} = \frac{L_{rs} i_r i_s + L_{sr} i_s i_r}{2} = L_{rs} i_r i_s = \Phi_{rs}\, i_r = \Phi_{sr} i_s \tag{31.18'}$$

este *energia magnetică de interacţiune* a circuitelor r şi s.

i) *Legea transformării energiei în conductori* (v. par. 12.4, vol. I): Puterea disipată sub formă de căldură într-un conductor de rezistenţă R străbătut de curentul i este

$$\boxed{p_R = Ri^2 > 0} \ \text{(legea Joule-Lenz)}, \tag{31.19}$$

iar puterea cedată circuitului de un generator de tensiune electromotoare e_g este

$$p_g = e_g i \gtrless 0, \tag{31.20}$$

dacă sensurile de referinţă ale mărimilor e_g şi i coincid (puterea cedată negativă e efectiv preluată din circuit).

j) *Teorema transferului de putere la borne:* Puterea p_b primită instantaneu pe la borne de o reţea cu N borne de acces, ale cărei laturi nu sînt cuplate

magnetic cu exteriorul, este egală cu suma produselor dintre potențialele instantanee v_c ale bornelor și curenții instantanei $i_c^{(ex)}$ absorbiți din exterior:

$$\boxed{p_b = \sum_{c=1}^{N} v_c i_c^{(ex)}}. \tag{31.21}$$

În adevăr, dacă Σ e o suprafață închisă care conține rețeaua, intersectînd cele N borne, puterea primită din exterior este egală (conform teoremei energiei electromagnetice, v. par. 29.4, vol. I) cu fluxul vectorului lui Poynting prin acea suprafață

$$p_b = p_\Sigma = \iint_\Sigma (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A}_{int}$$

(calculul se face cu normala interioară pentru a obține puterea primită). Dacă rețeaua nu are laturi cuplate inductiv cu exteriorul, cîmpul electric indus e neglijabil în punctele suprafeței Σ și se poate pune $\mathbf{E} = -\text{grad}\ v$. Cu rot $\mathbf{H} = \mathbf{J}$ (regim cvasistaționar) se obține:

$$p_b = -\iint_\Sigma (\text{grad}\ v \times \mathbf{H}) d\mathbf{A}_{int} = -\iint_\Sigma [\text{rot}\ (v\mathbf{H}) - v\ \text{rot}\ \mathbf{H}]\ d\mathbf{A}_{int} = \iint_\Sigma v\ \mathbf{J} d\mathbf{A}_{int},$$

deoarece fluxul unui rotor printr-o suprafață închisă e identic nul (div rot $\equiv 0$). Ultima integrală are integrandul nul în punctele din dielectric, iar în dreptul fiecărei borne $\iint v\ \mathbf{J}d\mathbf{A}_{int} = v \iint \mathbf{J}d\mathbf{A}_{int} = vi^{(ex)}$. Se obține deci relația (31.21).

În particular, în cazul unei rețele cu două borne de acces, prin care intră curenții $i_1^{(ex)} = i_1$ și $i_2^{(ex)} = -i_1$, puterea primită pe la borne are expresia:

$$p_b = v_1 i_1^{(ex)} + v_2 i_2^{(ex)} = (v_1 - v_2) i_1.$$

Introducînd tensiunea la borne $u_b = v_1 - v_2$, cu sensul de referință asociat sensului curentului după regula de la receptoare, *puterea primită pe la borne din exterior de un dipol* are expresia:

$$\boxed{p_b = u_b i}. \tag{31.21'}$$

Aceeași relație exprimă puterea cedată pe la borne spre exterior, dacă sensurile de referință ale mărimilor u_b și i sînt luate după regula de la generatoare.

Observații: 1. În relațiile de mai sus am folosit litere mici, u, i, v, p, pentru a desemna valorile instantanee-funcțiuni de timp — ale mărimilor respective (v. par. 33.1.), în acord cu convenția uzuală.

2. În măsura în care nu există ambiguitate, indicii inferiori nu se mai pun și puterea la borne se notează p, iar tensiunea la borne u.

31.3. Elementele de circuit

Studiul circuitelor electrice filiforme în regim cvasistaționar arată că fiecare latură a unui asemenea circuit poate fi privită ca o asociație de elemente de circuit ideale (sau pure) — rezistoare, bobine, condensatoare etc. — fiecare element fiind caracterizabil prin cîte un singur parametru de circuit — rezis-

tență, inductivitate, capacitate etc. Proprietățile circuitelor apar astfel localizate în puncte distincte ale lor, ceea ce justifică denumirea de *circuite cu parametri concentrați* (sau cu constante concentrate), dată acestor circuite. În ele cîmpul magnetic e luat în considerare numai prin inductivitățile bobinelor din laturile lor, iar cîmpul electric numai prin capacitățile condensatoarelor din aceste laturi. Desigur, elementele reale de circuit au proprietăți mai complexe, care nu sînt caracterizabile printr-un singur parametru. Înfășurarea unei bobine de exemplu, prezintă nu numai o inductivitate, ci și o anumită rezistență. *În măsura în care circuitul e filiform și regimul e cvasistaționar, se poate găsi o schemă echivalentă, alcătuită din elemente ideale de circuit, care să ducă la aceleași ecuații ca și în cazul elementului de circuit real.* Fără a da o demonstrație generală a acestei afirmații, o vom verifica în cîteva exemple în capitolul următor (cap. 32), după ce mai înainte vom fi studiat elementele ideale de circuit necesare compunerii unor astfel de scheme echivalente.

În afară de rezistoare, bobine și condensatoare, circuitele electrice mai conțin și surse de energie electromagnetică (surse de curent), care sînt sediul unor tensiuni electromotoare — adică aduc o contribuție nenulă la tensiunea electromotoare de contur din circuitul închis în care sînt conectate. Ele se mai numesc *generatoare electrice.*

O rețea electrică cu parametri concentrați este o asociație de generatoare, rezistoare, bobine, condensatoare și conductoare de legătură conectate într-un anumit mod. O rețea electrică cu un număr mic de borne de acces și de generatoare (de obicei unul sau nici unul), îndeplinind o funcțiune determinată în instalația sau în rețeaua mai complexă din care face parte, e numită *circuit electric.* Această accepție a termenului de circuit e astăzi din ce în ce mai utilizată, alături de accepția inițială (aceea de sistem de medii prin care se poate închide curentul electric). Un circuit electric cu două borne de acces și ale cărui laturi nu au cuplaje magnetice cu alte laturi din exterior se numește *dipol electric.* Un circuit electric în ale cărui laturi se găsesc generatoare se numește *activ,* iar un circuit fără generatoare se numește *pasiv.* Bobinele și condensatoarele se mai numesc *elemente de circuit reactive.*

Calculul circuitelor și rețelelor electrice consistă în rezolvarea unor ecuații diferențiale obținute prin aplicarea legilor și teoremelor menționate în paragraful precedent cum și a altor legi de material (de exemplu caracteristici de elemente de circuit.) Variabila independentă e timpul, iar funcțiunile necunoscute sînt de obicei curenții din laturi. Dacă parametrii circuitului sînt constanți, ecuațiile obținute sînt ecuații diferențiale ordinare liniare, cu coeficienți constanți, iar circuitul e numit *liniar.* Dacă parametrii circuitului sînt funcțiuni date de timp (cum e, de exemplu, rezistența unui microfon cu cărbune care variază în ritmul impus de oscilațiile sonore ale aerului), ecuațiile obținute sînt ecuații diferențiale ordinare liniare cu coeficienți variabili, iar circuitul e numit *parametric.* În sfîrșit, dacă parametrii circuitului depind de valorile curenților și tensiunilor din circuit (cum e inductivitatea unei bobine cu miez de fier), ecuațiile obținute sînt ecuații diferențiale ordinare neliniare, iar circuitul se numește *neliniar.*

Teoria matematică a ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți este astăzi, o teorie completă, și de aceea circuitele liniare se pot studia sistematic în cadrul cursurilor de electrotehnică. Studiul circuitelor parametrice, și mai ales a celor neliniare, prezintă dificultăți

matematice considerabile, deşi prezintă un interes practic foarte mare, prilejuit în special de dezvoltarea electronicii. De aceea, aceste circuite se studiază dezvoltat la discipline de specialitate, cu mijloace teoretice şi empirice.

Aşa cum am precizat la început, cu cît frecvenţa e mai înaltă, cu atît — pentru un circuit dat — aproximaţia regimului cvasistaţionar e mai puţin bună şi, odată cu ea, caracterizarea ca circuit cu parametri concentraţi e mai puţin adecvată. De aceea, pentru circuite de lungime comparabilă, cu lungimea de undă sau cu o fracţiune a ei, s-a dezvoltat o teorie aparte, în care se ia în considerare repartiţia continuă a caracteristicilor circuitului, care se numeşte atunci *circuit cu parametri repartizaţi* (v. cap. 53. Liniile electrice lungi).

În cele ce urmează se vor studia *elementele ideale de circuit*, cu scopul principal de a stabili relaţiile dintre tensiunea la borne şi curent. La rezistor, bobină şi condensator, care sînt dipoli pasivi, se va folosi regula de asociere a sensurilor de referinţă de la receptoare (săgeata tensiunii la borne pleacă de la aceeaşi bornă cu săgeata curentului); dipolii la care se aplică această regulă se mai numesc *dipoli receptori*. La generatoarele care debitează energie electromagnetică, care sînt dipoli activi, se va folosi regula de asociere a sensurilor de referinţă de la generatoare (săgeata tensiunii la borne pleacă din borna în care intră săgeata curentului); dipolii la care se aplică această regulă se numesc *dipoli generatori*. Trebuie însă să subliniem că, pentru orice dipol, se poate aplica oricare dintre aceste reguli, cu condiţia de a menţiona care regulă se aplică, sau de a indica explicit sensurile de referinţă în scheme. *Altfel, relaţiile obţinute nu au o interpretare univocă* (v. şi par. 13.1, vol. I). Uneori, cînd se foloseşte regula de la receptoare, curentul se mai numeşte *curent absorbit*, iar tensiunea la borne, *tensiune aplicată* (v. şi par. 34.4); iar cînd se foloseşte regula de la generatoare, curentul se mai numeşte *curent debitat*, şi tensiunea la borne, *tensiune produsă*. La aplicarea legii conducţiei electrice vom ţine seama de faptul că intensitatea cîmpului electric imprimat e peste tot nulă, cu excepţia surselor (pilelor electrice).

31.3.1 **Rezistorul ideal.** Un rezistor ideal de rezistenţă R are inductivitatea neglijabilă (v. par. 27.3, vol. I). Fie o curbă închisă Γ, care trece în lungul firului conductor şi se închide pe la borne în sens opus sensului tensiunii la borne u_b (fig. 31.1, *a*). Tensiunea electromotoare e_Γ calculată în lungul acestei curbe, egală cu suma dintre tensiunea în lungul firului u_f şi tensiunea la borne cu semn schimbat ($-u_b$), este nulă, deoarece o dată cu inductivitatea se neglijează şi fluxul magnetic, respectiv variaţia lui în timp, dată de relaţia (31.8):

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{s} = e_\Gamma = u_f - u_b = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \approx 0.$$

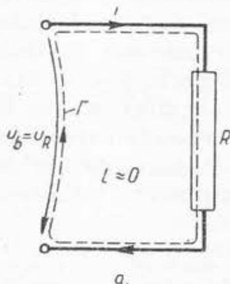
Pentru rezistorul ideal, tensiunea la borne este deci egală cu tensiunea în lungul firului, dată de relaţia (31.9'):

$$u_b = u_f = Ri.$$

În circuite mai complexe, căderea de tensiune la bornele unui rezistor ideal se mai notează u_R. Se obţine astfel *expresia căderii de tensiune rezistive* (numită impropriu şi cădere de tensiune ohmică):

$$u_R = Ri \qquad (31.22)$$

În regim variabil, tensiunea la bornele unui rezistor ideal rămîne proporţională cu intensitatea curentului, adică legea lui Ohm îşi păstrează forma uzuală din cazul curentului continuu, în care apare tensiunea la



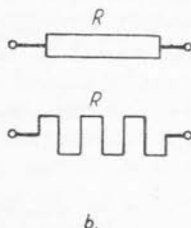


Fig. 31.1.

borne în locul tensiunii în lungul firului din forma generală (31.9'). Rezistorul ideal e singurul element de circuit cu această proprietate.

Înmulțind ambii membri ai relației (31.22) cu i, se obține bilanțul puterilor instantanee :

$$p = u_R i = Ri^2 > 0. \qquad (31.23)$$

Puterea instantanee primită pe la bornele unui rezistor ideal e egală cu aceea disipată prin efect Joule-Lenz în conductor (31.19).

În figura 31.1, *b* se indică simboluri grafice folosite pentru rezistoare.

31.3.2. **Bobina ideală.** O bobină ideală are inductivitatea L și rezistența conductorului neglijabilă. Tensiunea electromotoare e_Γ, calculată în lungul firului în sensul curentului și închisă pe la borne în sens opus tensiunii la borne u_b (fig. 31.2,*a*), este cu relația (31.8) :

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{s} = e_\Gamma = u_f - u_b = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \qquad (31.24)$$

unde $\Phi = \Phi_{S_\Gamma}$ e fluxul magnetic al bobinei, calculat printr-o suprafață S_Γ sprijinită pe curba închisă Γ.

Observație: Riguros vorbind, acest flux, ca și inductivitatea bobinei, e determinat univoc numai prin precizarea liniei tensiunii la borne care închide curba Γ. Cum alegerea acestei linii are un caracter destul de arbitrar, rezultă și o anumită nedeterminare în definirea inductivității unei bobine (care constituie în fond un circuit deschis). Practic, cîmpul magnetic e intens numai în interiorul spirelor. Numărul spirelor fiind de obicei mare (cîteva sute sau cîteva mii), fluxul magnetic Φ_{S_Γ} e determinat în principal de porțiunile suprafeței S_Γ sprijinite de spire, adică e practic egal cu fluxul fascicular (printr-o spiră), multiplicat cu numărul spirelor. Porțiunea din suprafața S_Γ, sprijinită pe linia tensiunii la borne, are deci o contribuție neglijabilă la fluxul total cu atît mai mică, cu cît conductoarele de legătură și bornele sînt mai apropiate. De aceea, nedeterminarea care ar interveni în alegerea liniei tensiunii la borne — luată de obicei pe drumul cel mai scurt — nu afectează inductivitatea decît la frecvențe foarte înalte, unde bobinele au puține spire. Numai în acest caz precizarea exactă a liniei tensiunii la borne e necesară.

Dacă rezistența bobinei e neglijabilă, și tensiunea în lungul firului e neglijabilă :

$$u_f = Ri \approx 0.$$

Nu există deci cădere de tensiune în lungul firului conductor al unei bobine ideale. Există însă o cădere de tensiune în lungul liniei tensiunii la borne, care rezultă imediat din relația (31.24) :

$$u_b = -e_\Gamma = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad (31.25)$$

Cînd bobina nu e cuplată magnetic cu alte bobine (adică inductivitățile ei mutuale cu aceste bobine sînt neglijabile) din relația (31.15) rezultă :

$$u_b = -e_\Gamma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Li),$$

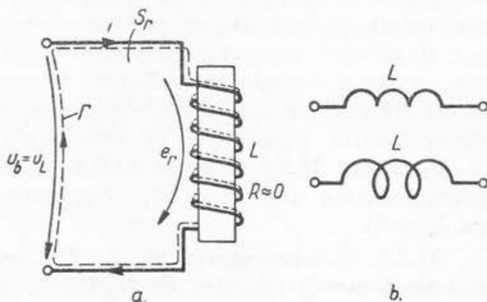


Fig. 31.2.

iar cînd inductivitatea L e constantă (material magnetic liniar şi configuraţie geometrică invariabilă), simbolul L se poate scoate de sub semnul de derivare. În circuite mai complexe, căderea de tensiune la bornele unei bobine ideale se mai notează u_L. Se obţine astfel *expresia căderii de tensiune inductive :*

$$\boxed{u_L = \frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt}}, \qquad (31.26)$$

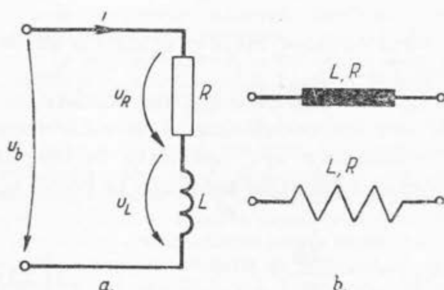


Fig. 31.3.

ultima egalitate fiind valabilă pentru bobine de inductivitate invariabilă necuplate magnetic cu altele.

Dacă rezistenţa bobinei nu se poate neglija (fig. 31.2,*a* cu $R \neq 0$) sau dacă se consideră un rezistor bobinat cu inductivitate nenulă, în relaţia (31.24) trebuie pus $u_f = Ri$ şi, cu $\Phi = Li$, rezultă ecuaţia :

$$u_b = u_f + \frac{d\Phi}{dt} = Ri + L\frac{di}{dt} = u_R + u_L.$$

Se observă că tensiunea la borne nu mai este proporţională cu intensitatea curentului, dacă $L \neq 0$: *în regim variabil legea lui Ohm nu se mai poate formula ca în curent continuu.* Se mai observă că în acest caz tensiunea la borne e suma dintre căderea de tensiune (31.22) de la bornele unui rezistor ideal şi căderea de tensiune (31.26) de la bornele unei bobine ideale. *Bobina reală (cu $R \neq 0$) şi rezistorul real (cu $L \neq 0$) admit deci o schemă echivalentă, compusă din elemente ideale R, L, conectate în serie (fig. 31.3,a).*

Înmulţind ambii membri ai relaţiei (31.26) cu i, rezultă bilanţul puterilor instantanee la bobina ideală liniară (de inductivitate invariabilă) :

$$p = u_L i = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right) \gtrless 0. \qquad (31.27)$$

Puterea instantanee primită pe la borne de o bobină ideală e egală cu viteza de variaţie a energiei magnetice (31.18) a bobinei. Dacă $p > 0$, energia e primită efectiv pe la borne şi se acumulează în cîmpul magnetic al bobinei. Dacă $p < 0$, energia cîmpului magnetic scade şi puterea e, în fond, cedată în exterior; această situaţie se realizează în orice moment în care, numai pentru una dintre mărimile $u_b = u_L$ sau i, sensul instantaneu real e opus sensului de referinţă corespunzător regulii de la receptoare.

În figura 31.2,*b* şi figura 31.3,*b* se indică simboluri grafice folosite pentru bobine ideale (cu $R = 0$), respectiv pentru bobine şi înfăşurări reale (cu $R \neq 0$).

31.3.3. Condensatorul ideal. Un condensator ideal de capacitate C are rezistenţa conductoarelor de legătură, inductivitatea circuitului constituit de aceste conductoare şi de armături şi conductanţa dielectricului, neglijabile.

Fie q sarcina armăturii în care intră curentul i, în sensul de referință ales, cealaltă armătură avînd sarcina $-q$. Considerăm o curbă închisă Γ (fig. 31.4,*a*), care străbate dielectricul în sensul de referință al tensiunii u_C a condensatorului și se închide pe la borne în sens opus lui u_b. Cu relația (31.8), tensiunea electromotoare e_Γ indusă în lungul acestei curbe este:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \mathbf{E} d\mathbf{s} = u_f + u_C - u_b = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

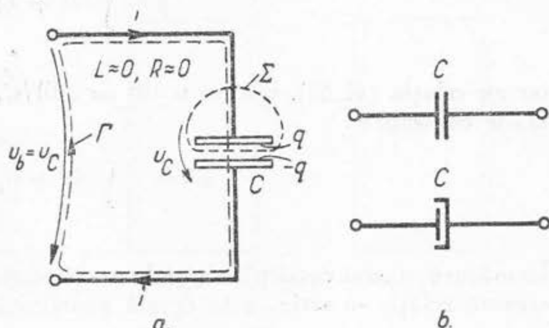


Fig. 31.4.

Deoarece inductivitatea circuitului condensatorului e presupusă neglijabilă $e_\Gamma = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} \approx 0$, și deoarece rezistența acestui circuit e presupusă neglijabilă $u_f = Ri \approx 0$. Rezultă că tensiunea la bornele unui condensator ideal e egală cu tensiunea dintre armături, dată de relația (31.12):

$$u_b = u_C = \frac{q}{C}. \tag{31.28}$$

Analiza precedentă pune în evidență faptul că schema echivalentă a unui condensator real ar trebui să conțină în serie cu condensatorul un rezistor ideal și o bobină ideală, în măsura în care parametrii acestora nu ar putea fi neglijați.

Deoarece conductanța dielectricului e presupusă neglijabilă, acesta nu e străbătut de curent de conducție, și curentul de conducție total care intră în suprafața închisă Σ (ce conține armătura de sarcină q) e egal cu curentul i din conductorul conectat la acea armătură. Din legea conservării sarcinii, relația (31.11), rezultă că acest curent e diferit de zero în regim variabil în timp, asigurînd încărcarea sau descărcarea condensatorului. Totodată, acest curent e egal cu curentul care iese din armătura de sarcină $-q$, deoarece suma curenților printr-o suprafață închisă ce conține ambele armături e nulă în regim cvasistaționar (v. 31.10). Acest rezultat se exprimă figurat, spunînd că în regim variabil curentul electric „trece" prin condensator, în opoziție cu curentul de regim staționar (curentul continuu).

Dacă nu ar fi neglijabilă conductanța dielectricului, schema echivalentă a condensatorului real ar mai conține, în paralel cu un condensator ideal, un rezistor ideal de rezistență egală cu valoarea reciprocă a conductanței dielectricului.

Cu relațiile (31.28) și (31.11) rezultă relația dintre curent și tensiunea la borne $u_b = u_C$ pentru condensatorul ideal (cu sensurile de referință alese):

$$i = \frac{d}{dt}(Cu_C) = C\frac{du_C}{dt}, \tag{31.29}$$

ultima egalitate fiind valabilă pentru condensatoare de capacitate invariabilă (cu dielectc liniarir și configurație geometrică invariabilă). Integrînd relația

(31.11) — în care se ia semnul (+), deoarece curentul i intră în armătura de sarcină q — între momentul $t = 0$, cînd $q = q(0)$ și momentul curent t, rezultă :

$$q = \int_0^t i \mathrm{d}t + q(0),$$

iar cu relația (31.28), notînd $u_C(0) = q(0)/C$, se obține *expresia căderii de tensiune capacitive* :

$$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i \mathrm{d}t + u_C(0). \tag{31.30}$$

În măsura în care condițiile inițiale nu prezintă interes în problema considerată, această relație se scrie ca integrală nedefinită (funcție primitivă) :

$$u_C = \frac{1}{C}\int i \mathrm{d}t, \tag{31.30'}$$

subînțelegîndu-se o constantă arbitrară aditivă.

Înmulțind ambii membri ai relației (31.28) cu tensiunea la borne $u_b = u_C$, se obține egalitatea ce exprimă bilanțul puterilor instantanee la condensatorul ideal de capacitate invariabilă :

$$p = u_C i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{Cu_C^2}{2}\right) \gtrless 0. \tag{31.31}$$

Puterea instantanee primită pe la borne de un condensator ideal e egală cu viteza de variație a energiei electrice (31.16) a condensatorului. Dacă $p > 0$, energia e primită efectiv pe la borne și se acumulează în cîmpul electric al condensatorului. Dacă $p < 0$, energia cîmpului electric scade și puterea e, în fond, cedată pe la borne; această situație se realizează în orice moment în care numai pentru una dintre mărimile $u_b = u_C$ sau i, sensul instantaneu real e opus sensului de referință corespunzător regulii de la receptoare.

În figura 31.4,*b* se indică simboluri grafice folosite pentru condensatoare.

31.3.4. Generatorul ideal de tensiune. O sursă de energie electromagnetică care introduce în circuitul din care face parte o tensiune electromotoare e_g dată, independentă de structura rețelei în care e conectată și între ale cărui borne căderea de tensiune interioară e neglijabilă, se numește *generator ideal de tensiune*. Considerînd o curbă închisă Γ (fig. 31.5,*a*), care trece prin generator în lungul conductorului și în sensul tensiunii lui electromotoare și se închide pe la borne în sensul tensiunii la borne u_b, luată după regula de la generatoare, tensiunea electromotoare (imprimată, dacă sursa e o pilă electrică, sau indusă) în lungul acestei curbe este prin ipoteză :

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)\mathrm{d}\mathbf{s} = e_g.$$

Totodată, această integrală se poate descompune pe porţiuni în suma dintre o integrală luată în lungul conductorului de la 1′ la 1 — care e dată de relaţia (31.9) şi e prin ipoteză neglijabilă — şi o integrală luată în lungul liniei tensiuni la borne prin dielectric (unde $\mathbf{E}_i = 0$), care rezultă egală cu tensiunea la borne. Se obţine:

$$\boxed{e_g = u_b}. \quad (31.32)$$

Tensiunea electromotoare a unui generator ideal (luată în sensul curentului) e egală cu tensiunea la borne (luată după regula de la generatoare). Se observă că, în acest caz, faţă de cele două borne 1 şi 1′, sensurile săgeţilor mărimilor e_g şi u_b de mai sus sînt diferite. Dacă mărimile ar fi astfel definite, încît faţă de cele două borne sensurile lor să coincidă (de ex. de la 1′ la 1, v. fig. 31.5,*b*) — oricare ar fi sensul ales pentru curent — am avea:

$$e_g = -u_b. \quad (31.32')$$

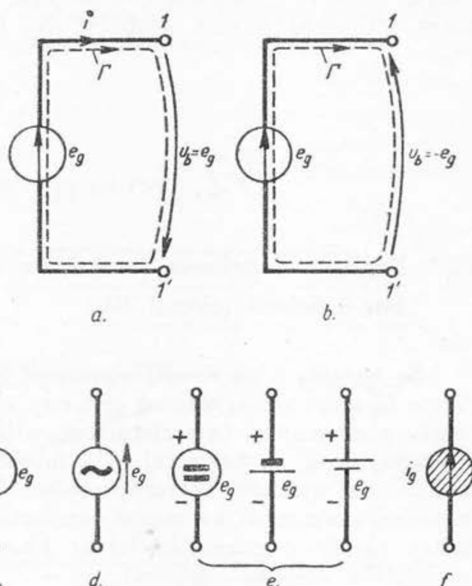


Fig. 31.5.

Generatoarele reale au cădere de tensiune interioară, datorită în cel mai simplu caz rezistenţei conductorului (care determină o valoare nenulă şi egală cu Ri pentru integrala $\int_{1'}^{1}(\mathbf{E}+\mathbf{E}_i)\mathrm{d}\mathbf{s}$) şi inductivităţii proprii (care adaugă un termen de forma $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Li)$ la e_g pentru a da pe e_Γ). Dacă t.e.m. e_g e independentă de curentul i, iar inductivitatea interioară şi rezistenţa interioară sînt invariabile, generatorul real e liniar şi admite o schemă echivalentă alcătuită dintr-un generator ideal de tensiune în serie cu un rezistor ideal şi cu o bobină ideală.

În figura 31.5, *c* se indică simbolul utilizat în acest curs, pentru generatoare ideale de tensiune. Acest simbol e simplu şi are în interior săgeata ce precizează sensul de referinţă al t.e.m., corespunzător localizării exacte a acestei mărimi. Pentru generatoare electrice se mai utilizează simbolurile din figura 31.5, *d* (generatoare de curent alternativ) şi din figura 31.5, *e* (generatoare de curent continuu). Şi la ultimele, în locul indicării polarităţii prin (—) şi (+) (ştiind că t.e.m. e dirijată de la — la +) s-ar putea preciza sensul t.e.m., cu o mică săgeată dispusă alături, ca în figura 31.5, *d*. Indicarea sensului de referinţă cu o astfel de săgeată dispusă în exteriorul simbolului de generator nu e recomandabilă, deoarece poate prilejui confuzii cu săgeata ce precizează sensul tensiunii la borne şi care — de obicei (fig. 31.5, *a*) — are sens opus.

31.3.5. **Generatorul ideal de curent.** Există generatoare reale, al căror curent debitat în exterior e practic independent de reţeaua la care sînt conectate. O sursă de energie electromagnetică care are proprietatea de a debita un curent dat i_g (*t*), independent de reţeaua conectată la bornele ei, se numeşte

generator ideal de curent sau *injector de curent.* O astfel de sursă e complet caracterizată de curentul ei i_g, iar tensiunea ei electromotoare, ca și tensiunea ei la borne, depind de condițiile exterioare și pot fi calculate numai după rezolvarea rețelei în care sursa e conectată. În acest curs vom folosi pentru generatoare ideale de curent simbolul din figura 31.5,*f*.

32. CIRCUITE SIMPLE ÎN REGIM TRANZITORIU

32.1. Regimul tranzitoriu de stabilire a curentului într-o bobină (circuit RL)

Se consideră un circuit conținînd în conexiune serie : o bobină de inductivitate L, un rezistor, o sursă de t.e.m. constantă E_0 și un întreruptor, rezistența totală a circuitului (a rezistorului, a bobinei, a sursei și a conductoarelor de legătură) fiind R. Circuitul e la început deschis, iar în momentul $t = 0$ se închide cu ajutorul întreruptorului. Tensiunea electromotoare e_Γ calculată în sensul curentului, în lungul conductorului circuitului închis, e egală cu suma dintre t.e.m. a generatorului și t.e.m. indusă în bobina de inductivitate invariabilă (bobină liniară) :

$$e_\Gamma = \int_\Gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)\mathrm{d}\mathbf{s} = E_0 - \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = E_0 - L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

De altă parte, conform legii conducției electrice, integrala de mai sus e egală cu Ri (curba Γ fiind peste tot conținută în conductor). Rezultă :

$$E_0 - L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri,$$

sau, separînd în dreapta termenii care conțin funcțiunea necunoscută i :

$$E_0 = Ri + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad (t > 0). \tag{32.1}$$

S-a obținut o relație de aceeași formă cu aceea care s-ar obține dacă un generator ideal de t.e.m. E_0 ar aplica tensiunea la borne $u_b = E_0$ unui circuit compus dintr-un rezistor ideal de rezistență R și o bobină ideală de inductivitate L. De aceea, circuitul nostru admite schema echivalentă cu parametrii concentrați din figura 32.1, *a* și ecuația lui s-ar fi putut scrie direct, însumînd tensiunile la borne ale elementelor ideale de circuit din această schemă. Trebuie însă să se sublinieze că în circuitul real, tensiunile la bornele diferitelor elemente diferă de tensiunile la borne din schema echivalentă (datorită căderilor de tensiune din rezistențele lor interioare); echivalența există numai din punctul de vedere al ecuației circuitului și poate fi folosită la rezolvarea lui.

Relația (32.1) e o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți neomogenă (de ord. I). Rezolvînd această ecuație, vom reaminti totodată metoda generală de rezolvare a acestui tip de ecuații.

Soluția generală se caută sub forma unei suprapuneri de două alte soluții :

$$i(t) = i_l(t) + i_p(t). \tag{32.2}$$

Regimul liber : Primul termen e soluția generală (cuprinzînd atîtea constante arbitrare cît e ordinul ecuației) a ecuației omogene asociată ecuației date, obținută anulînd termenul liber al acesteia ; în cazul studiat :

$$R\,i_l + L\,\frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{d}t} = 0.$$

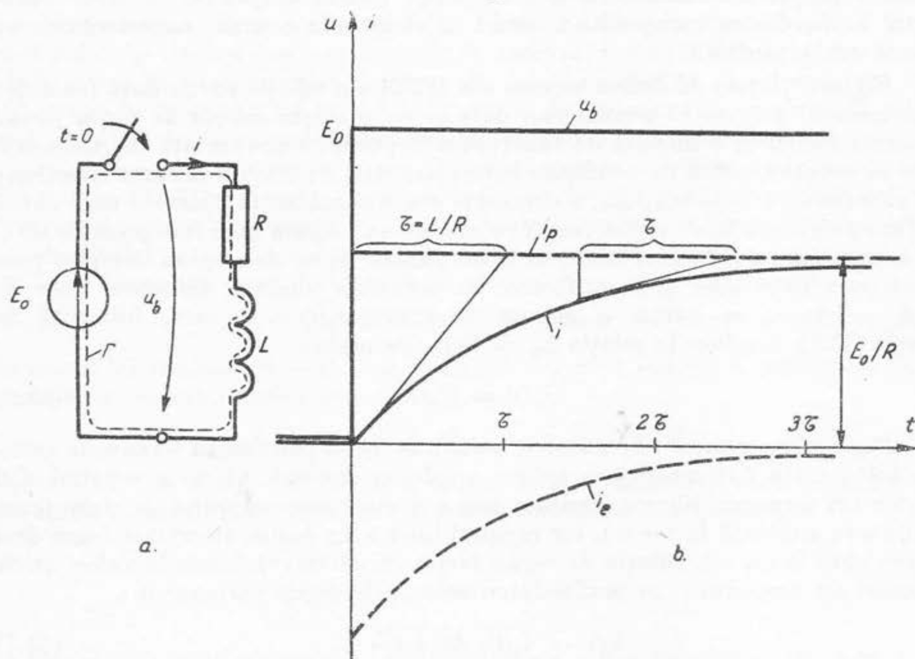


Fig. 32.1.

Soluția acestei ecuații omogene (care nu mai conține decît parametrii circuitului) are o formă care nu depinde de factori exteriori, e determinată complet de condițiile inițiale și se numește *soluția de regim liber*. Forma ei generală e o sumă cu coeficienți arbitrari de funcțiuni exponențiale de timp, în număr egal cu ordinul ecuației, factorii de la exponent fiind rădăcinile ecuației caracteristice, care se obține din ecuația omogenă, înlocuind formal derivata de ordinul k a funcțiunii necunoscute cu puterea k a unei variabile auxiliare r. În cazul nostru, ecuația caracteristică este $R + L\,r = 0$, cu o singură rădăcină $r = -R/L$, și soluția generală de regim liber are forma :

$$i_l = K\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = K\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{32.3}$$

în care am notat cu

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}, \tag{3.42}$$

o mărime caracteristică circuitului numită *constanta de timp* [1] a lui. Constanta arbitrară K urmează a fi determinată din condițiile inițiale pe care trebuie să le satisfacă soluția completă (32.2). Se observă că regimul liber e un regim amortizat, care se stinge treptat cînd timpul crește :

$$\lim_{\to\infty} i(t)=0. \qquad (32.5)$$

Această proprietate caracterizează circuitele liniare obișnuite, ai căror parametri R, L, C sînt toți pozitivi, astfel că rădăcinile ecuației caracteristice au partea reală pozitivă.

Regimul forțat : Al doilea termen din (32.2) e o soluție particulară (complet determinată) a ecuației neomogene date și se numește *soluția de regim forțat*, deoarece forma ei e impusă de funcțiunea de timp, reprezentată de termenul liber al ecuației, adică de condițiile exterioare. Ori de cîte ori această funcțiune e o constantă, o exponențială, o sinusoidă sau o combinație liniară a unor astfel de funcțiuni, soluția de regim forțat se găsește sub forma unei funcțiuni de timp de același fel cu termenul liber, ai cărei parametri se determină complet prin substituție în ecuație și identificare. În problema noastră, termenul liber E_0 fiind constant, se caută o soluție constantă $i_p(t) = I_0$ care, înlocuită în relația (32.1), conduce la relația $E_0 = R\, I_0$, de unde :

$$i_p(t) = E_0/R. \qquad (32.6)$$

Regimul permanent : Se numește *soluție de regim* permanent [2] expresia asimptotică, pentru t tinzînd către infinit a soluției generale (32.2) a ecuației. Ori de cîte ori termenul liber e constant sau e o funcțiune periodică de timp (care deci nu se anulează la $t\to\infty$), iar regimul liber e un regim amortizat (care deci se anulează la $t\to\infty$), soluția de regim forțat își păstrează forma la valori oricît de mari ale timpului și se confundă cu soluția de regim permanent :

$$i(t) \to i_p(t), \text{ dacă } t\to\infty. \qquad (32.7)$$

Aceasta este situația cea mai întîlnită în circuitele liniare uzuale alimentate cu tensiuni periodice. În aceste circuite, regimul forțat se confundă cu regimul permanent și, de aceea, în cele ce urmează, nu vom mai face distincție între ele.

Dacă însă termenul liber nu e o constantă sau o funcțiune periodică de timp, nu există un regim permanent al circuitului. Soluția de regim forțat se găsește atunci prin procedee mai complicate, studiate la cursurile de matematici.

Regimul tranzitoriu și punerea condițiilor inițiale : În circuitele cu regim liber amortizat, se numește *regim tranzitoriu* regimul variabil de trecere de la o anumită stare inițială (rezultată de obicei în urma unei perturbații — cum ar fi închiderea unui întreruptor) la un anumit regim permanent. Soluția de regim

---

[1] Se verifică ușor că mărimea τ are dimensiunea timpului :

$$[\tau] = [L]\,[R]^{-1} = [\Phi]\,[I]^{-1}\,[R]^{-1} = [\Phi]\,[U]^{-1} = [T]$$

[2] Uneori se spune impropriu *regim staționar*, ceea ce prilejuiește confuzii cu regimul în care mărimile nu variază în timp.

tranzitoriu a ecuației circuitului e, în acest caz, soluția generală (32.2), în care constantele arbitrare cuprinse în expresia soluției generale de regim liber se determină cu ajutorul condițiilor inițiale.

Înlocuind relațiile (32.3) și (32.6) în relația (32.2), soluția generală a ecuației circuitului studiat este :

$$(t > 0) \quad i\,(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_0}{R} \quad \text{cu } \tau = \frac{L}{R}. \tag{32.8}$$

Condițiile inițiale se stabilesc în felul următor : Înainte de închiderea întreruptorului, și deci și imediat înainte de această operație, adică la $t = 0 - \varepsilon$ (unde ε e o mărime pozitivă arbitrar de mică), curentul în circuit era nul $i\,(0 - \varepsilon) = 0$; în momentul inițial din punctul de vedere al ecuației (32.1), adică imediat după închiderea întreruptorului, la $t = 0 + \varepsilon$, curentul are valoarea inițială $i\,(0 + \varepsilon)$, a cărei cunoaștere e necesară pentru determinarea constantei K din relația (32.8). Valoarea curentului din circuit nu poate avea însă salturi, deoarece acestora le corespund viteze de variație infinite incompatibile cu ecuația circuitului $u_b = Ri + L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ (în care toți ceilalți termeni sînt finiți și deci și $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$). Curentul trece deci continuu prin momentul $t = 0$, adică :

$$i\,(0 - \varepsilon) = i\,(0 + \varepsilon). \tag{32.9}$$

În exemplul studiat $i(0 - \varepsilon) = 0$, așa încît valoarea inițială a curentului după închiderea întreruptorului este nulă :

$$i\,(0) = i\,(0 + \varepsilon) = K + E_0/R = 0.$$

Rezultă de aici $K = - E_0/R$ și se obține soluția căutată pentru curentul din circuit în regimul tranzitoriu care urmează închiderii întreruptorului :

$$\boxed{i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)} \quad (t > 0). \tag{32.10}$$

În figura 32.1, *b* se reprezintă variația în timp a funcțiunilor $u_b\,(t)$, $i\,(t)$, $i_p\,(t)$ și $i_l\,(t)$.

Observații: 1. Teoretic, regimul tranzitoriu durează infinit de mult, deoarece $i_l = 0$ numai pentru $t \to \infty$. Practic, dacă $i_l < 10^{-2} i_p$, se poate considera că $i \approx i_p$, și cum această situație se realizează după un timp de ordinul a $4...5\tau$, rezultă că regimul tranzitoriu durează un timp relativ scurt de la închiderea întreruptorului, și anume de același ordin de mărime cu constanta de timp a circuitului.

Dacă, de exemplu, $L = 0{,}5$ H și $R = 5\ \Omega$ (valori uzuale pentru bobine de inductivități mari), se obține $\tau = 0{,}1$ s și regimul tranzitoriu durează practic o jumătate de secundă, adică regimul permanent se stabilește relativ repede și instrumentele de măsură obișnuite nu-l pot pune în evidență. Constante de timp apreciabile pot apărea numai la bobinele cu miez de fier, care pot avea inductivități mari, realizate cu spire puține, ca rezistența să fie mică. Astfel, la înfășurările de excitație ale alternatoarelor mari, constanta de timp atinge cîteva secunde. Pentru bobinele cu miez de fier, calculul precedent e numai aproximativ, deoarece inductivitățile acestor bobine depind de valoarea curentului (în special la saturația miezului) și circuitul e neliniar.

2. În general, pentru circuite cu regim liber aperiodic (lipsit de oscilații) și monoton descrescător, constanta de timp se poate defini în două feluri : — *a)* prin timpul în care curentul ar atinge valoarea de regim permanent, dacă și-ar păstra viteza inițială de variație, — *b)* prin aria suprafeței cuprinsă între asimptotă și curbă, raportată la diferența dintre valoarea inițială și cea de regim permanent.

În cazul circuitului studiat — şi, în general, ori de cîte ori regimul liber are o variaţie exponenţială — ambele definiţii duc la acelaşi rezultat, şi anume la mărimea τ din relaţia (32.3)

În adevăr, conform primei definiţii, dacă soluţia de regim tranzitoriu $i = I_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ şi-ar păstra viteza iniţială de variaţie $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{I_0}{\tau}$ ar avea forma $i = \frac{I_0}{\tau} t$ şi ar atinge valoarea $i_p = I_0$ pentru $t = \tau$. Segmentul interceptat pe asimptotă de tangenta la curbă şi de ordonata corespunzătoare se mai numeşte *subtangentă* şi este egal în orice punct cu constanta de timp (v. fig. 32.1, *b*). Conform celei de-a doua definiţii, cîtul prin $i_p = i(0) = I_0$ al ariei menţionate este:

$$\frac{1}{I_0}\int_0^\infty (I_0 - i)\,dt = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau \left| e^{-\frac{t}{\tau}} \right|_0^\infty = \tau.$$

32.2. Regimul tranzitoriu de încărcare a unui condensator (circuit RC)

Se consideră un circuit conţinînd în conexiune serie: un condensator de capacitate C, un rezistor, o sursă de t.e.m. constantă E_0 şi un întreruptor, rezistenţa totală a circuitului (a rezistorului, a sursei şi a conductoarelor de legătură) fiind R, iar inductivitatea neglijabilă. Circuitul e la început deschis cu condensatorul descărcat, iar în momentul $t = 0$ se închide cu ajutorul întreruptorului.

Urmînd aceeaşi metodă de rezolvare ca în exemplul precedent, indicăm pe scurt etapele rezolvării, alegînd ca funcţiune necunoscută căderea de tensiune u_C din condensator. T.e.m. în lungul unei curbe închise Γ luată prin conductor şi închisă prin dielectricul condensatorului e dată numai de sursă (inductivitatea fiind neglijabilă):

$$e_\Gamma = \int_\Gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)\, d\mathbf{s} = E_0.$$

Descompunînd integrala pe porţiuni şi folosind pentru partea din conductor legea lui Ohm, rezultă ecuaţia circuitului:

$$E_0 = R\,i + u_C. \tag{32.11}$$

Relaţia obţinută corespunde schemei echivalente din figura 32.2, *a* în care un generator ideal de t.e.m. E_0 aplică tensiunea la borne $u_b = E_0$ unui rezistor ideal de rezistenţă R în serie cu un condensator ideal de capacitate C.

Cu relaţia (31.29) se obţine ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi (de ord. I):

$$E_0 = R\,C\,\frac{du_C}{dt} + u_C \quad (t > 0). \tag{32.12}$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii rezultă:

$$u_C = K\,e^{-\frac{t}{RC}} + E_0. \tag{32.13}$$

În această expresie, tensiunea de regim liber este

$$u_{C_l} = K e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{32.14}$$

cu constanta de timp:

$$\boxed{\tau = C R}, \tag{32.15}$$

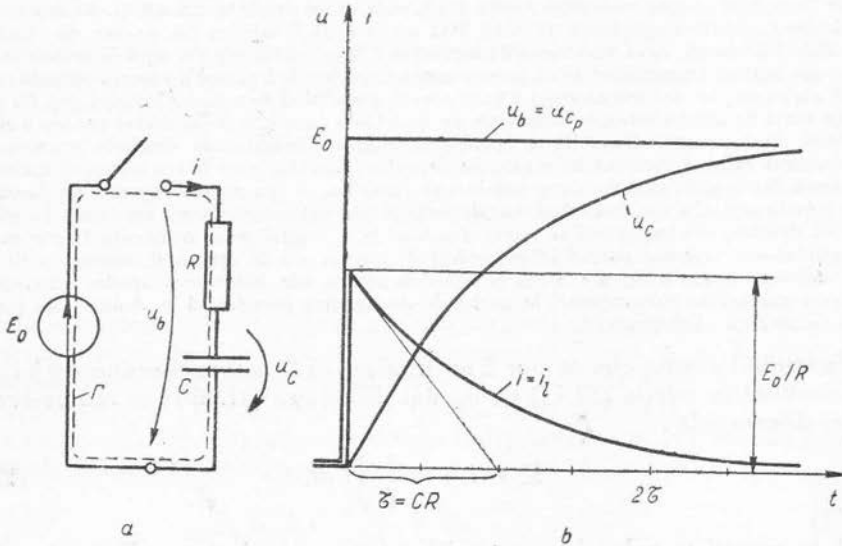


Fig. 32.2.

iar tensiunea de regim permanent este:

$$u_{C_p} = E_0. \tag{32.16}$$

Constanta arbitrară K se determină din condițiile inițiale, observînd că în acest caz nu poate avea salturi tensiunea condensatorului u_C, a cărei derivată trebuie să rămînă finită pentru a rămîne compatibilă cu ecuația (32.12) a circuitului:

$$u_C(0 - \varepsilon) = u_C(0 + \varepsilon). \tag{32.17}$$

Cum presupunem condensatorul descărcat înainte de închiderea întreruptorului $u_C(0 - \varepsilon) = 0$, și deci condiția inițială pentru ecuația circuitului e $u_C(0) = 0$, de unde rezultă $K = - E_0$ și soluția de regim tranzitoriu:

$$\boxed{u_C = E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)} \quad t > 0. \tag{32.18}$$

Cu relația (31.29) se obține curentul de încărcare a condensatorului:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{32.19}$$

În figura 32.2, *b* sînt reprezentate grafic variațiile în timp ale mărimilor u_b (t), $u_C(t)$ și i (t). Se observă că în regim permanent $(t \to \infty)$, curentul se anulează: o tensiune continuă nu poate determina un curent continuu printr-un condensator.

Și în cazul circuitelor *RC* uzuale, constantele de timp sînt foarte mici. Dacă un condensator de mare capacitate, de exemplu, cu $C = 100$ μF se încarcă prin rezistența $R = 100$ Ω, constanta de timp rezultă $\tau = 0{,}01$ s. În acest caz însă se pot obține relativ ușor constante mari de timp dacă se aleg rezistențe foarte mari, ceea ce nu prezintă dificultăți. Același condensator încărcat printr-o rezistență $R = 10$ MΩ are $\tau = 16{,}7$ min cu un curent de încărcare foarte slab. În schimb, dacă rezistența de încărcare e foarte mică (de ex. dacă se reduce la rezistența — de ordinul fracțiunilor de ohm — a conductoarelor de legătură), valorile inițiale $i\,(0) = E_0/R$ ale curenților de încărcare pot fi foarte mari, periclitînd securitatea instalațiilor. De aceea, bateriile mari de condensatoare industriale au rezistoare (sau alte dispozitive) pentru limitarea curentului de încărcare. Dacă după încărcarea unui condensator se deschide întreruptorul, condensatorul rămîne încărcat la tensiunea (eventual înaltă), care îi era aplicată înainte de deschiderea întreruptorului, un timp îndelungat (dacă nu se iau măsuri speciale de descărcare pentru a evita pericolul electrocutării, instalația fiind aparent scoasă de sub tensiune). În adevăr, în circuit deschis, condensatorul se poate descărca lent, numai prin rezistența foarte mare a dielectricului său. Aceasta putînd atinge valori de sute și mii de megohmi, constanta de timp corespunzătoare poate fi de cîteva ore și chiar de cîteva zile. Măsurarea acestei constante de timp (prin măsurarea subtangentei la curba de descărcare) permite să se deducă din formula (32.15) rezistența dielectricului.

În studiul acestui circuit s-ar fi putut alege ca funcțiune necunoscută curentul, înlocuind în relația (32.11) pe u_C dat de relația (31.30′); se obține ecuația integro-diferențială:

$$E_0 = R\,i + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t. \tag{32.20}$$

Astfel de ecuații se reduc la ecuații diferențiale prin derivare. Rezultă, pentru curent, ecuația omogenă:

$$0 = R\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\,i,$$

a cărei soluție de regim permanent de identic nulă și a cărei soluție de regim liber este:

$$i = K'e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Cu condiția inițială $u_C(0) = 0$, din relația (32.11) rezultă $i\,(0) = E_0/R = K'$, adică soluția (32.18). De observat că în cazul acestui circuit valoarea curentului are un salt în momentul inițial:

$$i(0+\varepsilon) - i(0-\varepsilon) = i(0) = \frac{E_0}{R}.$$

Condensatorul fiind inițial descărcat și deci fără tensiune (care poate apărea treptat numai pe măsura încărcării lui) cînd se închide întreruptorul, întreaga tensiune a sursei e preluată de căderea de tensiune rezistivă, ceea ce determină valoarea inițială nenulă a curentului. Derivata curentului neapărînd în ecuația

circuitului, saltul de curent e compatibil cu această ecuaţie. Dacă însă s-ar lua în considerare şi inductivitatea circuitului, curentul ar fi nul în momentul iniţial, aşa cum se arată în exemplu următor.

32.3. Regimul tranzitoriu al unui circuit serie RLC sub tensiune aplicată constantă

Se consideră un circuit analog celui precedent (par. 32.2), cu singura deosebire că i se adaugă în serie o bobină de inductivitate L. T.e.m. în lungul conturului Γ e acum:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)\,\mathrm{d}\mathbf{s} = E_0 - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

astfel încît în locul ecuaţiei (31.43) se obţine ecuaţia:

$$E_0 = R\,i + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C = R\,i + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t. \qquad (32.21)$$

Relaţia obţinută corespunde schemei echivalente din **figura 32.3, *a***, în care un generator ideal de t.e.m. E_0 aplică tensiunea la borne $u_b = E_0$ unui grup de elemente ideale R, L şi C, conectate în serie, astfel încît $u_b = u_R + u_L + u_C$. Cu relaţiile (31.22), (31.26) şi (31.30′) rezultă relaţia (32.21).

Cu relaţia (31.29), alegînd ca variabilă independentă pe u_C, rezultă ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi (de ord. II):

$$E_0 = L\,C\,\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C \qquad (32.22)$$

Folosind notaţiile:

$$\alpha = \frac{R}{2L},\quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},\quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4L} - \frac{1}{LC}} = \mathrm{j}\,\omega_p,\quad \mathrm{j} = \sqrt{-1}, \qquad (32.23)$$

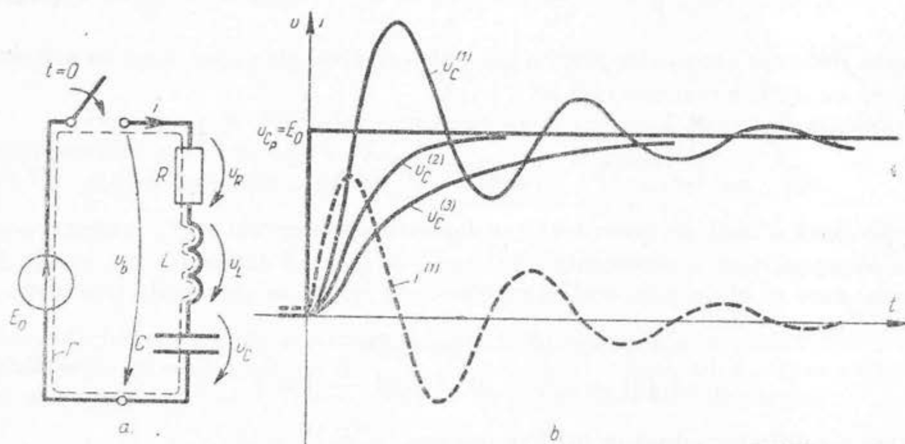


Fig. 32.3.

soluția generală are forma:

$$u_C(t) = u_{C_l}(t) + u_{C_p}(t) = E_0 + u_{C_l}(t), \qquad (32.24)$$

deoarece tensiunea de regim permanent e $u_{C_p} = E_0$. Tensiunea de regim liber u_{C_l} e soluția ecuației omogene

$$\frac{d^2 u_{C_l}}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_{C_l}}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0, \qquad (32.25)$$

cu rădăcinile ecuației caracteristice:

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \beta = -\alpha \pm j\,\omega_p.$$

Tensiunea de regim liber poate avea trei forme distincte, după relațiile care există între parametrii circuitului, respectiv după natura rădăcinilor ecuației caracteristice. Se disting astfel trei clase de circuite, fiecare clasă fiind caracterizată de un anumit tip de regim liber, după cum rezistența R a circuitului e mai mică, egală sau mai mare decît o anumită valoare critică: $R \lesseqgtr 2\sqrt{L/C}$.

1. *Regim liber oscilatoriu amortizat*: În acest caz,

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ adică } \frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ sau } \alpha < \omega_0 \qquad (32.26)$$

și circuitul e subamortizat, numindu-se *circuit oscilant*, deoarece e capabil de oscilații proprii cu pulsația

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{R^2 C}{8L}\right) \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad (32.27)$$

respectiv, cu frecvența

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = f_0 \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} \approx f_0 \left(1 - \frac{R^2 C}{8L}\right) \approx f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \qquad (32.28)$$

numită *frecvența oscilațiilor proprii* (sau libere), ultimele valori fiind cu atît mai exacte, cu cît R e mai mic față de $2\sqrt{L/C}$.

Soluția de regim liber, cu două constante arbitrare, se poate scrie

$$u_{C_l}^{(1)} = A_1 e^{(-\alpha + j\omega_p)t} + A_2 e^{(-\alpha - j\omega_p)t} = K e^{-\alpha t} \sin(\omega_p t + k) \qquad (32.29)$$

și reprezintă o oscilație amortizată cu factorul exponențial $e^{-\alpha t}$, numită oscilație pseudoperiodică. Constantele arbitrare K și k se determină din condițiile inițiale, care se obțin prin același raționament folosit în exemplele precedente:

$$\begin{aligned} u_C(0) &= u_C(0+\varepsilon) = u_C(0-\varepsilon) = 0 \\ i_C(0) &= i_C(0+\varepsilon) = i_C(0-\varepsilon) = 0. \end{aligned} \qquad (32.30)$$

Ultima condiție introdusă în (31.29) impune $\left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = 0$.

Se obține astfel expresia tensiunii u_C, pentru regimul oscilatoriu amortizat:

$$\boxed{u_C^{(1)} = E_0\left[1 - \frac{1}{\sin k}\, e^{-\alpha t} \sin(\omega_p t + k)\right]} \quad (t > 0), \tag{32.31}$$

în care:

$$\sin k = \frac{\omega_p}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{R^2C}{4L}}; \quad \cos k = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

Cu relația (31.29) rezultă curentul:

$$i^{(1)} = C\,\frac{du_C^{(1)}}{dt} = \frac{E_0}{L\omega_p}\, e^{-\alpha t} \sin \omega_p t. \tag{32.32}$$

Evoluția tensiunii condensatorului și a curentului sînt reprezentate în figura 32.3, *b* pentru cazul particular $\alpha \approx \frac{\omega_0}{2\pi}$.

2. *Regim liber aperiodic critic*: În acest caz,

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ adică } \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ sau } \alpha = \omega_0, \tag{32.33}$$

iar $\beta = \omega_p = 0$. Ecuația caracteristică are o rădăcină dublă negativă $r_{1,2} = -\alpha$ soluția de regim liber fiind de forma:

$$u_{C_l}^{(2)} = (K_1 + K_2 t)\, e^{-\alpha t}. \tag{32.34}$$

Constantele arbitrare K_1 și K_2 se determină cu condițiile inițiale (32.30) introduse în soluția generală (32.24). Se obține astfel expresia tensiunii u_C pentru regimul aperiodic critic,

$$\boxed{u_C^{(2)} = E_0\left[1 - (1 + \alpha t)\, e^{-\alpha t}\right]} \quad (t > 0), \tag{32.35}$$

reprezentată grafic în figura 32.3, *b*.

3. *Regim liber aperiodic* (supra-amortizat): În acest caz

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ adică } \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ sau } \alpha > \omega_0, \tag{32.36}$$

iar rădăcinile ecuației caracteristice sînt reale, distincte și negative (mărimea β fiind reală și mai mică decît α) $r_{1,2} = -\alpha \pm \beta$. Circuitul e supra-amortizat și se numește *circuit aperiodic*. Soluția de regim liber este de forma

$$u_{C_l}^{(3)} = A_1' e^{(-\alpha+\beta)t} + A_2' e^{(-\alpha-\beta)t} = K' e^{-\alpha t} \operatorname{sh}(\beta t + k') \tag{32.37}$$

și nu schimbă de semn. Constantele K' și k' se determină cu condițiile inițiale (32.30), introduse în soluția generală (32.24). Se obține astfel expresia tensiunii u_C pentru regimul aperiodic,

$$\boxed{u_C^{(3)} = E_0\left[1 - \frac{1}{\operatorname{sh} k'} e^{-\alpha t} \operatorname{sh}(\beta t + k')\right]} \quad (t > {}_0), \tag{32.38}$$

în care

$$\operatorname{sh} k' = \frac{\beta}{\omega_0} = \sqrt{\frac{R^2C}{4L} - 1}\,; \quad \operatorname{ch} k' = \cos k = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

Evoluția tensiunii condensatorului în acest regim se face mai lent decît în regimul aperiodic critic, care e cel mai rapid dintre toate regimurile aperiodice. Această evoluție e reprezentată grafic în figura 32.3, *b*.

32.4. Concluzii

Exemplele studiate în acest paragraf permit să se formuleze cîteva concluzii cu caracter general:

a) Circuitele electrice filiforme în regim cvasistaționar pot fi studiate pe scheme echivalente cu parametri concentrați, compuse din elemente ideale de circuit: rezistoare, bobine, condensatoare, generatoare [1].

b) La circuitele liniare (cu parametri invariabili) mărimile de stare satisfac ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți, de ordin egal cu numărul elementelor de circuit reactive (bobine și condensatoare) din circuit. În cazuri mai complexe se obțin sisteme de asemenea ecuații. În regim tranzitoriu, funcțiunile de timp care reprezintă aceste mărimi au o componentă de regim liber — soluție generală a ecuației omogene, conținînd un număr de constante arbitrare egal cu numărul elementelor de circuit reactive (bobine și condensatoare), din circuit — și o componentă de regim forțat — soluție particulară a ecuației neomogene.

c) Regimul liber e un regim amortizat, eventual oscilatoriu, care în circuitele obișnuite se stinge în cîteva fracțiuni de secundă. Constantele arbitrare din soluția generală de regim liber se determină prin condițiile inițiale deduse din continuitatea valorilor unor mărimi, ale căror derivate apar în ecuațiile diferențiale ale circuitului. De obicei, aceste mărimi sînt:

— fluxurile rezultante ale bobinelor și, ca urmare, curenții acestor bobine;

— sarcinile condensatoarelor și, ca urmare, tensiunile acestor condensatoare.

(În cazuri speciale, mărimile ale căror valori trec continuu prin momentul inițial se identifică, stabilind incompatibilitatea salturilor lor cu ecuațiile circuitelor.) Numărul ecuațiilor care stabilesc condițiile inițiale e egal cu numărul mărimilor de acest fel, respectiv cu numărul elementelor de circuit reactive din rețea. Acest număr e deci egal cu al constantelor arbitrare care trebuie determinate.

d) Regimul forțat coincide cu regimul permanent pentru circuitele uzuale, alimentate cu tensiuni constante sau periodice, și se determină substituind în ecuațiile neomogene soluții particulare de aceeași formă cu termenii liberi.

În practică, regimul permanent al circuitelor electrice prezintă o importanță foarte mare, deoarece, în majoritatea utilizărilor, se produc tensiuni periodice alternative și în particular sinusoidale. De aceea, regimul permanent sinusoidal constituie principalul obiect de studiu în teoria circuitelor de curent alternativ și pentru acest regim s-au elaborat metode rapide de calcul care vor fi prezentate în capitolele următoare.

[1] Pentru simplificare vom spune uneori: „un circuit compus dintr-o sursă E_0 în serie cu o rezistență R etc., în loc de „un circuit compus dintr-o sursă ideală de t.e.m. E_0 în serie cu un rezistor ideal de rezistență R etc.". Această exprimare — în fond improprie — e foarte răspîndită în tehnică.

33. REGIMUL PERMANENT SINUSOIDAL

Se numesc *circuite de curent alternativ* circuitele electrice alimentate cu tensiuni electromotoare alternative, adică cu tensiuni periodice de valoare medie nulă. Aceste circuite prezintă o importanţă deosebită în tehnică, atît în producerea, transmisiunea şi utilizarea energiei electromagnetice cît şi în electrocomunicaţii, semnalizări şi automatizări, datorită numeroaselor lor avantaje.

Cele mai simple maşini electrice generatoare sînt acelea de curent alternativ, deoarece nu pretind dispozitive suplimentare de comutaţie pentru redresarea curentului, necesare maşinilor obişnuite de curent continuu; prin simpla rotire a unui cadru bobinat într-un cîmp magnetic (v. par. 22.5.3. vol. I) se poate produce o tensiune electromotoare alternativă. Transmisiunea la distanţă a energiei electromagnetice se face cu linii electrice, ale căror pierderi de putere prin efect Joule sînt invers proporţionale cu pătratul tensiunii (v. par. 33.4.5, aplicaţia 2), care — luînd în considerare şi investiţiile pentru construcţia liniei — are o anumită valoare optimă din punct de vedere economic cu atît mai înaltă, cu cît distanţa şi puterea transmisă sînt mai mari; transmisiunea optimă a energiei cere deci să fie posibilă transformarea după voie a tensiunii, ceea ce se poate obţine comod cu ajutorul transformatoarelor (v. par. 22.5.4. vol. I) numai în curent alternativ. Aceasta permite adaptarea optimă a parametrilor transmisiunii de energie şi la necesităţile consumatorilor. Cele mai simple şi mai robuste motoare electrice sînt motoarele asincrone de curent alternativ. Semnalele care fac obiectul transmisiunilor de telecomunicaţii, cum sînt semnalele corespunzătoare vorbirii, muzicii etc., sînt practic suprapuneri de semnale alternative. Producerea şi utilizarea undelor radioelectrice necesită, de asemenea, curenţi alternativi de frecvenţă înaltă.

Curenţii alternativi sînt produşi, de obicei, în circuite liniare, cu constante de timp suficient de mici, pentru ca, practic, imediat după aplicarea tensiunilor alternative de alimentare, să se stabilească regimul permanent. Dacă aceste tensiuni alternative sînt sinusoidale, curenţii de regim permanent din toate laturile circuitului sînt de aceeaşi formă — adică sînt şi ei sinusoidali şi de aceeaşi frecvenţă. Condiţionată de caracterul liniar al ecuaţiilor diferenţiale ale circuitului, această situaţie decurge din proprietatea funcţiunilor sinusoidale de a

fi *singurele funcţiuni alternative reale care îşi păstrează forma prin derivare*. Pentru orice altă variaţie în timp — alternativă — a tensiunilor de alimentare, curenţii au altă formă, în cazul general diferită de la o latură a circuitului la alta, adică prezintă distorsiuni. Totodată, utilizînd analiza armonică a funcţiunilor periodice (Fourier), regimul periodic nesinusoidal al reţelelor electrice liniare poate fi studiat ca o suprapunere de regimuri periodice sinusoidale de diferite frecvenţe. Aceste împrejurări explică întîietatea pe care o are funcţiunea sinusoidală de timp printre toate formele posibile de funcţiuni, care să reprezinte tensiuni periodice aplicate circuitelor în regim permanent — cum şi importanţa practică a studiului circuitelor electrice liniare în regim permanent sinusoidal (numit şi regim permanent armonic).

Observaţie: Reţelele electrice pentru producerea, transmisiunea şi distribuţia energiei electromagnetice sînt astăzi — cu foarte puţine excepţii — reţele de curent alternativ sinusoidal cu frecvenţa standardizată de 50 Hz (în America 60 Hz), numită *frecvenţă industrială*.

Această valoare a frecvenţei a fost aleasă cît mai joasă (dificultăţile producerii şi transmisiunii energiei fiind — în linii generale — cu atît mai mari, cu cît frecvenţa e mai înaltă), dar suficient de mare pentru ca variaţiile intensităţii luminoase a lămpilor cu incandescenţă folosite în iluminatul public să nu fie sesizabile vederii.

33.1. Mărimi variabile şi mărimi sinusoidale. Terminologie

În cele ce urmează vom reaminti unele definiţii cunoscute din teoria oscilaţiilor şi vom prezenta unele proprietăţi şi concepte utilizate în electrotehnică, pentru caracterizarea mărimilor alternative şi sinusoidale (funcţiuni de timp).

33.1.1. Mărimi variabile

Valoare instantanee: valoarea pe care o mărime variabilă o are într-un moment oarecare t; se notează cu litera mică a simbolului stabilit prin convenţie pentru mărimea respectivă.

Notă: În exemplele care urmează se va folosi simbolul i al curentului, deşi proprietăţile exemplificate pot fi ale oricărei alte mărimi.

Mărime periodică: mărime variabilă a cărei succesiune de valori se reproduce în aceeaşi ordine, după trecerea unor intervale de timp egale (fig. 33.1). Valoarea instantanee a unei mărimi periodice e o funcţiune periodică de timp $i(t)$ care, prin definiţie, satisface condiţia

$$i(t) \equiv i(t + T), \qquad (33.1)$$

pentru orice t, în care T e o constantă, numită *perioadă*, egală cu cel mai mic interval de timp, după care se reproduc în aceeaşi ordine caracteristicile fenomenului periodic. Rezultă imediat că $i(t) \equiv i(t + nT)$, unde n e un număr întreg pozitiv sau negativ.

Numărul de perioade cuprins în unitatea de timp se numește *frecvența* (f) a mărimii periodice, iar produsul frecvenței prin 2π se numește *pulsația* sau *frecvența unghiulară* (ω) a mărimii periodice (uneori, frecvența fundamentală, respectiv pulsația fundamentală). Între frecvență, pulsație și perioadă rezultă relațiile :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}; \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}; \quad \omega\, T = 2\,\pi. \tag{33.2}$$

Unitatea de frecvență se numește *hertz* (Hz).

Valoare de vîrf: cea mai mare valoare instantanee atinsă de o mărime periodică în decursul unei perioade; dacă valoarea instantanee este i, valoarea de vîrf se notează $\hat{i}$.

Valoare medie: media aritmetică a valorilor instantanee ale unei mărimi variabile într-un anumit interval de timp :

$$I_{med} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i \mathrm{d}t. \tag{33.3}$$

În cazul mărimilor periodice, cînd nu se menționează explicit altfel, intervalul de timp se consideră egal cu o perioadă T (fig. 33.1, *a*). Valoarea medie a mărimii periodice i se notează cu $\tilde{i}$ sau $\bar{i}$, sau I_0

$$\boxed{\tilde{i} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i \mathrm{d}t}, \tag{33.4}$$

și nu depinde de valoarea inițială t_1 a intervalului. Se va folosi simbolul $\sim$(tilda) plasat deasupra unei expresii cu valori instantanee, pentru a indica operația de calcul a valorii medii a acelei expresii.

Valoarea efectivă (sau *eficace*) a unei mărimi periodice : rădăcina pătrată a mediei pătratelor valorilor instantanee ale unei mărimi periodice în timp de o perioadă :

$$\boxed{I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i^2 \,\mathrm{d}t} > 0}. \tag{33.5}$$

Valoarea efectivă a mărimii periodice i se notează cu litera mare a simbolului mărimii : I (uneori cu I_{ef}). Valoarea efectivă a unui curent periodic e

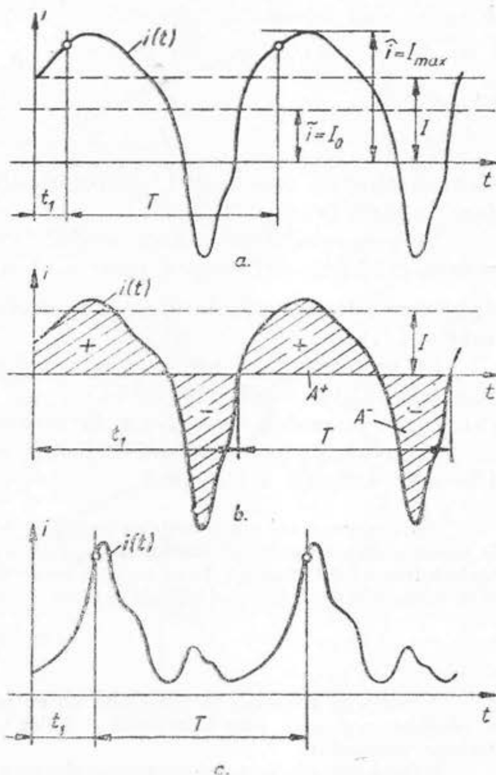


Fig. 33.1.

numeric egală cu intensitatea unui curent continuu, care, străbătînd aceeași rezistență ca și curentul periodic, produce aceeași dezvoltare de căldură în timp de o perioadă. Din cauza inerției echipajului mobil, instrumentele electrice de măsură indicatoare nu pot urmări variațiile instantanee ale mărimilor periodice măsurate. De aceea, ele indică de obicei valori efective (cînd au cuplul instantaneu proporțional cu pătratul mărimii) sau valorii medii (cînd au cuplul instantaneu proporțional cu mărimea).

Mărime alternativă : mărime periodică a cărei valoare medie în cursul unei perioade este nulă (fig. 33.1, *b*) :

$$\tilde{i} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} i \, dt = \frac{1}{T}(A^+ - A^-) = 0.$$

Aici A^+ respectiv A^-, sînt modulele integralelor funcțiunii i pe intervalele în care $i > 0$, respectiv $i < 0$.

Mărime pulsatorie : mărime periodică a cărei valoare instantanee nu schimbă de semn : $i \geqslant 0$ (fig. 33. 1, *c*) sau $i \leqslant 0$.

33.1.2. **Mărimi sinusoidale.** Se numește *mărime sinusoidală* sau *mărime armonică* [1] o mărime alternativă a cărei expresie ca funcțiune de timp poate fi scrisă sub forma „în sinus" :

$$i = I_{max} \sin(\omega t + \gamma), \tag{33.6}$$

în care

$$I_{max} > 0, \ \omega > 0 \text{ și } \gamma \gtrless 0 \tag{33.7}$$

sînt parametrii constanți [2], caracteristici mărimii : amplitudinea, pulsația și faza inițială (v. fig. 33.2).

Se numește *amplitudine* modulul valorii maxime a mărimii sinusoidale și este, evident, coeficientul pozitiv al sinusului în expresia (33.6). Se notează I_{max} sau $\hat{i}$ (uneori, I, dacă acest simbol nu e utilizat pentru valoarea efectivă a mărimii i).

Se numește *fază* argumentul, dependent liniar de timp, al sinusului din expresia (33.6), adică unghiul $(\omega t + \gamma)$. Faza se exprimă totdeauna în radiani (pentru ca formulele de derivare, integrare și dezvoltare în serie să fie cele uzuale).

Se numește *fază inițială* valoarea γ a fazei în momentul inițial ($t = 0$). (Se mai notează α, β, etc.)

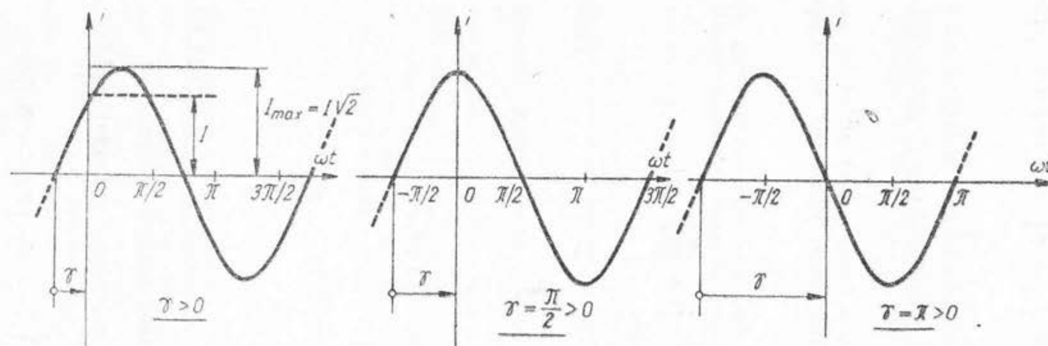
Deoarece sinusul e o funcțiune periodică de argumentul său, cu perioada unghiulară 2π, în absența vreunei precizări suplimentare, faza și faza inițială sînt determinate pînă la un multiplu întreg de 2π. Adăugînd sau scăzînd un multiplu întreg de 2π, se poate întotdeauna aduce faza inițială într-un interval ales de măsură 2π, de exemplu :

$$-\pi < \gamma \leqslant \pi. \tag{33.8}$$

---

[1] Mărimile armonice în acest sens nu au nici o legătură cu *funcțiunile armonice* (soluțiile cu derivate continue, pînă la ordinul al doilea inclusiv, ale ecuației lui Laplace), cu care nu trebuie confundate.

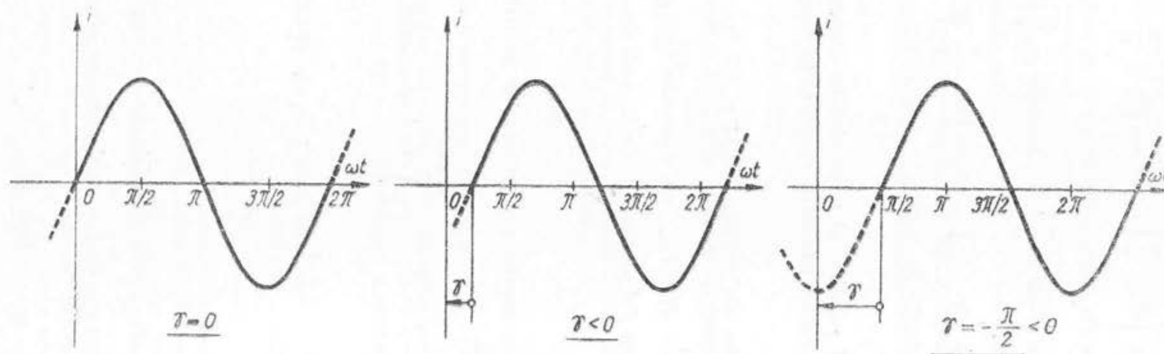
[2] Dacă unii dintre acești parametri sînt lent variabili în timp, mărimea se numește *mărime sinusoidală modulată* sau *mărime cvasisinusoidală*.



a. $i = I_{max} \sin(\omega t + \gamma)$
$= I_{max} \cos(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2})$

b. $i = I_{max} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$
$= I_{max} \cos \omega t$

c. $i = I_{max} \sin(\omega t + \pi)$
$= -I_{max} \sin \omega t$



d. $i = I_{max} \sin \omega t$
$= I_{max} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

e. $i = I_{max} \sin(\omega t + \gamma)$
$= I_{max} \sin(\omega t - |\gamma|)$

f. $i = I_{max} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$
$= -I_{max} \cos \omega t$

Fig. 33.2.

Orice mărime care depinde „în sinus" sau „în cosinus" de o funcțiune liniară de timp poate fi adusă la forma (33.6) cu (33.7) și (33.8), prin modificarea convenabilă a fazei inițiale. Exemple :

$$-10\sin\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)=10\sin\left(3t+\frac{\pi}{2}-\pi\right)=10\sin\left(3t-\frac{\pi}{2}\right);$$

$$10\sin(3t+5\pi)=10\sin(3t+5\pi-2\cdot 2\pi)=10\sin(3t+\pi);$$

$$10\sin\left(-3t+\frac{\pi}{4}\right)=-10\sin\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)=10\sin\left(3t-\frac{\pi}{4}+\pi\right)=10\sin\left(3t+\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$10\cos\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)=10\sin\left(3t-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=10\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right).$$

În figura 33.2 sînt indicate reprezentările grafice ale unor mărimi siunsoidale cu faze inițiale diferite.

Coeficientul pozitiv al timpului în expresia $\omega t+\gamma$ a fazei a fost notat cu ω, deoarece e chiar *pulsația* (frecvența unghiulară) funcțiunii periodice de timp (33.6).

În adevăr, din relațiile (33.1) și (33.2) rezultă că o funcțiune periodică de timp de pulsație ω satisface condiția $i(t)=i(t+2\pi/\omega)$, iar din periodicitatea sinusului rezultă $I_{max}\sin(\omega t+\gamma)=I_{max}\sin(\omega t+2\pi+\gamma)=I_{max}\sin\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\gamma\right]$.

Frecvența f și perioada T ale mărimii sinusoidale sînt deci :

$$f=\frac{\omega}{2\pi}>0,\quad T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega}>0. \tag{33.9}$$

Valoarea medie pe un număr n întreg de perioade a unei mărimi sinusoidale e nulă :

$$\tilde{i}=I_{max}\frac{1}{nT}\int_{t_1}^{t_1+nT}\sin(\omega t+\gamma)\mathrm{d}t=\frac{I_{max}}{2\pi n}\Big|-\cos(\omega t+\gamma)\Big|_{t_1}^{t_1+nT}=$$

$$=\frac{I_{max}}{2\pi n}[\cos(\omega t_1+\gamma)-\cos(\omega t_1+n\overbrace{\omega T}^{2\pi}+\gamma)]$$

adică

$$\tilde{i}=0, \tag{33.10}$$

și de aceea nu poate fi utilizată pentru caracterizarea acestei mărimi.

Valoarea efectivă a unei mărimi sinusoidale se calculează cu relația (33.5) :

$$I^2=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}i^2\,\mathrm{d}t=\frac{I_{max}^2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}\sin^2(\omega t+\gamma)\,\mathrm{d}t=\frac{I_{max}^2}{2T}\int_{t_1}^{t_1+T}[1-\cos(2\omega t+2\gamma)]\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{I_{max}^2}{2T}\int_{t_1}^{t_1+T}\mathrm{d}t-\frac{I_{max}^2}{2}\widetilde{\cos(2\omega t+2\gamma)}=\frac{I_{max}^2}{2},$$

deoarece valoarea medie a funcțiunii sinusoidale $\cos(2\omega t + 2\gamma) = \sin\left(2\omega t + 2\gamma + \frac{\pi}{2}\right)$ de perioadă $\frac{T}{2}$ e nulă.

Se obțin deci relațiile:

$$\boxed{I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}, \quad I_{max} = I\sqrt{2}} \tag{33.11}$$

caracteristice funcțiunilor sinusoidale. În electrotehnică se operează cu valorile efective ale mărimilor sinusoidale, și de aceea aceste mărimi se scriu cu relațiile (33.6) și (33.10), sub forma:

$$\boxed{i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)}, \tag{33.12}$$

cu

$$I > 0, \quad \omega > 0, \quad -\pi < \gamma \leqslant \pi, \tag{33.12'}$$

numită *forma normală în sinus* a mărimii i.

Observații: *a)* Alături de forma normală în sinus e foarte răspîndită — mai ales în literatura anglo-saxonă de specialitate — *forma normală în cosinus*:

$$i = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha), \tag{33.13}$$

care se poate aduce întotdeauna la forma în sinus și reciproc, cu $\alpha = \gamma - \frac{\pi}{2}$. Într-o problemă dată trebuie să se folosească aceeași scriere pentru toate mărimile sinusoidale fie în sinus, fie în cosinus. În acest curs vom folosi exclusiv scrierea (33.12).

b) Schimbarea originii timpului nu afectează valoarea instantanee a mărimii și deci nici faza. Această schimbare afectează faza inițială:

$$I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) = I\sqrt{2}\sin(\omega t^* + \gamma^*),$$

cu

$$t^* = t + t_0, \quad \gamma^* = \gamma - \omega t_0.$$

Cum alegerea originii timpului e arbitrară, rezultă că, într-o problemă dată, fazele inițiale ale tuturor mărimilor sinusoidale conțin un termen aditiv arbitrar, același pentru toate, și numai diferențele relative ale fazelor inițiale au semnificație fizică. De aceea, pentru una dintre mărimile sinusoidale care intervin într-o problemă dată, faza inițială se poate alege arbitrar; *o dată fixată faza inițială a uneia dintre mărimi, fazele inițiale ale tuturor celorlalte mărimi sînt univoc determinate*. Mărimea pentru care se alege faza inițială nulă se numește *origine de fază*.

c) O mărime sinusoidală e complet precizată cînd se dau frecvența, valoarea efectivă și faza inițială. În regim permanent sinusoidal, frecvența e hotărîtă de sursele de alimentare și e aceeași pentru toate tensiunile și toți curenții din rețea. Fiecare dintre aceste mărimi e, în acest caz, caracterizată complet de numai doi parametri: valoarea efectivă și faza inițială:

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows (I, \gamma). \tag{33.14}$$

d) În reprezentarea grafică a mărimilor sinusoidale de aceeași frecvență se preferă să se folosească drept variabilă independentă unghiul ωt (v. fig. 33.2).

Relaţii de fază : Se numeşte *defazaj* între două mărimi sinusoidale, considerate într-o ordine dată, diferenţa fazelor lor în această ordine. Dacă mărimile au aceeaşi frecvenţă, defazajul (pozitiv, negativ sau nul) e egal şi cu diferenţa fazelor lor iniţiale.

Fie

$$i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_1) \text{ şi } i_2 = I_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_2).$$

Defazajul dintre i_1 şi i_2 (în această ordine) e unghiul :

$$\varphi_{12} = (\omega t + \gamma_1) - (\omega t + \gamma_2) = \gamma_1 - \gamma_2 \gtrless 0. \quad (33.15)$$

Se definesc următoarele relaţii de fază (v. şi fig. 33.3) :

$\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 > 0$ — i_1 e defazat înaintea lui i_2 (fig. 33.3, *a*) (33.16)

$\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 < 0$ — i_1 e defazat în urma lui i_2 (fig. 33.3, *b*) (33.17)

$\gamma_1 = \gamma_2, \; \varphi_{12} = 0$ — i_1 şi i_2 sînt în fază (fig. 33.3, *f*) (33.18)

$\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ — i_1 şi i_2 sînt în cuadratură (fig. 33.3, *c* şi *d*) (33.19)

$\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 = \pm \pi$ — i_1 şi i_2 sînt în opoziţie (fig. 33.3,*e*) (33.20)

Observaţii: a) Dacă mărimea i_1 e înaintea mărimii i_2 cu defazajul φ_{12}, atunci mărimea i_2 e în urma mărimii i_1 cu φ_{12}.

b) Deoarece fazele sînt determinate pînă la un termen aditiv multiplu arbitrar de 2π şi defazajul e determinat pînă la un asemenea termen aditiv. De aceea, dacă nu se introduce o restricţie suplimentară, relaţiile de fază „înainte" şi „în urmă" nu au o interpretare unică : cînd i_1 e înaintea lui i_2 cu $\varphi_{12} < 2\pi$, i_1 e totodată în urma lui i_2 cu $\varphi'_{12} = \varphi_{12} - 2\pi$. Pentru a evita o exprimare ambiguă, se reduce totdeauna defazajul la intervalul $(-\pi, +\pi)$, adăugînd sau scăzînd un multiplu de 2π din relaţia (33.15). Cu această precizare, relaţiile de fază (33.16) şi (33.17) au o interpretare unică, iar relaţia de definiţie a defazajului devine :

$$\boxed{\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 + 2\pi n; \; -\pi < \varphi_{12} \leqslant \pi,} \quad (33.21)$$

unde întregul $n \gtrless 0$ se alege astfel ca inegalităţile să fie satisfăcute.

33.1.3. **Operaţii elementare cu mărimi sinusoidale.** Prin anumite operaţii liniare elementare (adică ireductibile unele la altele) efectuate cu mărimi sinusoidale, se obţin mărimi sinusoidale *de aceeaşi frecvenţă.* Aceste operaţii sînt : adunarea, amplificarea (înmulţirea cu un scalar), derivarea şi integrarea, şi sînt singurele care intervin în ecuaţiile diferenţiale ale circuitelor liniare.

a) *Adunarea mărimilor sinusoidale :*

$$i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_1), \; i_2 = I_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_2) \quad (33.22)$$

conduce la mărimea sinusoidală de aceeaşi frecvenţă

$$i = i_1 + i_2 = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma) \quad (33.23)$$

cu valoarea efectivă :

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2 I_1 I_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2)} \quad (33.24)$$

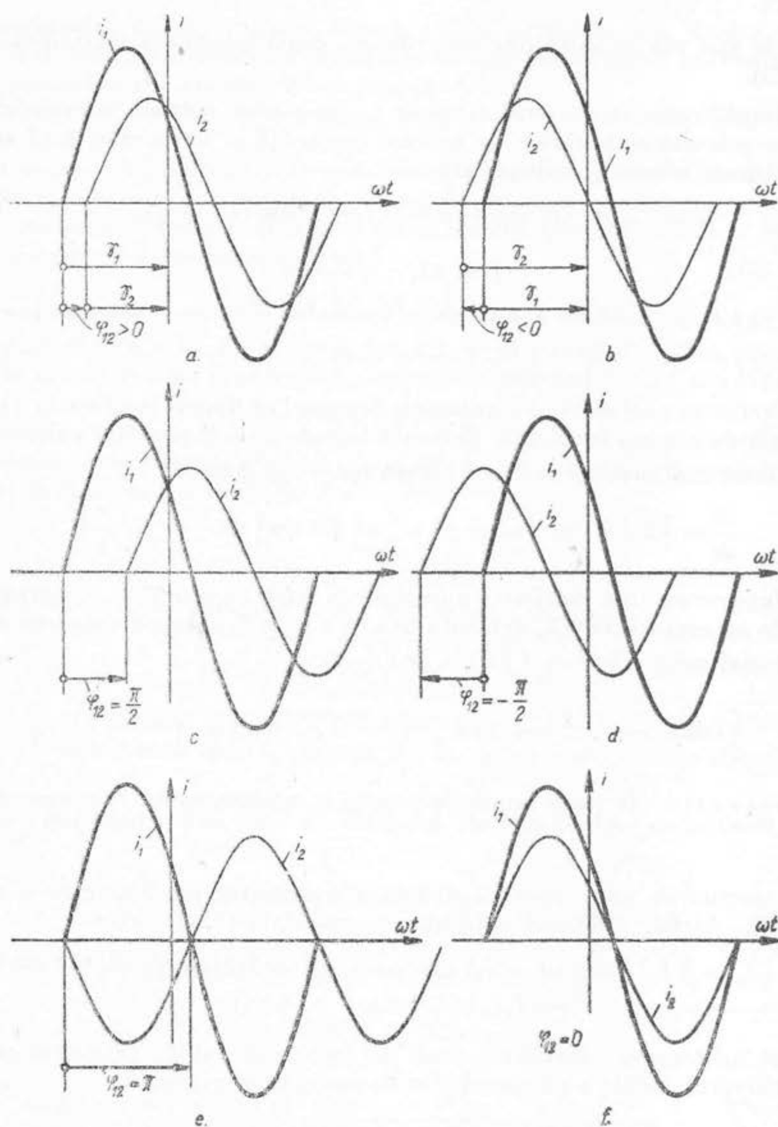

i
i_1
i_2
ωt
τ_1
τ_2
$\varphi_{12} > 0$
a
b
$\varphi_{12} < 0$
$\varphi_{12} = \frac{\pi}{2}$
c
$\varphi_{12} = -\frac{\pi}{2}$
d
$\varphi_{12} = \pi$
e
$\varphi_{12} = 0$
f

Fig. 33.3.

şi cu faza iniţială γ determinată de relaţiile :

$$\sin\gamma = \frac{1}{I}[I_1 \sin\gamma_1 + I_2 \sin\gamma_2]; \ \cos\gamma = \frac{1}{I}[I_1 \cos\gamma_1 + I_2 \cos\gamma_2]. \qquad (33.25)$$

Valorile de mai sus se obţin prin identificare, după înlocuirea mărimilor (33.22) în (33.23).

b) *Amplificarea cu scalarul constant* $\lambda \gtrless 0$ *a unei mărimi sinusoidale* conduce la o mărime sinusoidală de aceeaşi frecvenţă şi de aceeaşi fază iniţială, avînd valoarea efectivă multiplicată cu λ

$$i = \lambda i_1 = \lambda I_1 \sin(\omega t + \gamma_1) = I \sin(\omega t + \gamma), \qquad (33.26)$$

cu

$$I = \lambda I_1; \ \gamma = \gamma_1$$

Observaţie: Scăderea a două mărimi sinusoidale se reduce la operaţiile precedeate :

$$i_1 - i_2 = i_1 + (-1)\cdot i_2. \qquad (33.26')$$

c) *Derivarea unei mărimi sinusoidale în raport cu timpul* conduce la o mărime sinusoidală de aceeaşi frecvenţă, defazată înainte cu $\pi/2$ şi avînd valoarea efectivă de ω ori mai mare. Fie $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$. Atunci :

$$\frac{di}{dt} = \sqrt{2}\, I\omega \cos(\omega t + \gamma) = \omega I \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (33.27)$$

d) *Integrarea unei mărimi sinusoidale în timp* conduce la o mărime sinusoidală de aceeaşi frecvenţă, defazată în urmă cu $\pi/2$ şi avînd valoarea efectivă de ω ori mai mică. Fie $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$.
Atunci :

$$\int i\, dt = -\frac{\sqrt{2}I}{\omega}\cos(\omega t + \gamma) = \frac{I}{\omega}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (33.28)$$

Observaţie: În regim permanent căutăm la integrare numai funcţiunea primitivă *de aceeaşi formă* cu cea iniţială, adică tot sinusoidală; de aceea nu se adaugă nici o constantă arbitrară.

La efectuarea unor operaţii neliniare, rezultatul nu mai este o mărime sinusoidală. Astfel, produsul mărimilor sinusoidale (33.22) este

$$i_1 i_2 = 2\, I_1 I_2 \sin(\omega t + \gamma_1)\sin(\omega t + \gamma_2) = I_1 I_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) - \\ - I_1 I_2 \cos(2\,\omega t + \gamma_1 + \gamma_2) \qquad (33.29)$$

şi conţine un termen constant şi unul de frecvenţă dublă. Termenul constant e chiar valoarea medie a produsului în decursul unei perioade :

$$\boxed{\overline{i_1 i_2} = \frac{1}{T}\int_0^T i_1 i_2\, dt = I_1\, I_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2)}. \qquad (33.29')$$

Valoarea medie pe o perioadă a produsului a două mărimi sinusoidale e egală cu produsul valorilor lor efective, multiplicat cu cosinusul defazajului dintre ele.

33.2. Regimul permanent sinusoidal al circuitelor simple determinat cu metoda substituției soluțiilor sinusoidale

Considerăm diferite circuite simple (adică neramificate), liniare și pasive, cărora li se aplică tensiunea la borne sinusoidală (luată după convenția de asociere a sensurilor de referință de la receptoare) :

$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta). \qquad (33.30)$$

Scriind ecuația diferențială a circuitului cu ajutorul schemei echivalente, alcătuite din elemente ideale de circuit conectate în serie, vom căuta pentru intensitatea curentului soluția de regim permeament (forțat), adică o soluție de aceeași formă cu a tensiunii aplicate :

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma). \qquad (33.31)$$

Anticipînd asupra celor care vor fi dezvoltate în paragraful 33.3, precizăm că *defazajul* între tensiune și curent se notează cu simbolul φ, fără alți indici :

$$\varphi = \beta - \gamma \gtrless 0, \qquad (33.32)$$

iar raportul între valorile efective ale tensiunii și curentului se numește *impedanță* și se notează cu simbolul Z :

$$\frac{U}{I} = Z > 0. \qquad (33.33)$$

Cu aceste notații, curentul de regim permanent se scrie :

$$\boxed{i = \frac{U}{Z}\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta - \varphi).} \qquad (33.34)$$

33.2.1. **Rezistorul ideal** [1] (fig. 33.4). În acest caz, ecuația circuitului e :

$$u = u_r = r\,i = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta).$$

Se obține :

$$i = \frac{u}{r} = \frac{U}{r}\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta). \qquad (33.35)$$

Rezultă cu relațiile (33.33) și (33.32) :

$$\boxed{Z_r = r}\,; \quad \boxed{\varphi_r = 0.} \qquad (33.36)$$

Curentul unui rezistor ideal e în fază cu tensiunea aplicată, și are valoarea efectivă proporțională cu a tensiunii aplicate și independentă de frecvență.

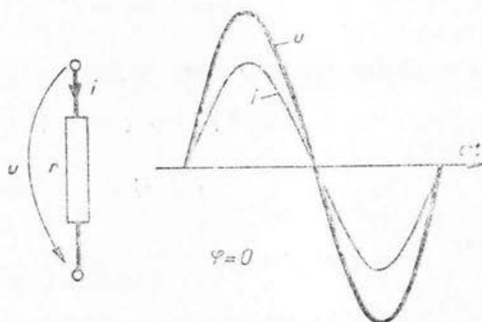


Fig. 33.4.

[1] În cele ce urmează folosim simbolul r pentru rezistența unui rezistor, rezervînd simbolul R pentru rezistența întregului circuit (v. par. 33.3).

33.2.2. Bobina ideală (fig. 33.5). În acest caz, ecuaţia circuitului e (31.26) :

$$u = u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \text{sau} \quad U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Substituind expresia (33.31) rezultă

$$U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta) = L\omega I\sqrt{2}\cos(\omega t + \gamma) = L\omega I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right),$$

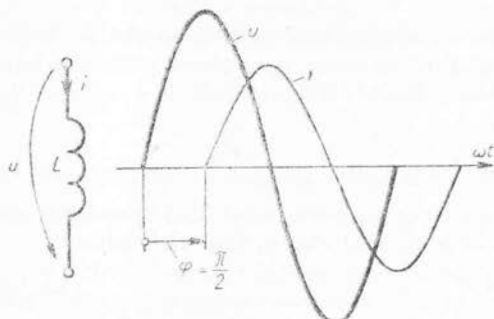


Fig. 33.5.

adică :

$$I = \frac{U}{L\omega} \text{ şi } \gamma = \beta - \frac{\pi}{2}. \qquad (33.37)$$

Se obţine pentru curent expresia :

$$i = \frac{U}{L\omega}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \beta - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (33.37')$$

Rezultă cu relaţiile (33.33) şi (33.32) :

$$\boxed{Z_L = L\omega}; \quad \boxed{\varphi_L = \frac{\pi}{2}}. \qquad (33.38)$$

Curentul unei bobine ideale e defazat în urma tensiunii aplicate cu $\pi/2$, şi are valoarea efectivă proporţională cu a tensiunii aplicate şi invers proporţională cu frecvenţa. Impedanţa unei bobine ideale e egală cu produsul dintre inductivitate şi pulsaţie.La frecvenţe înalte, o bobină blochează trecerea curentului, iar la frecvenţe joase, reprezintă un scurtcircuit.

33.2.3. Condensator ideal (fig. 33.6). În acest caz, ecuaţia circuitului e (31.29) :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta)\right]$$

şi se obţine pentru curent expresia

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) = C\omega U\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta),$$

adică :

$$i = C\omega U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (33.39)$$

iar

$$I = C\omega U \text{ şi } \gamma = \beta + \frac{\pi}{2}. \qquad (33.39')$$

Rezultă cu relaţiile (33.33) şi (33.32) :

$$\boxed{Z_C = \frac{1}{C\omega}}; \quad \boxed{\varphi_C = -\frac{\pi}{2}}. \qquad (33.40)$$

Curentul unui condensator ideal e defazat înaintea tensiunii aplicate cu $\pi/2$ și are valoarea efectivă proporțională cu a tensiunii și proporțională cu frecvența. Impedanța unei bobine ideale e egală cu valoarea reciprocă a produsului dintre capacitate și frecvență.

La frecvențe înalte un condensator reprezintă un scurtcircuit, iar la frecvențe joase blochează trecerea curentului.

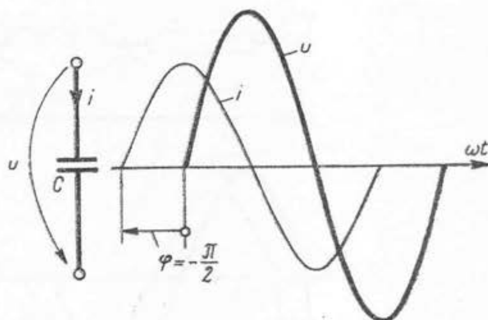


Fig. 33.6.

33.2.4. **Circuit r, L serie** (fig. 33.7, *a*)* Ecuația circuitului este :

$$u = u_r + u_L$$

$$U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta) = ri + L\frac{di}{dt}. \qquad (33.41)$$

Căutind soluția de regim permanent sub forma relației (33.31) și, substituind-o în ecuație, rezultă identitatea (în timp) :

$$U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta) \equiv rI\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) + L\omega I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (33.42)$$

Identitatea trebuie să fie satisfăcută și în acele momente t particulare, în care :

$$\omega t + \gamma = 0 \text{ și } \omega t + \gamma = \frac{\pi}{2}. \qquad (33.43)$$

Înlocuind aceste valori particulare în relația (33. 42), rezultă egalitățile :

$$U\sin(\beta - \gamma) = L\omega I \qquad (33.44)$$

$$U\cos(\beta - \gamma) = rI. \qquad (33.45)$$

Ridicînd la pătrat și adunînd aceste relații, se obține :

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U}{Z}, \qquad (33.46)$$

de unde :

$$\boxed{Z = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \qquad (33.47)$$

e impedanța circuitului r, L serie. Împărțind relația (33.44) și (33.45), se obține :

$$\operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{r}} > 0, \qquad (33.48)$$

cu

$$\sin\varphi = L\omega/Z > 0 \text{ și } \cos\varphi = r/Z > 0. \qquad (33.48')$$

Aceste relații permit calcularea defazajului

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}. \qquad (33.49)$$

Cu relația (33.46) și (33.48), curentul are expresia :

$$i = \frac{U}{\sqrt{L^2\omega^2 + r^2}}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \beta - \operatorname{arc\,tg}\frac{L\omega}{r}\right). \qquad (33.50)$$

Curentul circuitului r, L serie e defazat *în urma* tensiunii (v. fig. 33.7, *b*) cu un unghi crescător cu frecvenţa, care tinde către $\frac{\pi}{2}$, cînd $\omega \to \infty$. Valoarea efectivă a curentului scade monoton cu frecvenţa, tinzînd asimptotic către $I_L = U/\omega L \to 0$ (fig. 33.7, *c*)

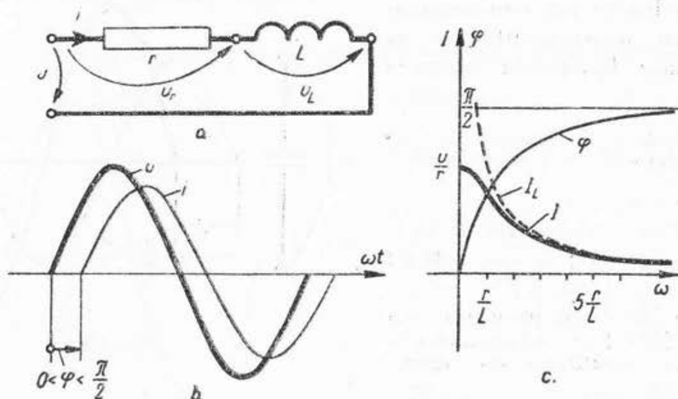


Fig. 33.7.

33.2.5. **Circuit cu** r, **C serie** (fig. 33.8, *a*). Ecuaţia circuitului este:

$$u = u_r + u_C$$

$$U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta) = ri + \frac{1}{C}\int i dt. \tag{33.51}$$

Căutînd soluţia de regim permanent sub forma (33.31) şi substituind-o în ecuaţie, rezultă identitatea (în timp):

$$U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta) \equiv rI\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) + \frac{1}{C\omega} I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right). \tag{33.52}$$

Identitatea trebuie să fie satisfăcută şi în acele momente t particulare, în care:

$$\omega t + \gamma = 0 \quad \text{şi} \quad \omega t + \gamma = \frac{\pi}{2}. \tag{33.53}$$

Înlocuind aceste valori particulare în relaţia (33.52), rezultă egalităţile

$$U \sin(\beta - \gamma) = -\frac{1}{C\omega} I, \tag{33.54}$$

$$U \cos(\beta - \gamma) = rI. \tag{33.55}$$

Ridicînd la pătrat şi adunînd aceste relaţii, se obţine:

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + 1/C^2\omega^2}} = \frac{Z}{U}, \tag{33.56}$$

de unde:

$$\boxed{Z = \sqrt{r^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \tag{33.57}$$

e impedanţa circuitului r, C serie.

Împărţind relaţiile (33.54) şi (33.55), se obţine :

$$\operatorname{tg}(\beta-\gamma)=\boxed{\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{\omega Cr}}<0, \tag{33.58}$$

cu

$$\sin\varphi=-1/C\omega Z<0,\quad \cos\varphi=r/Z>0. \tag{33.58'}$$

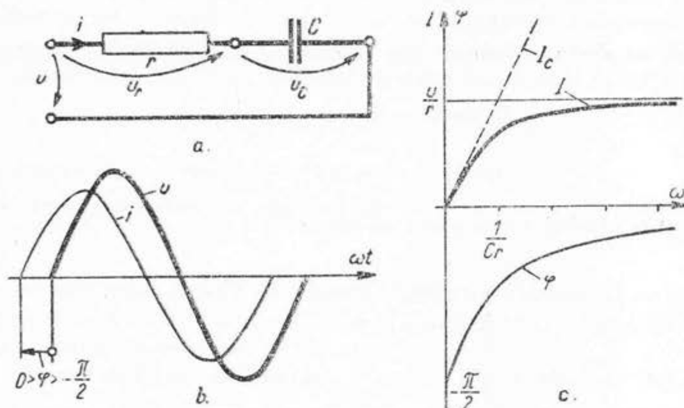


Fig. 33.8.

Aceste relaţii permit calcularea defazajului :

$$0>\varphi>-\frac{\pi}{2}. \tag{33.59}$$

Cu relaţiile (33.56) şi (33.58), curentul are expresia :

$$i=\frac{U}{\sqrt{r^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}}\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\beta+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{rC\omega}\right) \tag{33.60}$$

Curentul circuitului r, C serie e defazat *înaintea* tensiunii (fig. 33.6, *b*) cu un unghi scăzător, cu frecvenţa care tinde către $-\frac{\pi}{2}$, cînd $\omega\to 0$. Valoarea efectivă a curentului creşte la frecvenţe mici ca $I_C=UC\omega$, tinzînd monoton către $I_R=U/r$ (fig. 33.8, *c*), cînd $\omega\to\infty$.

33.2.6. **Circuit** r, L, C **serie** (fig. 33.9). Ecuaţia circuitului cu relaţiile (31.22), (31.26), (31.30') este :

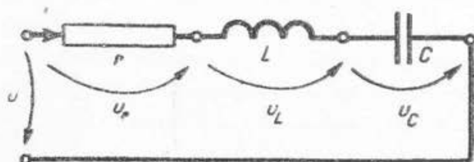


Fig. 33.9.

$$u=u_r+u_L+u_C$$

$$U\sqrt{2}\sin(\omega t+\beta)=ri+L\frac{di}{dt}+$$
$$+\frac{1}{C}\int i dt. \tag{33.61}$$

Căutînd soluția de regim permanent sub forma (33.31) și substituind-o în ecuație, rezultă identitatea (în timp):

$$U\sqrt{2}\,\sin(\omega t+\beta)\equiv rI\sqrt{2}\,\sin(\omega t+\gamma)+L\omega I\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t+\gamma+\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+\frac{I}{C\omega}\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t+\gamma-\frac{\pi}{2}\right). \tag{33.62}$$

Înlocuind pentru t valorile particulare care rezultă din relațiile (33.53), rezultă egalitățile:

$$U\sin(\beta-\gamma)=\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)I \tag{33.63}$$

$$U\cos(\beta-\gamma)=rI. \tag{33.64}$$

Ridicînd la pătrat și adunînd aceste relații, se obține:

$$I=\frac{U}{\sqrt{r^2+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}=\frac{U}{Z}, \tag{33.65}$$

de unde

$$\boxed{Z=\sqrt{r^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \tag{33.66}$$

e impedanța circuitului r, L, C serie. Împărțind relațiile (33.63) și (33.64), se obține:

$$\operatorname{tg}(\beta-\gamma)=\boxed{\operatorname{tg}\varphi=\frac{L\omega-\dfrac{1}{C\omega}}{r}}, \tag{33.67}$$

cu

$$\sin\varphi=\frac{L\omega-\dfrac{1}{C\omega}}{Z}\gtrless 0 \text{ și } \cos\varphi=\frac{r}{Z}. \tag{33.67'}$$

Aceste relații permit calcularea defazajului:

$$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}. \tag{33.68}$$

Cu relațiile (33.65) și (33.67), curentul are expresia:

$$i=\frac{U}{\sqrt{r^2+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t+\beta-\operatorname{arc\,tg}\frac{L\omega-\dfrac{1}{C\omega}}{r}\right). \tag{33.69}$$

Se observă că acest circuit cuprinde, în cazuri particulare, toate circuitele studiate anterior: rezistorul ideal (cu $L \to 0$, $C \to \infty$), bobina ideală (cu $r \to 0$, $C \to \infty$), condensatorul ideal (cu $r \to 0$, $L \to 0$), circuitul r, L (cu $C \to \infty$) și circuitul r, C (cu $L \to 0$).

Exemplele precedente arată că metoda substituției permite determinarea fără dificultăți a curentului de regim permanent. Dacă circuitele sînt mai complexe, ramificate etc., calculele devin însă complicate și nu permit o privire de ansamblu asupra proprietăților calitative ale circuitului. De aceea, în tehnică se folosesc alte metode (v. par. 34) mai sistematice și mai intuitive.

33.3. Caracterizarea circuitelor liniare în regim permanent sinusoidal

Caracterizarea unui circuit de curent alternativ sinusoidal — la o frecvență dată — se poate face cu ajutorul a numai doi parametri. Există diferite moduri de alegere a acestei perechi de parametri.

33.3.1. Impedanța și defazajul. Fie un dipol electric liniar și pasiv (fig. 33.10, *a*), sub tensiunea la borne sinusoidală de frecvență $f = \frac{\omega}{2\pi}$ dată:

$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta). \tag{33.70}$$

Curentul de regim permanent (cu sensul de referință corespunzător regulii de la receptoare) va fi de asemenea sinusoidal și de aceeași frecvență:

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \tag{33.71}$$

și poate fi determinat cu metoda substituției exemplificată în paragraful precedent. În general, $\gamma \neq \beta$ și raportul

$$\frac{u(t)}{i(t)} = f(t) \neq \text{const.} \tag{33.72}$$

e funcțiune de timp: *în curent alternativ, raportul dintre tensiunea la borne instantanee și curentul instantaneu nu mai e o constantă caracteristică circuitului, ca în curent continuu.*

Deoarece circuitul e liniar și pasiv, cînd valoarea efectivă a tensiunii crește de λ ori și valoarea efectivă a curentului crește de λ ori, iar fazele inițiale rămîn neschimbate; de asemenea, dacă la faza inițială a tensiunii se adaugă un termen aditiv, totul se petrece ca și cum s-ar fi schimbat originea timpului, și la faza inițială a curentului se adaugă aceeași cantitate. Rezultă că *raportul valorilor efective și diferența fazelor inițiale ale ten-*

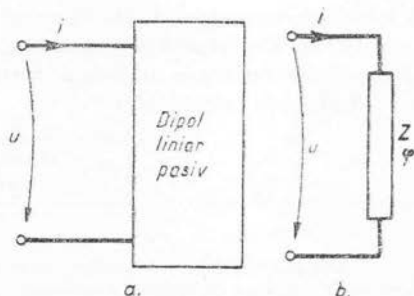


Fig. 33.10.

siunii aplicate și curentului sînt mărimi independente de tensiuni și de curent, proprii pentru a caracteriza circuitul studiat la frecvența de lucru. De aceea, pentru caracterizarea circuitului se definesc :

Impedanța circuitului :

$$\boxed{Z = \frac{U}{I}} = f(\omega; r, L, C, ...) > 0, \tag{33.73}$$

care e totdeauna pozitivă și depinde numai de frecvența $f = \omega/2\pi$ și de parametrii circuitului, și se măsoară în ohmi ca și rezistența;

Defazajul circuitului :

$$\boxed{\varphi = \beta - \gamma} = g(\omega; r, L, C, ...) \gtrless 0, \tag{33.74}$$

care depinde numai de frecvența $f = \omega/2\pi$ și de parametrii circuitului și se măsoară în radiani. Dacă se cunosc Z și φ, curentul i e univoc determinat, deoarece $I = U/Z$ și $\gamma = \beta - \varphi$:

$$i = \frac{U}{Z}\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta - \varphi). \tag{33.75}$$

În exemplele de la paragraful 33.2. au fost determinate impedanțele și defazajele circuitelor simple studiate (v. 33.36, 33.38, 33.40, 33.47 și 33.48, 33.57 și 33.58, 33.66 și 33.67).

Circuitele pasive neconținînd generatoare absorb o putere medie pozitivă (cel mult nulă). Așa cum se va arăta în paragraful 33.4, din această proprietate, rezultă că pentru circuitele pasive :

$$\boxed{\cos\varphi > 0.} \tag{33.76}$$

Defazajul acestor circuite e deci cuprins în intervalul :

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}} \tag{33.77}$$

și e univoc caracterizat de tangenta lui ($\mathrm{tg}\varphi$).

33.3.2. **Rezistența și reactanța.** În locul parametrilor Z și φ se mai folosesc pentru caracterizarea aceluiași circuit parametrii R și X, definiți cum urmează :

Rezistența circuitului [1] :

$$\boxed{R = \frac{U\cos\varphi}{I} = Z\cos\varphi} > 0, \tag{33.78}$$

---

[1] Această mărime nu trebuie confundată cu rezistența definită prin legea conducției electrice (rezistența de curent continuu), cu care coincide numai în cazuri particulare și spre deosebire de care este în general o funcțiune de frecvență. De aceea, rezistența de curent continuu a fost notată mai sus cu r.

unde $U_R = U \cos \varphi$ se mai numește *componenta activă a tensiunii aplicate* (v. mai departe relația 33.116).

Reactanța circuitului :

$$\boxed{X = \frac{U \sin \varphi}{I} = Z \sin \varphi} \gtrless 0, \tag{33.79}$$

unde $U_X = U \sin \varphi$ se mai numește *componenta reactivă a tensiunii aplicate* (v. mai departe relația 33.116).

Dacă se dau rezistența și reactanța, defazajul și impedanța rezultă din relațiile :

$$\text{tg}\, \varphi = \frac{X}{R}, \cos \varphi = \frac{R}{Z}, \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z}, Z = \sqrt{X^2 + R^2}, \tag{33.80}$$

care se rețin ușor cu ajutorul „triunghiului impedanțelor" (fig. 33.11, *a*), iar valoarea instantanee a curentului se scrie :

$$i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \beta - \text{arc tg} \frac{X}{R} \right). \tag{33.81}$$

Rezistența și reactanța se măsoară în ohmi (Ω).

33.3.3. **Admitanța și defazajul.** În locul impedanței se poate folosi pentru caracterizarea circuitului valoarea ei reciprocă, numită :

Admitanța circuitului :

$$\boxed{Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U}} > 0, \tag{33.82}$$

care împreună cu defazajul φ constituie un sistem complet de parametrii caracteristici. Există, evident, relațiile :

$$I = YU; \; Y = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}}; \; R = \cos \varphi / Y; \; X = \sin \varphi / Y, \tag{33.83}$$

iar valoarea instantanee a curentului se scrie :

$$i = U Y \sqrt{2} \sin (\omega t + \beta - \varphi). \tag{33.84}$$

Admitanța se măsoară în *siemens* ($1 \text{ S} = 1 \; \Omega^{-1}$).

33.3.4. **Conductanța și susceptanța.** În locul parametrilor Z și φ, sau R și X,

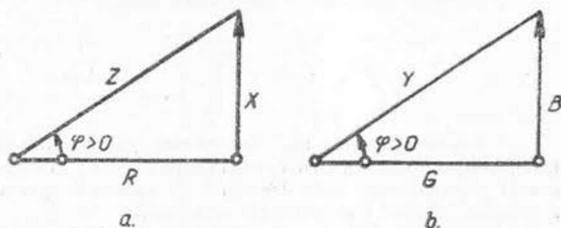


Fig. 33.11.

sau Y și φ, se mai folosesc pentru caracterizarea aceluiași circuit parametrii G și B, definiți cum urmează:

Conductanța circuitului [1]:

$$\boxed{G = \frac{I\cos\varphi}{U} = Y\cos\varphi} > 0. \tag{33.85}$$

unde $I_G = I\cos\varphi$ se numește *componenta activă a curentului.*

Susceptanța circuitului [2]:

$$\boxed{B = \frac{I\sin\varphi}{U} = Y\sin\varphi} \gtrless 0, \tag{33.86}$$

unde $I_B = I\sin\varphi$ se numește ***componenta reactivă a curentului.***

Dacă se dau conductanța și susceptanța, defazajul și admitanța rezultă din relațiile:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{G}{B};\ \cos\varphi = \frac{G}{Y};\ \sin\varphi = \frac{B}{Y};\ Y = \sqrt{B^2 + G^2}, \tag{33.87}$$

care se rețin ușor cu ajutorul „triunghiului admitanțelor" (fig. 33.11, *b*).

Totodată:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{G^2+B^2}};\ G = R/Z^2;\ B = X/Z^2;\ R = G/Y^2;\ X = B/Y^2, \tag{33.88}$$

iar valoarea instantanee a curentului se scrie:

$$i = U\sqrt{G^2 + B^2}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \beta - \mathrm{arc\,tg}\frac{B}{G}\right). \tag{33.89}$$

Conductanța și susceptanța se măsoară în siemens (Ω^{-1}).

33.3.5. **Aplicații:** În exemplele (33.2.1....33.2.6) s-au calculat impedanța și defazajul circuitelor celor mai simple. Calculînd acum și ceilalți parametri, se obțin datele din tabela alăturată, completată cu încă două circuite tip paralel, a căror rezolvare se propune ca exercițiu.

Observații: a) Din examinarea acestei tabele rezultă că rezistența circuitelor de curent alternativ R (33.78) a fost astfel definită, încît să coincidă cu rezistența r a rezistorului la circuitele serie cele mai simple, iar conductanța circuitelor de c.a., G (33.85) a fost astfel definită, încît să concidă cu conductanța $(1/r)$ a rezistorului la circuitele paralel cele mai simple. În paragraful 33.4 vom arăta (relația 33.105) că aceste definiții asigură pentru puterea activă (medie) aceleași expresii ca în curent continuu: $P = R\,I^2 = G\,U^2$. De subliniat că, în general, $Y = \frac{1}{Z}$, dar $G \neq \frac{1}{R}$ și $B \neq \frac{1}{X}$.

b) În aplicații prezintă deosebită importanță următoarele expresii:

Reactanța unei bobine (reactanța inductivă):

$$\boxed{X_L = \frac{1}{L\omega}} > 0. \tag{33.90}$$

[1] Această mărime nu e în general egală cu valoarea reciprocă a rezistenței (33.78) și nu trebuie confundată nici cu conductanța definită în curent continuu cu care coincide numai în cazuri particulare și spre deosebire de care e, în general, o funcțiune de frecvență. De aceea e numită uneori conductanță echivalentă.

[2] Uneori se definește susceptanța astfel încît să aibă semnul opus celei definite aici, pentru a fi egală cu partea imaginară a admitanței complexe (v. par. 34): $B' = -Y\sin\varphi$.

Tabela 33.1.

Nr. crt.	CIRCUITUL	Z	φ	Y	R	X	G	B
1	**Rezistorul ideal**	r	0	$\frac{1}{r}$	r	0	$\frac{1}{r}$	0
2	**Bobina ideală**	$L\omega$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{L\omega}$	0	$L\omega$	0	$\frac{1}{L\omega}$
3	Condensatorul ideal	$\frac{1}{C\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$	$C\omega$	0	$-\frac{1}{C\omega}$	0	$-C\omega$
4	Circuitul r, L serie	$\sqrt{r^2+\omega^2L^2}$	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{L\omega}{r}$	$\frac{1}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}}$	r	$L\omega$	$\frac{r}{r^2+\omega^2L^2}$	$\frac{L\omega}{r^2+\omega^2L^2}$
5	Circuitul r, C serie	$\sqrt{r^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}$	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-1}{C\omega r}$	$\frac{C\omega}{\sqrt{1+r^2C^2\omega^2}}$	r	$-\frac{1}{C\omega}$	$\frac{r}{r^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}$	$-\frac{C\omega}{1+r^2C^2\omega^2}$
6	Circuitul r, L, C serie	$\sqrt{r^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{r}$	$\frac{1}{\sqrt{r^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$	r	$L\omega-\frac{1}{C\omega}$	$\frac{r}{r^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$	$\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{r^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$
7	Circuitul r, L paralel	$\frac{rL\omega}{\sqrt{r^2+L^2\omega^2}}$	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{r}{L\omega}$	$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{L^2\omega^2}$	$\frac{rL^2\omega^2}{r^2+L^2\omega^2}$	$\frac{r^2L\omega}{r^2+L^2\omega^2}$	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{L\omega}$
8	Circuitul r, C paralel	$\frac{r}{\sqrt{1+r^2C^2\omega^2}}$	$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{rC\omega}$	$\frac{1}{r^2}+C^2\omega^2$	$\frac{r}{1+r^2C^2\omega^2}$	$-\frac{C\omega r^2}{1+r^2C^2\omega^2}$	$\frac{1}{r}$	$-C\omega$

Reactanţa unui condensator (reactanţa capacitivă):

$$\boxed{X_C = -\frac{1}{C\omega}} < 0. \quad (33.91)$$

Rezistenţa şi reactanţa circuitului serie r, L, C:

$$\boxed{R = r}\ ; \qquad \boxed{X = L\omega - \frac{1}{C\omega}}. \quad (33.92)$$

c) Parametrii Z, Y, R, X, G, B ai circuitelor depind, în general, de frecvenţa $f = \omega/2\pi$ a tensiunii de alimentare — şi anume cu atît mai complicat, cu cît structura circuitului e mai complicată.

d) Comparînd definiţiile parametrilor circuitelor cu valorile lor din cazul celor mai simple circuite serie sau paralel, mai rezultă că un circuit liniar şi pasiv admite *la o frecvenţă dată* două scheme echivalente:

— *O schemă echivalentă serie*, în care un rezistor de rezistenţă R e conectat în serie cu un element reactiv de circuit de reactanţă X.

— *O schemă echivalentă paralel*, în care un rezistor de rezistenţă $1/G$ e conectat în paralel cu un element reactiv de circuit de reactanţă $1/B$.

33.3.6. Clasificarea circuitelor de curent alternativ sinusoidal. În analogie cu proprietăţile celor mai simple circuite, se foloseşte următoarea terminologie, *valabilă la o frecvenţă dată*:

a) Circuit rezistiv [1], dacă

$$\varphi = 0,\ X = 0,\ B = 0;\ Z = R,\ Y = G. \quad (33.93)$$

Cel mai simplu circuit pur rezistiv (la orice frecvenţă) e rezistorul ideal.

b) Circuit reactiv, dacă

$$\varphi \neq 0, \qquad X \neq 0, \qquad B \neq 0. \quad (33.94)$$

c) Circuit pur reactiv sau *nedisipativ*, dacă

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2},\ R = 0,\ G = 0;\ Z = |X|,\ Y = |B|. \quad (33\text{-}95)$$

d) Circuit inductiv, dacă

$$\varphi > 0,\ X > 0,\ B > 0. \quad (33.96)$$

Circuitul inductiv e un circuit reactiv. Defazajul pozitiv se mai numeşte *defazaj inductiv: curentul e în urma tensiunii.*

e) Circuit pur inductiv, dacă

$$\varphi = \frac{\pi}{2},\ R = 0, \quad G = 0, \quad X = Z, \quad B = Y. \quad (33.97)$$

Cel mai simplu circuit pur inductiv (la orice frecvenţă) e bobina ideală.

f) Circuit capacitiv, dacă

$$\varphi < 0, \quad X < 0,\ B < 0. \quad (33.98)$$

[1] Numit uneori, impropriu, *circuit ohmic*.

Circuitul capacitiv e un circuit reactiv; defazajul negativ se mai numește *defazaj capacitiv : tensiunea e în urma curentului.*

g) Circuit pur capacitiv, dacă

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad R = 0, \quad G = 0, \quad X = -Z, \quad B = -Y. \tag{33.99}$$

Cel mai simplu circuit pur capacitiv (la orice frecvență) e condensatorul ideal.

h) Circuit disipativ, dacă laturile lui au rezistențe nenule, în care au loc pierderi de energie prin efect Joule-Lenz.

Observație: În limbajul tehnic, curent se numește adesea *impedanță* nu numai mărimea Z, ci și dipolul liniar și pasiv caracterizat de această mărime, folosindu-se drept simbol grafic un dreptunghi alb, ca și pentru rezistoare (v. fig. 33.10,*b*). De asemenea se mai numește *reactanță* nu numai mărimea X, ci și elementul de circuit pur reactiv, caracterizat de această mărime.

33.4. Puteri

33.4.1. Putere activă. *Puterea instantanee* la bornele unui dipol electric (v. teorema transferului de putere, relația 31.21')

$$\boxed{p = u\,i} \tag{33.100}$$

este (algebric) putere primită, respectiv cedată, după cum sensurile tensiunii la borne u și curentului i se asociază după regula de la receptoare, respectiv de la generatoare. În cele ce urmează vom considera regula de la receptoare (fig. 33.12, *a*), deși definițiile care urmează sînt valabile și în celălalt caz cu interpretarea respectivă. În regim sinusoidal, înlocuind pe u din relația (33.70) și pe i din relația (33.71), se obține, cu $\varphi = \beta - \gamma$, expresia:

$$p = 2\,UI\sin(\omega t + \beta)\sin(\omega t + \gamma) = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t + \gamma + \beta)^{1} \tag{33.101}$$

Puterea instantanee e deci o mărime periodică, avînd o componentă constantă și o componentă de frecvență dublă. În aplicații interesează numai energia absorbită într-un interval de timp τ, foarte mare față de perioada $T = 2\,\pi/\omega$

$$W_\tau = \int_0^\tau p\,dt = \tau UI\cos\varphi - UI\,\frac{T}{4\pi}\,[\sin(2\omega\tau + \gamma + \beta) - \sin(\gamma + \beta)],$$

respectiv puterea medie absorbită în acest interval:

$$\frac{W_\tau}{\tau} = UI\cos\varphi - \frac{T}{\tau}\cdot\frac{UI}{4\pi}\,[\sin(2\,\omega\tau + \gamma + \beta) - \sin(\gamma + \beta)]. \tag{33.102}$$

Al doilea termen al acestei puteri tinde către zero, cînd $\tau \to \infty$.

---

[1] Conform identității trigonometrice:

$$2\sin a\sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

Se numește *putere activă* și se notează cu P valoarea medie a puterii instantanee p, luată pe un număr întreg de perioade :

$$\boxed{P = \tilde{p} = \frac{1}{nT}\int_0^{nT} p \, dt}. \qquad (33.103)$$

În acest caz, pentru un dipol electric

$$P = \widetilde{ui} = \frac{1}{nT}\int_0^{nT} ui \, dt = \left(\frac{W_\tau}{\tau}\right)_{\tau = nT}. \qquad (33.103')$$

Cu $2\pi\tau = 2\pi n. T$, paranteza dreaptă din (33.102) se anulează și rezultă pentru puterea activă expresia :

$$\boxed{P = U I \cos \varphi} = \frac{U_{max} I_{max}}{2} \cos \varphi. \qquad (33.104)$$

Egalitatea (33.102) arată că puterea medie pe un interval arbitrar de timp τ are valori apropiate de puterea activă, cu abateri de ordinul $\frac{T}{\tau}$, fiind practic egală cu puterea activă, dacă $\tau >> T$. Această condiție e totdeauna realizată în practică, unde intervalele τ cele mai mici în care se apreciază puterea medie sînt de ordinul secundelor și cuprind sute de perioade (la frecvența industrială de 50 Hz). De aceea și aparatele de măsură a puterii, wattmetrele, al căror echipaj mobil nu poate urmări variațiile puterii instantanee cu care e proporțional cuplul lor activ, indică puterea medie, adică puterea activă.

Din relația (33.104) rezultă că *în regim sinusoidal puterea activă a unui dipol electric e egală cu produsul dintre valorile efective ale tensiunii și curentului multiplicat cu cosinusul unghiului de defazaj corespunzător.* Pentru un circuit receptor pasiv, puterea medie e neapărat pozitivă, cel mult nulă (dacă nu conține rezistențe) :

$$P = U I \cos \varphi \geqslant 0. \qquad (33.104')$$

Puterea activă se măsoară, ca și puterea instantanee, în watt (W — unitatea S.I.), kilowatt (1 kW = 10^3W), megawatt (1 MW = 10^6 W), gigawatt (1 GW = = 10^9 W).

Observație: Relația (33.103) e relația generală de definiție a puterii active, valabilă și în regim periodic nesinusoidal și pentru o rețea oarecare; relația (33.104) e relația de calcul a puterii active în regim sinusoidal pentru o rețea cu două borne (în monofazat).

Puterea activă primită de un dipol pasiv e totdeauna pozitivă și se poate exprima cu ajutorul rezistenței și conductanței (v. par. 33.3) :

$$\boxed{P = R I^2 = G U^2} = \frac{R I_{max}^2}{2} = \frac{G U_{max}^2}{2} \geqslant 0. \qquad (33.105)$$

Această expresie e nulă pentru circuitele nedisipative sau pur reactive (v. 33.95) (care deci nu absorb în medie putere din exterior) și e pozitivă pentru circuite disipative.

Expresia (33.101) a puterii instantanee arată că aceasta oscilează cu frecvența unghiulară 2 ω, în jurul valorii ei medii, care e puterea activă (v. fig. 33.12, *b*). Chiar dacă circuitul e un receptor pasiv, cu $P > 0$, există momente în decursul unei perioade, cînd puterea instantanee primită e negativă, adică e în fapt cedată spre exterior. În acele momente, energia acumulată

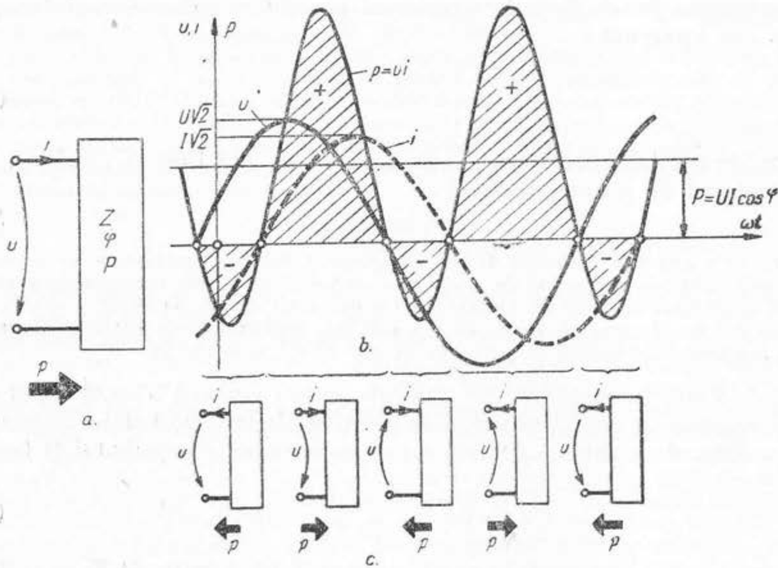


Fig. 33.12.

în cîmpul magnetic al bobinelor sau în cîmpul electric al condensatoarelor e parțial restituită sursei de alimentare. În figura 33.12, *c* se indică sensurile instantanee reale ale tensiunii curentului și puterii în diferite momente ale unei perioade.

33.4.2. Puterea aparentă. Factorul de putere. Se numește *putere aparentă* a unui dipol electric mărimea definită de produsul pozitiv al valorilor efective ale tensiunii și curentului, notat cu S (sau P_{ap}):

$$\boxed{S = U I} = \frac{U_{max} I_{max}}{2} > 0. \qquad (33.106)$$

Puterea aparentă se măsoară în: volt-amper (VA — unitate S.I.), kilovolt-amper (1 kVA = 10^3 VA), megavolt-amper (1 MVA = 10^6 VA), gigavolt-amper (1 GVA = 10^9 VA).

Puterea aparentă a unui dipol pasiv se poate exprima cu ajutorul impedanței și admitanței sub forma:

$$\boxed{S = ZI^2 = YU^2} = Z\frac{I^2_{max}}{2} = Y\frac{U^2_{max}}{2}. \qquad (33.107)$$

Puterea aparentă e o putere calculată „ca în curent continuu", fără a lua în considerație influența defazajului. Fără a avea semnificația energetică nemijlocită ca putere activă, puterea aparentă e importantă, deoarece reprezintă *valoarea maximă a puterii active*, la valori efective invariabile ale tensiunii și curentului și la defazaj variabil. După cum mașinile și aparatele elec-

trice sînt caracterizate prin valori maxime admisibile ale curentului (ca pierderile prin efect Joule în conductoare să nu determine o încălzire excesivă) și tensiunii (ca izolația să nu se străpungă), puterea aparentă caracterizează limitele lor de funcționare și se indică de obicei pe plăcuța de fabricație respectivă.

Se numește *factor de putere* raportul pozitiv și subunitar dintre puterea activă și cea aparentă :

$$1 \geqslant \boxed{k_p = \frac{P}{S}} \geqslant 0. \qquad (33.108)$$

În regim sinusoidal pentru un dipol electric, cu (33.104) și (33.106), rezultă pentru factorul de putere expresia :

$$k_p = \cos\varphi. \qquad (33.109)$$

Pentru ca o anumită instalație de putere aparentă dată să funcționeze cu maximum de putere activă, adică cu maximum de eficacitate, factorul de putere corespunzător trebuie să fie cît mai mare (mai apropiat de unitate), adică defazajul trebuie să fie cît mai mic. De aici rezultă una din problemele tehnico-economice cele mai importante ale gospodăriei energetice : problema ameliorării factorului de putere (v. și par. 33.4.5. aplicația 2).

33.4.3. **Puterea reactivă** : Se numește *putere reactivă* a unui dipol electric mărimea definită de produsul valorilor efective ale tensiunii și curentului multiplicat cu sinusul unghiului de defazaj și se notează cu simbolul Q (sau P_r) :

$$\boxed{Q = UI\sin\varphi} = \frac{U_{max}I_{max}}{2}\sin\varphi \gtrless 0. \qquad (33.110)$$

Puterea reactivă se măsoară în var [1] (unitate S.I.), kilovar (1 kvar $= 10^3$ var), megavar (1 Mvar $= 10^6$ var), gigavar (1 Gvar $= 10^9$ var).

Între puterea aparentă, puterea activă și puterea reactivă există relațiile :

$$P^2 + Q^2 = S^2;\ Q = P\,\mathrm{tg}\,\varphi;\ P = S\cos\varphi;\ Q = S\sin\varphi \qquad (33.111)$$

(care se rețin ușor cu ajutorul „triunghiului puterilor" — fig. 33.13). Puterea reactivă primită de un dipol pasiv — pozitivă la circuitele inductive, negativă la circuitele capacitive — se poate exprima cu ajutorul reactanței și susceptanței (v. par. 33.3) sub formele :

$$\boxed{Q = XI^2 = BU^2} = X\frac{I_{max}^2}{2} = B\frac{U_{max}^2}{2} \gtrless 0 \qquad (33.112)$$

și e nulă pentru circuitele rezistive.

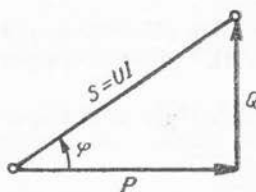


Fig. 33.13.

Privitor la sensul de transmisiune real al puterii reactive facem următoarele precizări : La circuitele receptoare (la care u și i sînt asociați după regula de la receptoare)

— dacă $Q = UI\sin\varphi > 0$ — puterea reactivă e absorbită de la rețeaua exterioară

— dacă $Q = UI\sin\varphi < 0$ — puterea reactivă e cedată rețelei exterioare

La circuitele generatoare (la care u și i sînt asociați după regula de la generatoare) :

[1] Denumirea „var" provine de la inițialele cuvintelor din expresia volt-amper-reactiv și a fost adoptată internațional de C.E.I. (Comisia Electrotehnică Internațională) la propunerea delegatului țării noastre, regretatul acad. prof. C. Budeanu.

— dacă $Q = UI \sin \varphi > 0$ — puterea reactivă e cedată reţelei exterioare
— dacă $Q = UI \sin \varphi < 0$ — puterea reactivă e absorbită de la reţeaua exterioară.

Cum în cazul unor circuite capacitive ($X < 0$), şi în particular al unor condensatoare, $Q < 0$ (cu regula de la receptoare), rezultă că aceste circuite (şi în particular condensatoarele) sînt producătoare de putere reactivă; în mod corespunzător, circuitele inductive ($X > 0$) — şi în particular bobinele — sînt consumatoare de putere reactivă.

Observaţie: a) Puterea reactivă a fost introdusă pe baza relaţiei de definiţie (33.110), construită prin analogie cu expresia (33.104) a puterii active — paralelism care se păstrează în toate celelalte relaţii (v. 33.105 şi 33.112). Spre deosebire de puterea activă, puterea reactivă nu are însă interpretarea energetică simplă a acesteia — adică nu corespunde unui aport mediu de energie pe la borne. Cu toate acestea, puterea reactivă prezintă o deosebită importanţă practică, din mai multe motive, dintre care cele mai importante le amintim pe scurt aici:

b) Factorul de putere se poate scrie:

$$k = \frac{P}{S} = \frac{\sqrt{S^2 - Q^2}}{S} = \sqrt{1 - \frac{Q^2}{S^2}}, \tag{33.113}$$

de unde rezultă că problema ameliorării factorului de putere e echivalentă cu problema reducerii puterii reactive (v. şi par. 33.4.5., aplicaţia 2).

c) Aşa cum vom arăta că rezultă din teorema conservării puterilor (v. par. 36.3), suma algebrică a puterilor reactive primită este nulă pentru toate laturile unei reţele izolate. Dacă există o latură care consumă efectiv putere reactivă, trebuie să existe neapărat în reţea cel puţin o altă latură producătoare de putere reactivă. Cu puterile reactive se pot face bilanţuri bazate pe o proprietate de conservare, ca şi cum ar corespunde unei anumite forme de energie specifice (distincte de energia obişnuită care condiţionează bilanţul puterilor active).

d) Puterea reactivă primită de o reţea pasivă e proporţională cu diferenţa dintre valoarea medie a energiei cîmpului magnetic al bobinelor reţelei şi valoarea medie a energiei cîmpului electric al condensatoarelor reţelei (v. rel. 33.123). Aceste energii sînt variabile în timp cu frecvenţa unghiulară 2ω şi cu faze diferite. Dacă valorile lor medii nu sînt egale, înseamnă că variaţiile acestor energii nu se compensează reciproc în cadrul reţelei:

Puterea reactivă reprezintă o măsură a necompensării schimburilor interioare de energie între cîmpul magnetic şi cîmpul electric.

33.4.4. Bilanţul energetic instantaneu al circuitului serie. Considerăm circuitul r, L, C serie (fig. 33.9) şi ecuaţia (33.61), din care, multiplicînd-o cu i, obţinem ecuaţia puterilor. Cu relaţiile (31.27) şi (31.31) rezultă atunci relaţia

$$p = ui = u_r i + u_L i + u_C i = ri^2 + Li\frac{di}{dt} + Cu_C\frac{du_C}{dt}$$

sau

$$p = ui = ri^2 + \frac{d}{dt}(W^{(m)} + W^{(e)}). \tag{33.114}$$

Alegînd pentru simplificare tensiunea ca origine de fază, vom avea:

$$u = U\sqrt{2}\sin \omega t \quad \text{şi} \quad i = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi). \tag{33.115}$$

Tensiunea se poate descompune aditiv, într-un termen în fază cu curentul *(componenta activă a tensiunii instantanee)* şi unul în cuadratură *(componenta reactivă a tensiunii instantanee)*[1]:

$$u = U\cos\varphi\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi) + U\sin\varphi\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{33.116}$$

[1] Această descompunere e *unică*, deoarece se face în baza identităţilor trigonometrice: $\sin a = \sin(a - b + b) = \cos b \sin(a - b) + \sin b \cos(a - b) = \cos b \sin(a - b) + \sin b \sin\left(a - b + \frac{\pi}{2}\right)$.



Folosind această descompunere, puterea instantanee se scrie:

$$p = ui = 2UI\cos\varphi\sin^2(\omega t - \varphi) + 2UI\sin\varphi\sin(\omega t - \varphi)\cos(\omega t - \varphi)$$

sau

$$p = p_R + p_X = \underbrace{UI\cos\varphi}_{rI^2}[1 - \cos 2(\omega t - \varphi)] + \underbrace{UI\sin\varphi}_{XI^2}\sin 2(\omega t - \varphi). \quad (33.117)$$

Se observă din comparaţia relaţiilor (33.114) şi (33.117) că primul termen:

$$p_R = u_r i = ri^2 = rI^2\, 2\sin^2(\omega t - \varphi) = UI\cos\varphi[1 - \cos 2(\omega t - \varphi)] > 0 \quad (33.118)$$

este o putere instantanee pozitivă, rezultată din multiplicarea curentului cu componenta tensiunii în fază cu el. Puterea p_R se numeşte *putere instantanee de pulsaţie*, are valoarea medie egală cu valoarea medie a puterii p, adică cu puterea activă P şi este chiar puterea instantanee dezvoltată în rezistenţa circuitului. Al doilea termen:

$$p_X = (u_L + u_C)\, i = \frac{d}{dt}(W^{(m)} + W^{(e)}) = p - p_R = \overbrace{UI\sin\varphi}^{Q}\sin 2(\omega t - \varphi) \quad (33.119)$$

este puterea instantanee rezultată din multiplicarea curentului cu componenta tensiunii în cuadratură cu el şi se numeşte *putere instantanee oscilantă.* Valoarea medie a puterii p este nulă, iar valoarea ei maximă e chiar puterea reactivă (în modul). Puterea instantanee oscilantă e egală cu viteza de variaţie a energiei instantanee totale (electrice şi magnetice) a circuitului. *Puterea reactivă (în modul) e deci egală cu amplitudinea vitezei de variaţie a energiei acumulate în cîmpul electromagnetic al circuitului.* O altă interpretare a puterii reactive rezultă din (33.112) şi (33.92):

$$Q = XI^2 = (X_L + X_C)\, I^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I^2 = 2\omega\left(\frac{LI^2}{2} - \frac{I^2}{2C\omega^2}\right) \quad (33.120)$$

Valoarea medie a energiei magnetice este:

$$\widetilde{W}^{(m)} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{Li^2}{2}\, dt - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{T}\int_0^T i^2\, dt\right] = \frac{LI^2}{2}, \quad (33.121)$$

conform relaţiei (33.5).

Valoarea medie a energiei electrice este:

$$\widetilde{W}^{(e)} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{Cu_C^2}{2}\, dt = \frac{C}{2}\left[\frac{1}{T}\int_0^T u_C^2\, dt\right] = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{I^2}{C\omega^2}, \quad (33.122)$$

conform relaţiei (33.5) şi (33.39′).

Rezultă:

$$\boxed{Q = 2\omega\,[\widetilde{W}^{(m)} - \widetilde{W}^{(e)}]}\,. \quad (33.123)$$

În consecinţă, puterea reactivă este nulă dacă $\widetilde{W}^{(m)} - \widetilde{W}^{(e)} = 0$. Această situaţie corespunde defazajului $\varphi = 0$.

33.4.5. **Aplicații.** 1. Un motor de c.a monofazat, funcționind sub tensiunea $U = 220$ V, absoarbe o putere activă $P = 2$ kW, sub $\cos\varphi = 0,8$ inductiv. Se calculează parametrii dipolului receptor constituit de motor, puterea reactivă și puterea aparentă.

Cu aceste date se pot calcula succesiv:

Curentul absorbit: $I = \frac{P}{U\cos\varphi} = \frac{2\cdot 10^3}{220\cdot 0,8} = 11,35$ A.

Impedanța motorului: $Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{11,35} = 19,4\ \Omega$.

Rezistența motorului: $R = Z\cos\varphi = 19,4\cdot 0,8 = 15,5\ \Omega$.

Reactanța motorului: $X = Z\sin\varphi = 19,4\cdot 0,6 = 11,65\ \Omega$.

Puterea reactivă absorbită: $Q = UI\sin\varphi = 220\cdot 11,35\cdot 0,6 = 1,5$ kvar.

Puterea aparentă: $S = UI = 220\cdot 11,35 = 2,49$ kVA.

2. O linie bifilară debitează la receptor puterea $P = 20$ kW, sub tensiunea $U = 220$ V și $\cos\varphi = 0,8$ inductiv. Conductorul liniei are o rezistență specifică $\frac{r}{2l} = 3\cdot 10^{-4}\ \Omega$/m și linia are lungimea $l = 100$ m. Să se calculeze pierderile de putere activă ΔP pe linie.

Exprimăm pierderile în funcțiune de datele problemei. Cu relațiile (33.105) și (33.111) rezultă:

$$\Delta P = rI^2 = r\frac{S^2}{U^2} = r\frac{P^2+Q^2}{U^2}. \tag{33.124}$$

Aici $Q = P\operatorname{tg}\varphi = 20\,000\cdot\frac{0,6}{0,8} = 15\,000$ var

$$r = 3\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot 100 = 6\cdot 10^{-2}\ \Omega$$

și rezultă:

$$\Delta P = 6\cdot 10^{-2}\cdot\frac{20^2+15^2}{220^2}10^6 = 774\ \text{W}.$$

Observație: Din relația (33.124) rezultă că dacă se cere transmisiunea unei puteri active P, date cu o linie de rezistență r dată, *pierderile sînt invers proporționale cu pătratul tensiunii și cresc cu pătratul puterii reactive.* Din acest exemplu rezultă necesitatea tensiunilor înalte pentru puteri și distanțe mari (la 380 V, pierderile ar fi fost de trei ori mai mici), cum și importanța ameliorării factorului de putere (la $\varphi = 0$, $Q = 0$ pierderile ar fi fost de 495 W).

34. METODE DE REPREZENTARE SIMBOLICĂ A MĂRIMILOR SINUSOIDALE ȘI UTILIZAREA LOR

La circuitele electrice cu o structură mai complexă, determinarea regimului permanent cu metoda substituției folosită în paragraful 33.2 devine o operație laborioasă, greu de sistematizat, depărtată de metodele familiare electricienilor de la studiul circuitelor de curent continuu (utilizarea sistemelor de ecuații algebrice liniare) și prea puțin intuitivă.

De aceea s-au elaborat numeroase alte metode (v. şi metoda separării puterilor — par. 36.4), dintre care cele mai utilizate sînt însă *metodele de reprezentare simbolică* [1], care consistă în principiu în următoarele :

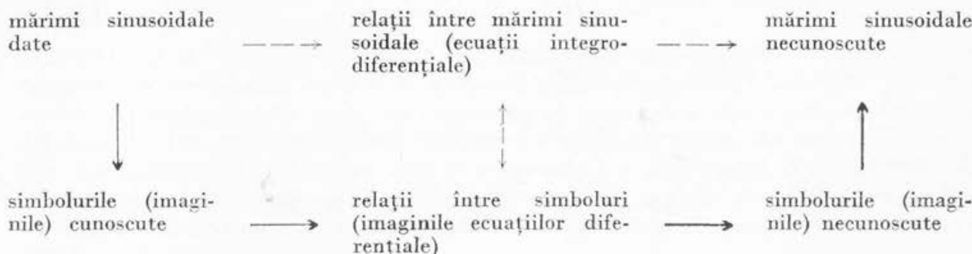
— Utilizînd o anumită regulă de reprezentare (transformare, corespondență), se asociază biunivoc fiecărei mărimi sinusoidale un simbol, numit *imaginea* sau *reprezentarea* mărimii (de ex. un vector în reprezentările geometrice şi un număr complex în cele analitice).

— Se identifică relaţiile dintre simboluri care corespund relaţiilor dintre mărimile sinusoidale, adică ecuaţiilor integro-diferenţiale ale circuitelor.

— În loc să se rezolve direct aceste ecuaţii integro-diferenţiale, se rezolvă relaţiile corespunzătoare dintre simboluri în raport cu simbolurile mărimilor necunoscute.

— Utilizînd regula de reprezentare în sens invers, se determină care sînt mărimile sinusoidale necunoscute, ştiind că trebuie să corespundă simbolurilor determinate anterior.

Schematic, aceste metode se pot prezenta astfel :



Pentru ca această cale de rezolvare — aparent ocolită — să fie avantajoasă, trebuie să fie îndeplinite anumite condiţii :

I. Reprezentarea să fie biunivocă, adică fiecărei mărimi sinusoidale să-i corespundă un singur simbol şi fiecărui simbol să-i corespundă o singură mărime sinusoidală.

II. Transformarea directă (de la mărimea sinusoidală la simbolul ei) şi transformarea inversă (de la simbol la mărimea sinusoidală) să se facă fără dificultăţi de calcul.

III. Fiecăreia dintre operaţiile elementare cu mărimi sinusoidale care intervin în ecuaţiile circuitelor (adunarea, amplificarea, derivarea şi integrarea) să-i corespundă biunivoc o operaţie omologă efectuată cu simboluri. În particular, deoarece pentru simbolurile utilizate (vectori, numere complexe) operaţiile de adunare şi de amplificare (înmulţire cu un scalar) sînt definite în prealabil (independent de problema utilizării lor în metodele de reprezentare simbolică), *trebuie ca adunarea mărimilor sinusoidale să corespundă adunării simbolurilor respective, iar amplificarea unei mărimi sinusoidale cu un scalar să corespundă înmulţirii simbolului cu acelaşi scalar* : reprezentarea trebuie să fie *liniară*.

IV. Calculul cu simboluri să fie mai simplu, mai uşor de sistematizat, sau mai intuitiv decît calculul cu mărimi sinusoidale, acesta fiind însuşi rostul acestor metode.

---

[1] Metode de reprezentare simbolică se utilizează cu succes şi în studiul regimului tranzitoriu (v. cap. 52).

34.1. Reprezentări geometrice

O funcţiune sinusoidală de timp, de frecvenţă dată, e complet caracterizată de două valori scalare : *amplitudinea* (sau valoarea efectivă) şi *faza iniţială*. Un vector liber[1] în plan e complet caracterizat de două valori scalare : *modulul* şi unghiul făcut de orientarea lui cu o axă de referinţă, numit *argumentul* său. În ambele cazuri, obiectul considerat (funcţiune sinusoidală de timp sau vector liber în plan) e complet caracterizat de un număr pozitiv şi de valoarea unui unghi. Se poate deci asocia fără restricţie fiecărei mărimi sinusoidale dintr-o specie dată (curent, tensiune etc.) un vector liber în plan şi reciproc, această asociere fiind biunivocă :

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha) \rightleftarrows \mathcal{F}(i). \quad (34.1)$$

Relaţiilor analitice dintre mărimile sinusoidale le vor corespunde relaţii geometrice între vectorii corespunzători, relaţii care vor fi mai intuitive şi mai uşor de explicitat. Aceasta este ideea fundamentală a reprezentării geometrice a mărimilor sinusoidale, reprezentare introdusă în fizică de Fresnel.

Vectorii reprezentativi $\mathcal{F}(i)$ sînt numiţi *fazori* (uneori vectori de timp), pentru a se preciza distincţia faţă de mărimile fizice vectoriale definite în spaţiul fizic tridimensional (cum este, de exemplu, densitatea de curent **J**), cu care nu trebuie confundaţi.

Planul fazorilor e un plan abstract — mai exact, cîte un plan abstract pentru fiecare specie de mărimi fizice cu variaţie sinusoidală — în care se reprezintă biunivoc mărimi care, din punctul de vedere al spaţiului fizic, sînt mărimi scalare : intensitatea curentului electric, tensiunea electrică etc. Ceea ce se reprezintă prin fazori nu sînt însă *valorile* scalare (instantanee) ale acestor mărimi(care sînt caracterizabile printr-un singur număr, ca orice scalari), ci *funcţiunile sinusoidale de timp* respective (caracterizabile prin cîte doi scalari : amplitudinea şi faza). Ceea ce are deci „o natură vectorială" (în sensul că admite o reprezentare biunivocă pe mulţimea vectorilor liberi din plan) nu este specia de mărimi fizice i (intensitatea curentului electric), ci mulţimea funcţiunilor sinusoidale de timp de forma $I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$.

Deşi limbajul tehnic comun e destul de ambiguu — numindu-se, de exemplu, curent electric atît mărimea sinusoidală cît şi fazorul corespunzător — nu trebuie să se confunde această mărime cu imaginea ei : vectorul $\mathcal{F}(i)$ nu este curentul electric, ci numai îl reprezintă, în cazul particular cînd are o variaţie sinusoidală.

34.1.1. **Reprezentarea cinematică (cu vectori rotitori).** În reprezentarea cinematică, fazorul asociat mărimii sinusoidale e *un vector liber, de modul constant, egal cu amplitudinea mărimii sinusoidale şi de orientare variabilă, care face în fiecare moment t, cu o axă de referinţă fixă* OX_0, *un unghi* (*argumentul*) *egal cu faza mărimii* (fig. 34.1) :

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \overrightarrow{OA} \begin{cases} OA = I\sqrt{2} \\ \sphericalangle AOX_0 = \omega t + \alpha \end{cases} \quad (34.2)$$

[1] Se numeşte *vector liber* un vector al cărui punct de aplicaţie e arbitrar, astfel că reprezintă mulţimea tuturor vectorilor omoparaleli şi de aceeaşi mărime cu el (echipolenţi cu el), avînd diferite puncte de aplicaţie. De obicei se utilizează acelaşi punct de aplicaţie pentru toţi vectorii liberi care intervin într-o problemă dată, afară doar dacă claritatea construcţiilor grafice nu cere contrariul.

Pentru vectorul liber în plan cu modulul A şi cu argumentul α se foloseşte uneori notaţia $A\underline{/\alpha}$. Cu această notaţie, regula reprezentării cinematice se scrie :

$$\boxed{\mathcal{F}(i) = I\sqrt{2}\ \underline{/\omega t + \gamma}} \tag{34.3}$$

Proprietăţi : *a*) Vectorul reprezentativ (fazorul) se roteşte în sensul trigonometric direct cu viteza unghiulară constantă ω. El face mereu un unghi constant (egal cu faza iniţială, $\gamma = \sphericalangle AOX$) cu o axă OX, rotitoare cu aceeaşi viteză şi numită *axa de origine de fază* (pentru că are orientarea vectorilor reprezentativi ai mărimilor sinusoidale luate ca origine de fază). Axa origine de fază face unghiul $\sphericalangle XOX_0 = \omega t$ cu axa de referinţă fixă OX_0. Dacă se reprezintă mai multe mărimi sinusoidale de aceeaşi frecvenţă (v. fig. 34.2), toţi vectorii reprezentativi sînt în repaus relativ. Figura geometrică formată de aceşti vectori împreună cu axa origine de fază se roteşte în ansamblu cu viteza ω în sens direct.

b) Valoarea instantanee a mărimii sinusoidale corespunzătoare unui anumit fazor dat, în momentul t, se poate determina grafic, proiectînd fazorul pe o axă fixă OY_0, rotită cu $\frac{\pi}{2}$ în sens direct faţă de axa de referinţă OX_0 (fig. 34.1) şi numită *axa transversală*.

c) Defazajul $\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2$ al mărimii sinusoidale $i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_1)$ faţă de mărimea sinusoidală $i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_2)$, cu

$$\mathcal{F}(i_1) = I_1\sqrt{2}\ \underline{/\omega t + \gamma_1} = \overrightarrow{OA_1};\quad \mathcal{F}(i_2) = I_2\sqrt{2}\ \underline{/\omega t + \gamma_2} = \overrightarrow{OA_2} \tag{34.4}$$

se reprezintă direct prin unghiul $\sphericalangle A_2OA_1$, format de vectorii reprezentativi respectivi (v. fig. 34.2). Toate unghiurile sînt orientate, sensul de referinţă pozitiv al fazelor şi defazajelor fiind sensul trigonometric direct. Fazorul unei mărimi cu faza iniţială mai mare — adică defazată înainte faţă de o a doua — e rotit în sensul direct faţă de fazorul celei de a doua mărimi. Săgeata defazajului φ_{12} e deci îndreptată de la $\overrightarrow{OA_2}$ la $\overrightarrow{OA_1}$; dacă sensul ei coincide cu sensul direct, $\varphi_{12} > 0$, $(\gamma_1 > \gamma_2)$, iar dacă nu coincide, $\varphi_{12} < 0$, $(\gamma_1 < \gamma_2)$. Posibilitatea reprezentării intuitive directe a defazajelor constituie unul dintre marile avantaje ale reprezentării geometrice.

d) În acelaşi plan se pot reprezenta fazori asociaţi unor mărimi din specii diferite. În acest caz, pentru fiecare specie se foloseşte o altă scară şi nu se pot aduna decît mărimi din aceeaşi specie. De aceea e recomandabil să se diferenţieze diferitele specii prin tipul de linie folosit (groasă, subţire, întreruptă). În figura 34.3 se reprezintă alături de curentul (34.2), tensiunea $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta)$ prin fazorul :

$$\mathcal{F}(u) = U\sqrt{2}\ \underline{/\omega t + \beta} \tag{34.5}$$

Corespondenţa operaţiilor. O dată formulată regula de reprezentare şi proprietăţile ei, trebuie să stabilim cari sînt operaţiile cu fazori corespunzătoare operaţiilor elementare cu mărimi sinusoidale (v. par. 33.1.3.). De proprietăţile acestei transpuneri a operaţiilor depinde întreaga utilitate a metodei. Se demonstrează fără dificultăţi următoarele :

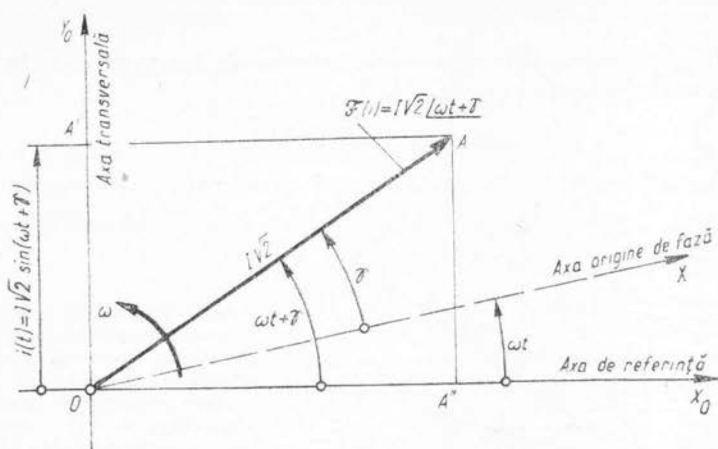


Fig. 34.1.

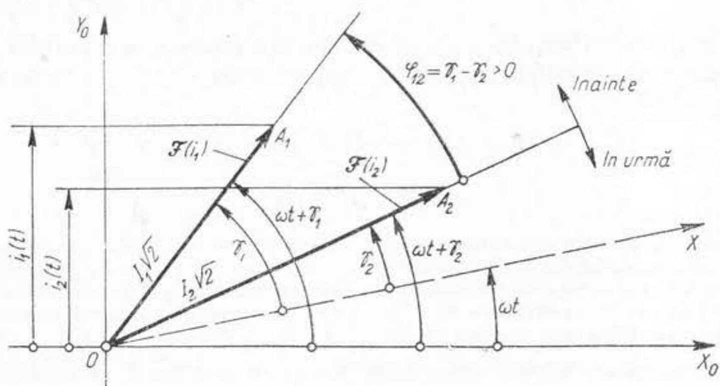


Fig. 34.2.

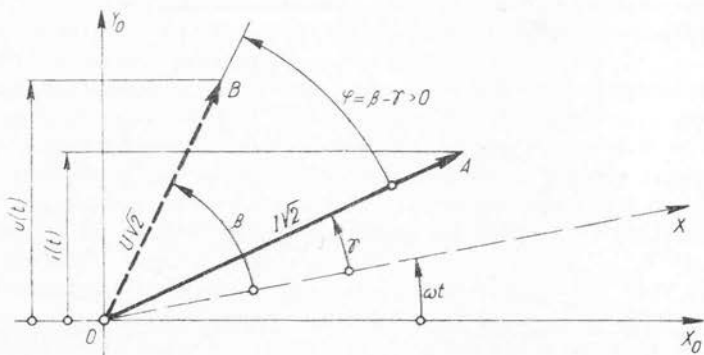


Fig. 34.3.

a) *Adunarea mărimilor sinusoidale corespunde biunivoc cu adunarea vectorială a fazorilor respectivi* (v. fig. 34.4) :

$$i_1 + i_2 \rightleftarrows \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2, \qquad (34.6)$$

adică

$$\mathcal{F}(i_1 + i_2) = \mathcal{F}(i_1) + \mathcal{F}(i_2). \qquad (34.6')$$

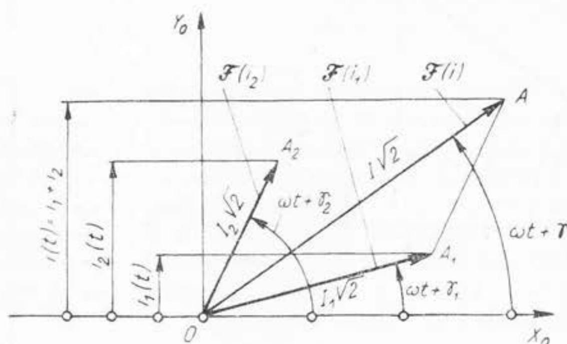


Fig. 34.4.

Această proprietate rezultă imediat, folosind interpretarea mărimilor sinusoidale ca proiecţii pe axa transversală OY a fazorilor şi utilizînd teorema proiecţiilor : „proiecţia sumei mai multor vectori e egală cu suma proiecţiilor". Relaţiile (33.24), (33.25) care dau parametrii sumei a două mărimi sinusoidale coincid cu relaţiile corespunzătoare de la adunarea vectorilor cu regula paralelogramului.

b) *Amplificarea (înmulţirea) unei mărimi sinusoidale cu un scalar real corespunde biunivoc cu amplificarea (înmulţirea) cu acelaşi scalar a vectorului reprezentativ* (fig. 34.5) :

$$\lambda i \rightleftarrows \lambda\overrightarrow{OA} = \lambda I\sqrt{2}\,\underline{/\,\omega t + \gamma}, \qquad (34.7)$$

adică

$$\mathcal{F}(\lambda i) = \lambda\mathcal{F}(i). \qquad (34.7')$$

Această proprietate rezultă imediat din regula de reprezentare (34.2) , care asociază amplitudinea mărimii sinusoidale la modulul vectorului (cu observaţia că dacă $\lambda < 0$, trebuie modificată faza iniţială cu π, ceea ce corespunde inversării sensului vectorului, aşa cum era necesar).

Observaţie: Reprezentarea cinematică este o *reprezentare liniară*, deoarece asigură corespondenţa operaţiilor de adunare şi înmulţire cu un scalar.

c) *Derivarea unei mărimi sinusoidale în raport cu timpul se traduce prin înmulţirea modulului fazorului cu* ω *şi rotirea în sens direct (înainte) cu* $\pi/2$ (fig.34.6) :

$$\frac{di}{dt} \rightleftarrows \omega I\sqrt{2}\,\underline{/\,\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}}, \qquad (34.8)$$

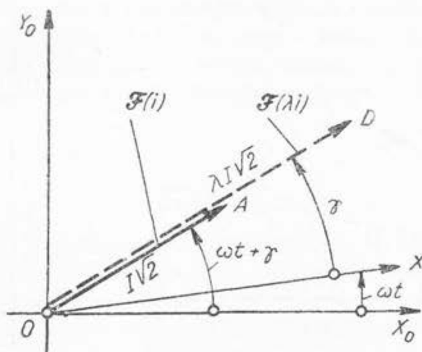


Fig. 34.5.

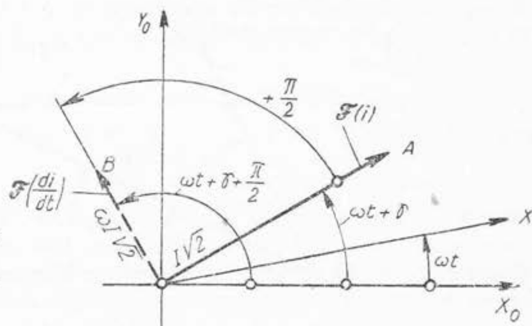


Fig. 34.6.

adică

$$\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) = \omega I\sqrt{2}\,\underline{/\;\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}}. \qquad (34.8')$$

În adevăr, membrul drept e fazorul care corespunde mărimii sinusoidale $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ din relația (33.27). Am găsit astfel corespondentul (biunivoc) al operației de derivare de la mărimi sinusoidale.

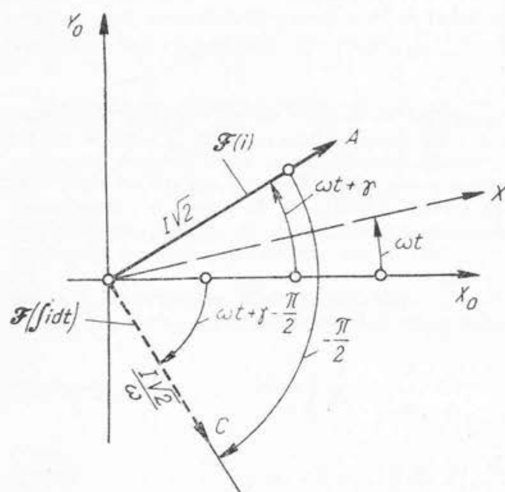


Fig. 34.7.

d) *Integrarea în timp a unei mărimi sinusoidale se traduce prin împărțirea modulului fazorului cu* ω *și rotirea în sens invers (în urmă) cu* $\pi/2$ (fig. 34.7):

$$\int i\,\mathrm{d}t \rightleftarrows \frac{1}{\omega}\,I\sqrt{2}\,\underline{/\;\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}}, \qquad (34.9)$$

adică

$$\mathcal{F}\left(\int i\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{\omega}\,I\sqrt{2}\,\underline{/\;\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}}. \qquad (34.9')$$

În adevăr, membrul drept e fazorul care corespunde mărimii sinusoidale (33.28). Am găsit astfel corespondentul (biunivoc) al operației de integrare de la mărimi sinusoidale.

Deoarece operațiilor elementare cu mărimi sinusoidale, care intervin în ecuațiile diferențiale liniare ale circuitelor, le corespund operații elementare efectuate cu vectori $\left(\text{adunări, amplificări, rotiri cu } \frac{\pi}{2}\right)$, *rezultă că acestor ecuații diferențiale le vor corespunde construcții geometrice* (grafice), consistînd din însumarea unor vectori cu diferite orientări. Aceste construcții geometrice se numesc *diagramele vectoriale* sau *fazoriale* ale circuitelor și reprezintă imaginile ecuațiilor circuitelor în această reprezentare.

Metoda reprezentării cinematice pentru rezolvarea circuitelor liniare de curent alternativ constă deci în următoarele:

1. Se consideră ecuația integro-diferențială a circuitului și se construiește diagrama vectorială corespunzătoare, pornind de la fazorii reprezentativi ai mărimilor sinusoidale asupra cărora se efectuează operațiile reprezentate de diferiți termeni ai ecuației (indiferent de faptul dacă aceste mărimi sînt „necunoscute" sau sînt „datele" problemei).

2. Se construiește fazorul care corespunde termenului liber al ecuației și care — în conformitate cu regula adunării vectorilor — închide poligonul format prin însumarea fazorilor corespunzători diferiților termeni ai ecuației.

3. Se verifică corectitudinea reprezentării tuturor operațiilor și a mărimilor „date", trasîndu-se (dacă e nevoie) axa de origine de fază și axa de referință.

4. Se determină cu metode geometrice (cel mai adesea prin proiecții pe două axe ortogonale) relațiile dintre modulele și argumentele fazorilor mărimilor necunoscute și acelea ale fazorilor mărimilor date.

5. Se explicitează din aceste relații parametrii mărimilor necunoscute (în general, valori efective și defazaje) și se scrie cu acești parametri expresia instantanee pe baza regulii de reprezentare.

Se constată că în această metodă, rezolvarea ecuațiilor integro-diferențiale ale circuitelor în regim permanent sinusoidal revine la determinarea cu metode geometrice — eventual grafice — a unor segmente și unghiuri necunoscute dintr-o construcție grafică.

Observație: Dacă s-ar folosi pentru mărimi sinusoidale forma normală în cosinus (33.13), vectorul reprezentativ ar fi tot (34.3) și toate proprietățile metodei — inclusiv modul de transpunere al operațiilor elementare — ar rămîne neschimbate, cu o singură excepție: determinarea grafică a valorii instantanee s-ar face proiectînd fazorul pe axa de referință OX_0 (segmentul OA'' în fig. 34.1). În acest caz, γ ar fi faza inițială de la forma în cosinus, notată în relația (33.13), cu α. Toate mărimile sinusoidale care intervin în aceeași problemă trebuie scrise într-un singur mod, în sinus sau în cosinus; în caz contrar, *interpretarea* diagramei (care nu depinde de această scriere) se face greșit.

34.1.2. **Aplicație.** Circuitul serie r, L, C. Exemplificăm metoda reprezentării cinematice prin rezolvarea circuitului serie r, L, C studiat cu metoda substituției în paragraful 33.2.6. Ecuația circuitului e (33.61):

$$U\sqrt{2}\sin(\omega t+\beta)=ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int i\,dt, \tag{34.10}$$

funcțiunea necunoscută fiind curentul:

$$I\sqrt{2}\sin(\omega t+\gamma)=\frac{U}{Z}\sqrt{2}\sin(\omega t+\beta-\varphi). \tag{34.11}$$

Deoarece adunării și amplificării mărimilor sinusoidale le corespund adunarea și amplificarea vectorilor, diagrama corespunzătoare ecuației (34.10) — adică imaginea acestei ecuații — exprimă următoarele: fazorul tensiunii este o sumă de trei termeni, dintre care primul e fazorul curentului amplificat cu r, al doilea e fazorul derivatei curentului amplificat cu L, iar al treilea e fazorul integralei curentului amplificat cu $\frac{1}{C}$.

Ținînd seama de regulile (34.8) și (34.9) ale derivării și integrării, însumarea aceasta se poate efectua grafic (fig. 34.8), pas cu pas, pornind de la un vector arbitrar $\overrightarrow{OA}$, ales pentru fazorul necunoscut al curentului (reprezentăm curentul cu linie întreruptă și căderile de tensiune cu linii pline): adunăm vectorial fazorul $\overrightarrow{OB}$ al curentului amplificat cu r, (ri) — cu fazorul $\overrightarrow{BC}$ al curentului rotit înainte cu $\frac{\pi}{2}$ și amplificat cu $L\omega$ $\left(L\frac{di}{dt}\right)$ — și cu fazorul $\overrightarrow{CD}$ al curentului rotit în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ și amplificat cu $\frac{1}{C\omega}$ $\left(\frac{1}{C}\int i\,dt\right)$. Conform ecuației (34.10), suma $\overrightarrow{OD}$ a acestor trei fazori trebuie să fie fazorul tensiunii u. Am obținut diagrama circuitului serie r, L, C. Putem acum trasa axa de referință OX_0, formînd unghiul $\omega t+\beta$ în urmă față de fazorul tensiunii. Unghiul format de fazorul tensiunii cu fazorul curentului este chiar defazajul $\varphi=\beta-\gamma=(\omega t+\beta)-(\omega t+\gamma)$ dintre tensiune și curent. Din triunghiul dreptunghic OBD se deduce imediat:

$$(U\sqrt{2})^2=(rI\sqrt{2})^2+\left(L\omega I\sqrt{2}-\frac{1}{C\omega}I\sqrt{2}\right)^2$$

$$U^2=I^2\left[r^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2\right],$$

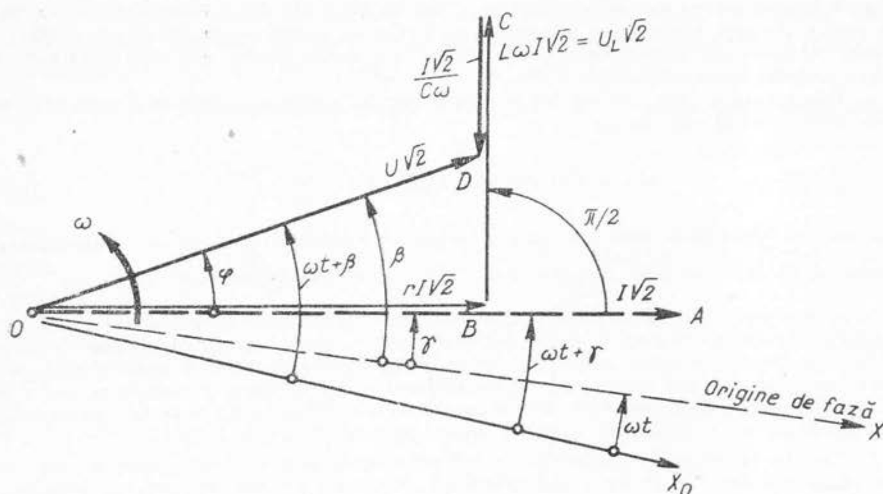


Fig. 34.8.

adică:

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \tag{34.12}$$

și

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{L\omega I\sqrt{2} - \frac{1}{C\omega} I\sqrt{2}}{rI\sqrt{2}} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r} \tag{34.13}$$

(deoarece pe desen a rezultat φ în sens direct, semnul obținut pentru defazaj din calculul geometric e cel corect. Dacă din construcția grafică, săgeata lui φ, dirijată de la curent la tensiune, ar fi rezultat în sens invers, ar fi trebuit să schimbăm semnul). Rezultatele obținute sînt cele cunoscute, relația (33.66) și (33.67) de la aplicarea metodei substituției.

Observații: *a*) Cu metoda reprezentării cinematice se obține o privire de ansamblu intuitivă asupra proprietăților circuitului și, în special, asupra relațiilor de fază. Putem urmări, de exemplu, fără dificultăți modul cum se modifică diagrama — cînd frecvența crește, cînd rezistența *r* scade etc. Avantajul principal al reprezentărilor geometrice constă în această posibilitate de a putea aprecia repede, intuitiv, proprietăți calitative ale circuitului.

b) După construirea diagramei și găsirea valorilor necunoscute se poate scrie direct valoarea instantanee a oricăreia dintre mărimile sinusoidale care apar în circuitul considerat. De exemplu, în cazul circuitului din figura 34.8, căderea de tensiune din bobină este:

$$u_L = U_L\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right) = L\omega I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \beta - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \tag{34.14}$$

c) Metoda reprezentării cinematice se poate utiliza și în cazul cînd în circuitul liniar studiat se întîlnesc mărimi sinusoidale de frecvențe diferite, datorită faptului că tensiunea aplicată e o suprapunere de mai multe tensiuni sinusoidale (v. și cap. 48). În acest caz, metoda se aplică pentru fiecare grup de componente de aceeași frecvență în parte, cu observația că unghiurile formate de fazori cu frecvențe diferite nu mai sînt constante.

d) Produsul a două mărimi sinusoidale (v. rel. 33.29), nefiind o mărime sinusoidală, nu se poate reprezenta prin fazori după această metodă. *Pentru acelaşi motiv, metoda nu e aplicabilă circuitelor neliniare sau parametrice, în care operaţiile efectuate asupra unor mărimi sinusoidale conduc la mărimi nesinusoidale.*

e) Reprezentarea prin vectori rotitori după regulile (34.2), (34.3) se utilizează şi pentru mărimi nesinusoidale de forma:

$$y(t) = Y(t) \sin \Phi(t) \rightleftarrows Y(t) \underline{/\Phi(t)}\,, \tag{34.15}$$

numite *mărimi sinusoidale modulate* (mărimi armonice modulate) sau *mărimi cuasisinusoidale* (cuasiarmonice), în cazul cînd „amplitudinea" $Y(t)$ şi „pulsaţia instantanee" $\Omega(t) = \dfrac{d\Phi(t)}{dt}$, definită ca derivată a „fazei" $\Phi(t)$, sînt funcţiuni lent variabile în timp. În acest caz, poziţia relativă a vectorilor rotitori este şi ea lent variabilă în timp. Reprezentarea rămîne liniară, adică imaginea sumei e suma imaginilor (34.6), iar imaginea produsului unei mărimi cu un scalar e produsul prin acel scalar al imaginii mărimii — dar *derivarea şi integrarea nu se mai traduc prin operaţiile (34.8) şi (34.9)*. De aceea, metoda reprezentării cinematice pentru *rezolvarea* circuitelor nu e aplicabilă decît în regim permanent sinusoidal.

f) Practic, în aplicaţii, construcţia grafică corespunzătoare acestei metode se poate simplifica, eliminînd tot cea ce nu e util calculului geometric propriu-zis: rotaţia ansamblului diagramei cu viteza ω în sens direct şi factorul parazit $\sqrt{2}$. Altfel spus, putem presupune că diagrama e considerată din punctul de vedere al unui observator mobil, care se roteşte o dată cu ea şi care lucrează cu valorile efective în locul amplitudinilor[1], reducînd diagrama la scara $1/\sqrt{2}$. Se ajunge astfel la *metoda reprezentării polare*, aplicabilă numai în probleme în care intervin mărimi de aceeaşi frecvenţă şi prezentată în continuare.

34.1.3. **Reprezentarea polară (cu vectori ficşi).** În reprezentarea polară, fazorul asociat mărimii sinusoidale e un vector liber fix, de modul egal cu valoarea efectivă a mărimii sinusoidale şi de argument egal cu faza iniţială a mărimii (fig. 34.9):

$$i = I\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows I\underline{/\gamma}, \tag{34.16}$$

adică:

$$\boxed{\mathcal{F}(i) = I\underline{/\gamma}}\,. \tag{34.16'}$$

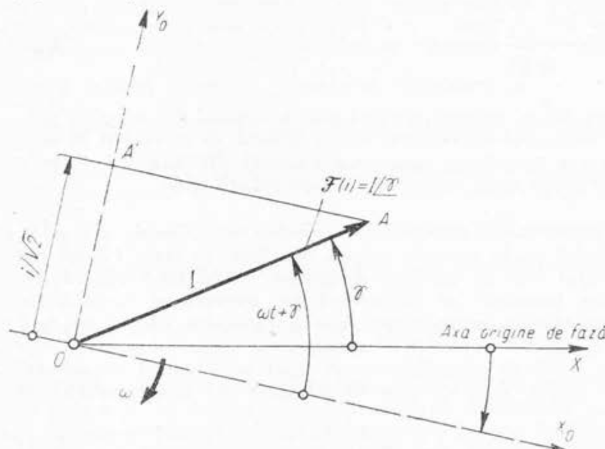


Fig. 34.9.

În această reprezentare, fazorii sînt deci imobili, au lungimi egale cu valorile efective ale mărimilor şi fac cu axa fixă a originii de fază unghiuri egale cu fazele iniţiale. *Imaginea* conservă acum din mărimea sinusoidală numai elementele

[1] Această ultimă simplificare nu e necesară, dacă valorile efective nu apar explicit în expresia mărimilor sinusoidale, adică dacă simbolurile majuscule reprezintă chiar amplitudinile.

care o individualizează în raport cu celelalte de aceeași frecvență : *valoarea efectivă și faza inițială.* Defazajul a două mărimi se reprezintă, ca și mai înainte, prin unghiul format de fazorii respectivi. De astă dată, pentru a obține valoarea instantanee a mărimii, trebuie să se multiplice cu $\sqrt{2}$ proiecția fazorului pe axa

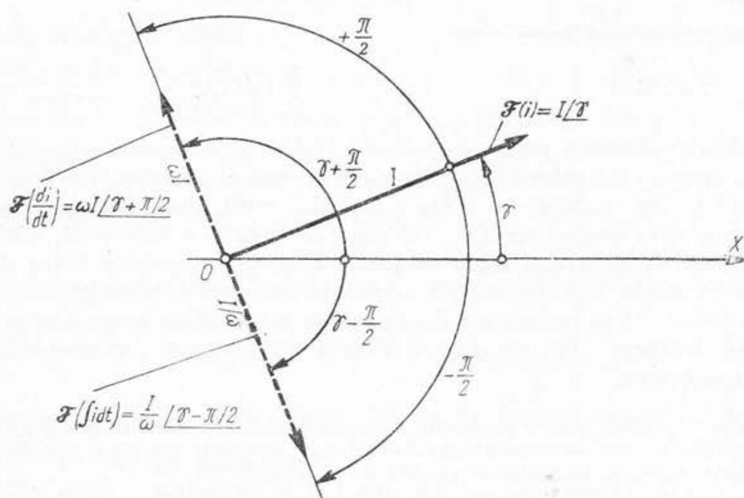


Fig. 34.10.

transversală OY_0, care se rotește în acest caz cu viteza de rotație ω în sens invers celui trigonometric (împreună cu axa de referință OX_0). Deoarece această construcție nu e de obicei utilă, sistemul de axe OX_0Y_0 nu se mai reprezintă în diagrame (v. fig. 34.10).

Avînd în vedere că reprezentarea polară este (pînă la factorul de asemănare $\sqrt{2}$) tot reprezentare cinematică, raportată însă la un reper în rotație cu viteza unghiulară ω, în raport cu care vectorii sînt imobili — toate proprietățile reprezentării, privitoare la mărimi sinusoidale de aceeași frecvență, rămîn valabile :

a) *Suma a două mărimi sinusoidale se reprezintă prin suma fazorilor corespunzători* (rel. 34.6);

b) *Amplificarea cu un scalar real a mărimii sinusoidale se reprezintă prin amplificarea cu același scalar a fazorului* (rel. 34.7);

c) *Fazorul care reprezintă derivata unei mărimi sinusoidale se obține din fazorul reprezentativ al mărimii, prin amplificare cu* ω *și rotire înainte (în sens trigonometric direct) cu* $\frac{\pi}{2}$ (fig. 34.10) :

$$\frac{di}{dt} \rightleftarrows \omega I \underline{/\gamma + \frac{\pi}{2}}. \tag{34.17}$$

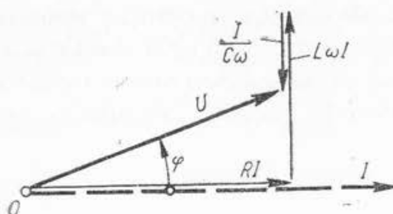


Fig. 34.11.

d) *Fazorul care reprezintă integrala unei mărimi sinusoidale se obţine din fazorul reprezentativ al mărimii prin împărţire cu ω şi rotire înapoi (în sens trigonometric invers) cu* $\frac{\pi}{2}$ (fig. 34.10) :

$$\int i\, dt \rightleftarrows \frac{I}{\omega} \underline{/\gamma - \frac{\pi}{2}}. \quad (34.18)$$

Metoda reprezentării polare se aplică la fel ca şi metoda reprezentării cinematice, cu singura deosebire că se lucrează cu valori efective, iar trasarea axei de referinţă (acum mobilă) nu e necesară. Mai mult, deoarece alegerea originii timpului — şi deci poziţia axei OX origine de fază — e arbitrară, nici această axă nu se mai desenează. Diagrama astfel obţinută cuprinde toate defazajele şi reflectă în modul cel mai simplu structura circuitului, permiţînd calculul pe cale geometrică al parametrilor funcţiunilor sinusoidale necunoscute : valori efective şi defazaje. Pe diagramă, fazorii se notează cu simbolul valorii efective respective.

Exemplu : În figura 34.11 e construită diagrama polară a circuitului serie r, L, C, studiat în paragraful 34.1.2., din care rezultă imediat relaţiile cunoscute (34.12) şi (34.13), suficiente pentru a scrie valoarea instantanee (33.69) a curentului.

În legătură cu alegerea orientării axei origine de fază observăm următoarele : de obicei, această orientare se ia orizontală de la stînga spre dreapta. Cum această alegere e arbitrară, adesea e mai bine să nu se fixeze de la început direcţia acestei axe. În adevăr, de cele mai multe ori e dată tensiunea aplicată, şi anume cu faza iniţială nulă (deoarece ştim că în orice problemă, faza iniţială a uneia dintre mărimi e arbitrară şi se poate alege nulă) şi se cere curentul. Construcţia diagramei se începe adesea (v. par. 34.1.2) de la fazorul curentului (a cărui fază iniţială nu e cunoscută), şi orientarea tensiunii rezultă prin construcţie. Dezideratul de a întocmi astfel diagrama, încît tensiunea să rezulte orizontală, ar îngreuia în mod nejustificat această operaţie.

34.1.4. Elementele de circuit studiate cu reprezentarea polară. Considerăm succesiv elementele ideale de circuit studiate în regim permanent cu metoda substituţiei (par. 33.2). Presupunem de astă dată tensiunea origine de fază :

$$u = U\sqrt{2} \sin \omega t \quad (\beta = 0) \quad (34.19)$$

şi determinăm curentul cu ajutorul metodei reprezentării polare, deoarece $\beta = 0$, $\gamma = \beta - \varphi = -\varphi$ şi curentul va fi de forma :

$$i = I\sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi) = \frac{U}{Z} \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi). \quad (34.20)$$

Chiar dacă în aceste cazuri elementare aplicarea metodei reprezentării geometrice nu aduce o simplificare, cunoaşterea proprietăţilor elementelor de circuit e necesară pentru aplicarea sistematică a metodei la cazuri mai complicate.

a) *Rezistorul ideal*, de rezistenţă r, are ecuaţia (31.22) :

$$u = u_r = r\, i.$$

Fazorul curentului amplificat cu scalarul r e egal cu tensiunea. Cei doi fazori sînt deci paraleli (fig. 34.12, *a*) şi au : modulele I şi $U = r\,I$ şi argumentele egale. Defazajul egal cu unghiul celor doi fazori e nul. Rezultă deci :

$$I = \frac{U}{r}, \quad \varphi = 0, \quad i = \frac{U}{r}\sqrt{2}\sin \omega t. \tag{34.21}$$

Parametrii circuitului sînt :

$$Z = r, \qquad R = Z\cos\varphi = r, \qquad X = Z\sin\varphi = 0$$
$$Y = 1/Z = s/r, \qquad G = Y\cos\varphi = 1/r, \qquad B = Y\sin\varphi = 0 \tag{34.22}$$

iar puterile sînt :

$$P = R\,I^2 = r\,I^2 = \frac{U^2}{r}, \quad Q = X\,I^2 = 0, \quad S = U\,I = \frac{U^2}{r}. \tag{34.23}$$

b) *Bobina ideală*, de inductivitate L, are ecuaţia (31.26) :

$$u = u_L = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Fazorul tensiunii se obţine cu relaţia (34.17) din fazorul curentului rotit cu $\frac{\pi}{2}$ înainte (în sens direct), prin amplificare cu ω şi apoi cu L (fig. 34.12, *b*) : $U = L\,\omega\,I$, iar curentul e defazat în urma tensiunii cu $\frac{\pi}{2}$. Rezultă deci :

$$I = \frac{U}{L\omega}, \quad \varphi = +\frac{\pi}{2},$$
$$i = \frac{U}{L\omega}\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{34.24}$$

Parametrii circuitului sînt :

$$Z = L\,\omega, \quad R = Z\cos\varphi = 0,$$
$$X = Z\sin\varphi = L\omega,$$
$$Y = 1/Z = 1/L\omega, \; G = Y\cos\varphi = 0,$$
$$B = Y\sin\varphi = 1/L\omega, \tag{34.25}$$

iar puterile sînt :

$$P = R\,I^2 = 0,$$
$$Q = XI^2 = L\omega\,I^2 = U^2/L\omega,$$
$$S = UI = U^2/L\omega. \tag{34.26}$$

c) *Condensatorul ideal*, de capacitate C, are ecuaţia (31.30')

$$u = u_C = \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t.$$

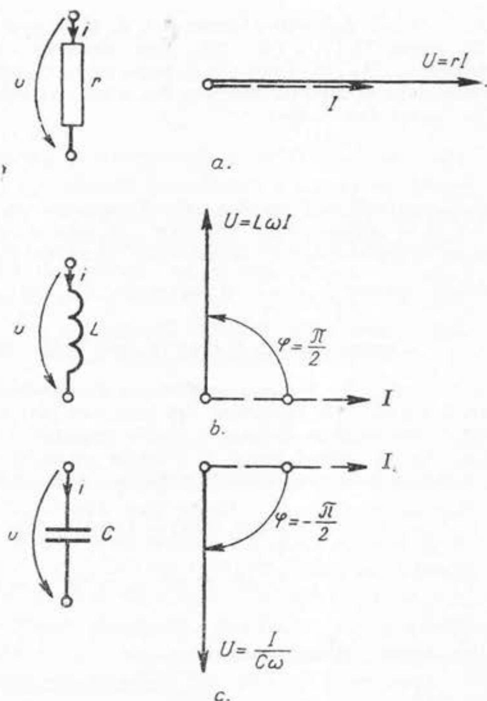


Fig. 34.12.

Fazorul tensiunii se obține cu (34.18) din fazorul curentului rotit cu $\pi/2$ în urmă (în sens invers), prin împărțire cu ω, și apoi cu C : $U = I/\omega C$, iar curentul e defazat înaintea tensiunii cu $\frac{\pi}{2}$ (fig. 34.12, c). Rezultă deci :

$$I = U C \omega, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad i = C\omega U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{34.27}$$

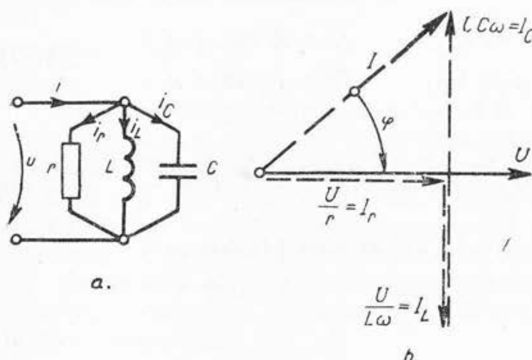


Fig. 34.13.

Parametrii circuitului sînt :

$$Z = 1/C\omega,$$
$$Y = 1/Z = C\omega,$$
$$R = Z\cos\varphi = 0,$$
$$G = Y\cos\varphi = 0,$$
$$X = Z\sin\varphi = -1/C\omega,$$
$$B = Y\sin\varphi = -C\omega, \tag{34.28}$$

iar puterile sînt :

$$P = RI^2 = 0,$$
$$Q = XI^2 = -\frac{I^2}{C\omega} = -C\omega U^2,$$
$$S = UI = C\omega U^2. \tag{34.29}$$

34.1.5. **Aplicație : Circuitul r, L, C cu toate elementele în paralel.** Considerăm circuitul din figura 34.13, *a* (cu cele trei elemente ideale de circuit în paralel), căruia i se aplică tensiunea (34.19). Deoarece în regim cvasistaționar e valabilă teorema continuității (31.10) și consecința ei directă, teorema I-a a lui Kirchhoff (v. și cap. 36) își păstrează valabilitatea. Se poate deci scrie :

$$i = i_r + i_L + i_C, \tag{34.30}$$

unde curenții sînt cei determinați mai înainte pentru elementele de circuit cărora, în acest caz, li se aplică aceeași tensiune u. Conform relației (34.30), diagrama circuitului se construiește obținînd fazorul reprezentativ al curentului total I (fig. 34.13, *b*), prin adunarea a trei fazori : fazorul $I_r = \frac{U}{r}$ al curentului din rezistor, în fază cu fazorul tensiunii; fazorul $I_L = \frac{U}{L\omega}$ al curentului din bobină (v. rel. 34.25), defazat în urma fazorului tensiunii cu $\pi/2$ = fazorul $I_C = UC\omega$ al curentului din condensator (v. rel. 34.28), defazat înaintea fazorului tensiunii cu $\pi/2$. Deoarece, așa cum am luat la întîmplare mărimile acestor fazori, curentul total I a rezultat defazat înaintea tensiunii (cazul $\varphi < 0$), unghiul de defazaj φ trebuie introdus cu semnul minus în relațiile geometrice obținute scriind proiecțiile pe două axe (paralelă cu U și transversală față de U) a adunării vectoriale efectuate :

$$\left.\begin{aligned} I\cos(-\varphi) &= I\cos\varphi = I_r \\ I\sin(-\varphi) &= -I\sin\varphi = I_C - I_L = U\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) \end{aligned}\right\} \tag{34.31}$$

Din aceste relații rezultă :

$$I = U\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}; \quad \mathrm{tg}\varphi = r\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right); \tag{34.32}$$

adică :

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi) = U\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}\sin\left[\omega t - \operatorname{arc\,tg} r\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)\right]. \quad (34.33)$$

Parametrii circuitului sînt :

$$\left.\begin{aligned} &Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}}, \quad R = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}, \quad X = \frac{\frac{1}{L\omega} - C\omega}{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}, \\ &Y = \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}, \quad G = \frac{1}{r}, \quad B = \frac{1}{L\omega} - C\omega \end{aligned}\right\} \quad (34.34)$$

iar puterile sînt :

$$P = GU^2 = \frac{U^2}{r}, \quad Q = BU^2 = \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)U^2, \quad S = UI = U^2\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}. \quad (34.35)$$

Se verifică ușor cum din acest circuit, particularizînd valorile parametrilor, se pot obține relațiile caracteristice ale elementelor de circuit, respectiv ale unor circuite cu două elemente în derivație, din tabela 33.1 (par. 33.3.5).

34.2. Reprezentări analitice (în complex)

În reprezentarea geometrică se folosește proprietatea funcțiunilor sinusoidale de timp de a putea fi puse în corespondență biunivocă cu vectorii liberi din plan. Dar, așa cum se știe din algebra numerelor complexe, fiecărui număr complex îi corespunde biunivoc un punct din planul complex (afixul numărului) — și deci îi corespunde și vectorul de poziție al acelui punct. Rezultă că identificînd planul abstract al reprezentărilor geometrice cu planul complex, stabilim o corespondență biunivocă între mulțimea funcțiunilor sinusoidale și mulțimea numerelor complexe. Se obțin astfel reprezentările analitice — sau în complex — ale mărimilor sinusoidale :

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \mathcal{C}(i), \quad (34.36)$$

în care fiecărei funcțiuni sinusoidale de timp i îi corespunde o mărime complexă $\mathcal{C}(i)$ [1], susceptibilă de a face obiectul unui calcul mai simplu și mai sistematic decît cel efectuat cu mărimi sinusoidale. După cum planul complex a fost identificat cu planul reprezentării cinematice (cu vectori rotitori) sau cu planul reprezentării polare (cu vectori ficși), se obține o reprezentare în complex nesimplificată (cu mărimi complexe funcțiuni de timp, pentru a avea afixul rotitor în jurul originii) sau o reprezentare în complex simplificată — ultima fiind utilizabilă numai cînd toate mărimile sinusoidale au aceeași frecvență.

---

[1] Se citește : „reprezentarea în complex a curentului i".

Numere complexe. Reamintim pe scurt cîteva noţiuni asupra mărimilor complexe, introducînd totodată unele notaţii folosite în electrotehnică.

Numerele complexe (sau mărimile complexe) sînt expresii de forma :

$$\underline{c} = a + \mathrm{j}b, \quad \text{cu} \quad \mathrm{j} = \sqrt{-1}\ ^{1}, \tag{34.37}$$

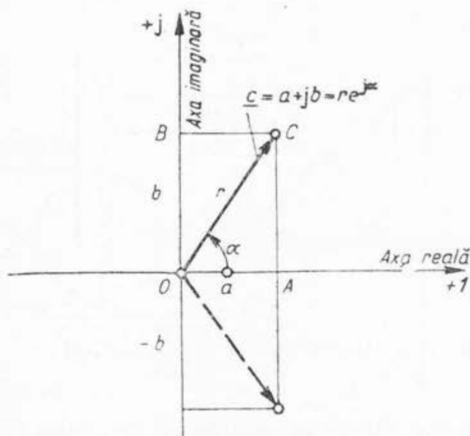


Fig. 34.14.

în care a este un număr *real*, numit *partea reală* a numărului complex, iar b este tot un număr *real*, numit *partea imaginară* a numărului complex. Se scrie :

$$a = \mathrm{Re}\{\underline{c}\}, \quad b = \mathrm{Im}\{\underline{c}\}. \tag{34.38}$$

În conformitate cu recomandările C.E.I., în studiul regimului permanent, vom nota *prin subliniere* mărimile din electrotehnică, care sînt numere complexe. Adesea nu se foloseşte nici o notaţie specială — ca în matematici — sau se folosesc literele barate deasupra (adică, simbolul folosit ades pentru mărimile electromagnetice vectoriale).

Numerele complexe se pot scrie şi sub *forma exponenţială*, respectiv *trigonometrică* (folosind formula lui Euler) :

$$\underline{c} = re^{\mathrm{j}\alpha} = r\cos\alpha + \mathrm{j}r\sin\alpha\ ^{2}, \tag{34.39}$$

în care r e un număr real şi pozitiv (sau nul, pentru numărul complex zero), numit *modulul* numărului complex $\underline{c}$

$$r = |\underline{c}| = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 0, \tag{34.40}$$

iar $\alpha = \arg\{\underline{c}\} \gtrless 0$ e un număr real, numit *argumentul* numărului complex $\underline{c}$, dat de relaţiile :

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a}; \quad \sin\alpha = \frac{b}{r}; \quad \cos\alpha = \frac{a}{r}, \tag{34.41}$$

astfel că

$$a = r\cos\alpha, \quad b = r\sin\alpha. \tag{34.41'}$$

Numerele complexe se pot reprezenta grafic, biunivoc, prin punctele unui plan abstract, numit planul complex sau planul lui Gauss, într-un sistem de coordonate carteziene. Punctul C asociat numărului complex $\underline{c}$ se numeşte *afixul* lui $\underline{c}$ şi are abscisa egală cu partea reală a, iar ordonata egală cu partea imaginară b (fig. 34.14). Rezultă :

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = r, \quad \sphericalangle COA = \alpha. \tag{34.42}$$

În acest plan, axa absciselor se numeşte *axa reală* şi sensul ei pozitiv se indică, de obicei, prin simbolul + 1 al unităţii reale; axa ordonatelor se numeşte *axa imaginară*, iar sensul ei pozitiv se indică, de obicei, prin simbolul + j al unităţii imaginare. Prin această corespon-

[1] În electrotehnică, unitatea imaginară $\sqrt{-1}$ se notează cu simbolul j, pentru a evita confuzii cu simbolul i al curentului.

[2] Această egalitate (formula lui Euler) trebuie utilizată numai cu unghiul α exprimat în radiani

dență se asociază totodată biunivoc fiecărui număr complex $\underline{c}$ un vector liber în planul complex : vectorul de poziție $\overrightarrow{OC}$ al afixului C al acestui număr. Acesta e vectorul reprezentativ al numărului $\underline{c}$. În exprimarea curentă, numărul complex, afixul său și vectorul său reprezentativ se numesc și se simbolizează la fel : numărul complex $\underline{c}$.

Se numește *operator de rotație* cu unghiul θ un număr complex de modul unitate și de argument θ :

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta. \qquad (34.43)$$

Exemple de operatori de rotație sînt :

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}; \quad j^2 = -1 = e^{\pm j\pi}; \quad j^3 = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}; \quad e^{j\frac{2\pi}{3}}. \qquad (34.44)$$

Numărul complex *zero* are atît partea reală cît și partea imaginară nule, respectiv modulul nul și argumentul nedeterminat. Se notează cu simbolul obișnuit pentru cifra zero (fără subliniere) și corespunde originii O a planului complex.

Numărul complex $\underline{c}^* = a - jb = re^{-j\alpha}$ (v. fig. 34.14) se numește conjugatul numărului complex $\underline{c} = a + jb = re^{j\alpha}$.

Operații elementare cu numere complexe. Anularea : Un număr complex (respectiv o expresie formată după regulile de calcul cu astfel de numere) se anulează anulîndu-i modulul, respectiv și partea reală și partea imaginară :

$$\underline{c} = 0 \rightarrow r = |\underline{c}| = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad (34.45)$$

Egalarea : Două numere complexe sînt egale dacă au părțile reale egale și părțile imaginare egale, respectiv modulele egale și argumentele egale (sau diferite cu un multiplu întreg, n, de 2π) :

$$\underline{c}_1 = \underline{c}_2 \rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 + 2\pi n. \end{cases} \qquad (34.46)$$

Orice egalitate între numere complexe (respectiv între expresii formate după regulile de calcul cu astfel de numere) furnizează două egalități între numere (expresii) reale.

Adunarea (scăderea) : Numerele complexe se adună (se scad) dacă li se adună (scad) părțile reale separat și părțile imaginare separat :

$$(a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2). \qquad (34.47)$$

În reprezentarea grafică se face adunarea (scăderea) vectorială a vectorilor reprezentativi.

Observație: Suma dintre un număr complex și conjugatul lui e egală cu dublul părții lui reale; iar diferența dintre un număr complex și conjugatul lui e egală cu dublul părții lui imaginare :

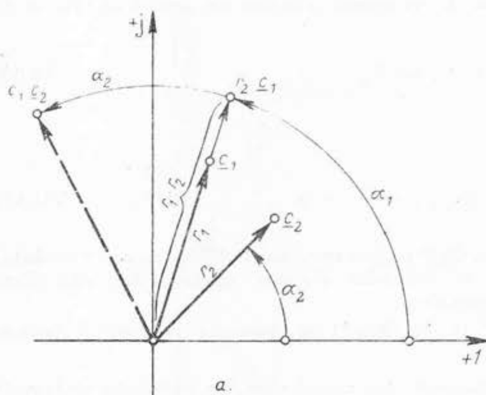
$$\underline{c} + \underline{c}^* = 2\mathrm{Re}\{\underline{c}\} = 2a, \quad c - c^* = 2\mathrm{Im}\{\underline{c}\} = 2b. \qquad (34.48)$$

Înmulțirea (împărțirea) : Numerele complexe se înmulțesc (se împart) dacă li se înmulțesc (împart) modulele și li se adună (scad) argumentele :

$$\underline{c}_1\underline{c}_2 = r_1 r_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} \qquad (34.49)$$

$$\frac{\underline{c}_1}{\underline{c}_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \qquad (34.50)$$

Modulul produsului (cîtului) este, deci, egal cu produsul (cîtul) modulelor, iar argumentul produsului (cîtului) este egal cu suma (diferenţa) argumentelor. În reprezentarea grafică : vectorul reprezentativ al produsului se obţine (fig. 34.15, *a*) din vectorul unuia dintre factori (c_1), amplificîndu-l cu modulul celuilalt (r_2) şi rotindu-l cu argumentul acestuia (în sens direct dacă $\alpha_2 > 0$ şi în sens invers dacă $\alpha_2 < 0$); vectorul reprezentativ al cîtului se obţine (fig. 34.15,*b*) din vectorul reprezentativ al numărătorului (c_1), amplificîndu-l cu valoarea reciprocă a modulului numitorului $\left(\frac{1}{r_1}\right)$ şi rotindu-l apoi cu argumentul acestuia în sens opus (în sens invers dacă $\alpha_2 > 0$ şi în sens direct dacă $\alpha_2 < 0$).



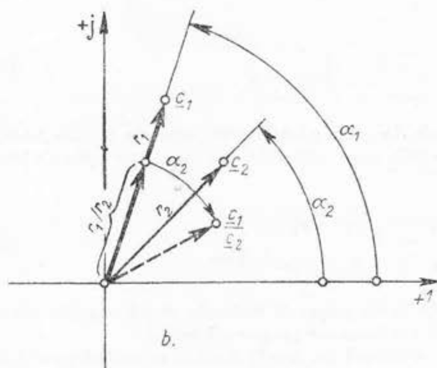


Fig. 34.15.

Cazuri particulare: înmulţirea unui număr complex cu un factor real înseamnă amplificarea vectorului reprezentativ cu acel factor real; înmulţirea unui număr complex cu un operator de rotaţie (34.43) înseamnă rotirea vectorului reprezentativ cu argumentul θ al acelui operator :

$$\underline{c}e^{j\theta} = re^{j\alpha}e^{j\theta} = re^{j(\alpha+\theta)}. \quad (34.51)$$

Înmulţirea cu $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ *înseamnă rotirea cu* $\pi/2$ *în sens direct, iar împărţirea cu* j, *adică înmulţirea cu* $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ *înseamnă rotirea cu* $\pi/2$ *în sens invers.* Aceste două reguli vor fi foarte mult utilizate în studiul circuitelor cu metoda reprezentării în complex. Înmulţirea unui număr complex cu conjugatul său e un număr real : patratul modulului acelui număr

$$\underline{c}\underline{c}^* = |c|^2 = r^2. \quad (34.52)$$

34.2.1. Reprezentarea în complex (nesimplificat).

În reprezentarea în complex nesimplificat, imaginea în complex a mărimii sinusoidale i e o funcţiune complexă de timp, avînd modulul constant şi egal cu amplitudinea mărimii sinusoidale şi argumentul egal cu faza mărimii sinusoidale :

$$i = I\sqrt{2}\,\sin\,(\omega t + \gamma) \rightleftarrows I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)}. \quad (34.53)$$

Această imagine se mai numeşte *reprezentarea în complex nesimplificată* a lui i sau *valoarea instantanee complexă* a lui i. În acord cu ultima denumire, mai sugestivă, vom nota această imagine cu simbolul grafic subliniat al valorii instantanee a mărimii sinusoidale :

$$\boxed{\mathcal{C}(i) = I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)} = \underline{i}.} \quad (34.54)$$

(În literatură se mai foloseşte notaţia $\dot{I}$ sau **I**).

În mod analog, imaginea în complex a tensiunii $\underline{u}$ este:

$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta) \rightleftarrows \underline{u} = U\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\beta)} \quad (34.55)$$

Proprietăți: *a)* Din formula lui Euler (34.39) aplicată reprezentării în complex:

$$\underline{i} = I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)} = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \gamma) + jI\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma), \quad (34.56)$$

rezultă că *partea imaginară a reprezentării în complex nesimplificată este egală cu valoarea instantanee a mărimii*:

$$i(t) = \mathrm{Im}\{\underline{i}\} = \mathrm{Im}\{I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)}\}. \quad (34.57)$$

Aceasta e regula, deosebit de simplă, a trecerii inverse de la imagine la mărimea sinusoidală.

b) Se poate da o expresie analitică și trecerii directe de la mărimea instantanee la reprezentarea ei, observînd că deoarece $\omega T = 2\pi$, avem:

$$I\sqrt{2}\cos(\omega t + \gamma) = I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right) = I\sqrt{2}\sin\left(\omega\left(t + \frac{T}{4}\right) + \gamma\right),$$

adică

$$I\sqrt{2}\cos(\omega t + \gamma) = i\left(t + \frac{T}{4}\right). \quad (34.58)$$

Cu această observație relația (34.56) se scrie:

$$\underline{i} = i\left(t + \frac{T}{4}\right) + ji(t). \quad (34.59)$$

Aceasta este *expresia analitică a regulii de reprezentare directe.*

c) Dacă s-ar folosi pentru mărimi sinusoidale forma normală în cosinus (33.13), reprezentarea în complex ar fi tot (34.54), și toate proprietățile metodei ar rămîne neschimbate, cu excepția regulilor de reprezentare, care ar fi:

— trecerea directă:

$$\underline{i} = i(t) + ji\left(t - \frac{T}{4}\right) \quad (34.60)$$

— trecerea inversă:

$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \gamma) = \mathrm{Re}\{\underline{i}\}. \quad (34.61)$$

Pentru toate mărimile sinusoidale care intervin în aceeași problemă trebuie să se utilizeze o singură regulă pentru trecerea directă și inversă, adică o singură formă normală: fie în sinus, fie în cosinus.

d) Comparînd regula de reprezentare în complex (34.13) cu regula reprezentării cinematice (34.2), se constată imediat că, identificînd planul fazorilor cu planul complex, fazorul corespunzător mărimii $i\,(t)$ este vectorul reprezentativ al imaginii complexe $\underline{i}$. Axa de referință e acum axa reală, iar axa transversală e axa imaginară. De aceea, în aplicații se folosește calculul în complex al circuitelor în paralel cu reprezentare geometrică (care ilustrează mai sugestiv relațiile de fază), iar în diagrame, factorii sînt notați cu simbolurile reprezentărilor în complex.

e) Defazajul $\varphi_{12}=\gamma_1-\gamma_2$ dintre mărimea sinusoidală $i_1=I_1\sqrt{2}\sin(\omega t+\gamma_1)$ și mărimea sinusoidală $i_2=I_2\sqrt{2}\sin(\omega t+\gamma_2)$ e egal cu diferența argumentelor imaginilor lor în complex, adică cu argumentul cîtului lor:

$$\varphi_{12}=\gamma_1-\gamma_2=\arg\left\{\frac{\underline{i}_1}{\underline{i}_2}\right\}. \qquad (34.62)$$

Corespondența operațiilor se stabilește fără dificultăți:

1. *Adunarea mărimilor sinusoidale corespunde biunivoc adunării imaginilor lor în complex:*

$$i_1+i_2 \rightleftarrows \underline{i}_1+\underline{i}_2, \qquad (34.63)$$

adică

$$\mathcal{C}(i_1+i_2)=\mathcal{C}(i_1)+\mathcal{C}(i_2). \qquad (34.63')$$

Această proprietate e evidentă în virtutea corespondenței pe care am stabilit-o cu reprezentarea cinematică. Analitic ea rezultă din relația (34.57), știind că partea imaginară a unei sume e suma părților imaginare ale termenilor sumei.

2. *Amplificarea unei mărimi sinusoidale cu un scalar real corespunde biunivoc cu înmulțirea imaginii cu același scalar real:*

$$\lambda i \rightleftarrows \lambda\underline{i}, \ (\lambda \gtrless 0), \qquad (34.64)$$

adică

$$\mathcal{C}(\lambda i)=\lambda\mathcal{C}(i). \qquad (34.64')$$

Și această proprietate e evidentă și asigură împreună cu relația (34.63) liniaritatea reprezentării în complex.

3. *Derivarea unei mărimi sinusoidale în raport cu timpul se traduce prin înmulțirea imaginii ei în complex cu numărul imaginar* j ω

$$\frac{di}{dt} \rightleftarrows j\omega\underline{i}, \qquad (34.65)$$

adică

$$\mathcal{C}\left(\frac{di}{dt}\right)=j\omega\mathcal{C}(i). \qquad (34.65')$$

În adevăr:

$$\frac{di}{dt}=\omega I\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\gamma+\frac{\pi}{2}\right) \rightleftarrows \omega I\sqrt{2}\,e^{j\left(\omega t+\gamma+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\frac{di}{dt} \rightleftarrows \omega I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)}\,e^{j\frac{\pi}{2}}=j\omega I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)}=j\omega\underline{i}.$$

Se observă totodată că, deoarece $\underline{i}$ este în această reprezentare funcțiune de timp, se obține

$$\frac{d\underline{i}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)}\right)=j\omega I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)}=j\omega\underline{i},$$

adică reprezentarea derivatei este derivata reprezentării:

$$\frac{di}{dt} \rightleftarrows \frac{d\underline{i}}{dt}=\mathcal{C}\left(\frac{di}{dt}\right). \qquad (34.66)$$

4. *Integrarea în timp a unei mărimi sinusoidale se traduce prin împărțirea imaginii ei în complex cu numărul imaginar* j ω

$$\int i\mathrm{d}t \rightleftarrows \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}\underline{i}, \qquad (34.67)$$

adică :

$$\mathcal{C}\left(\int i\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}\,\mathcal{C}(i). \qquad (34.67')$$

Demonstrația se poate face direct, ca pentru proprietatea precedentă, sau indirect, observînd că din relația (34.65) rezultă :

$$\mathcal{C}(i) = \mathcal{C}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int i\mathrm{d}t\right)\right) = \mathrm{j}\,\omega\,\mathcal{C}\left(\int i\mathrm{d}t\right).$$

Se demonstrează analog cu (34.66) relația :

$$\int i\mathrm{d}t \rightleftarrows \int \underline{i}\mathrm{d}t = \mathcal{C}\left(\int i\mathrm{d}t\right), \qquad (34.68)$$

adică reprezentarea integralei e integrala reprezentării.

Observație : Dacă am calcula produsul a două mărimi sinusoidale (rel. 33.29) :

$$i_1 i_2 = I_1 I_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) - I_1 I_2 \cos(2\omega t + \gamma_1 + \gamma_2),$$

precum și produsul imaginilor în complex respective :

$$\underline{i}_1\underline{i}_2 = 2 I_1 I_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \gamma_1 + \gamma_2)},$$

a cărui parte imaginară e :

$$\mathrm{Im}\,\{\underline{i}_1 + \underline{i}_2\} = 2 I_1 I_2 \sin(2\omega t + \gamma_1 + \gamma_2) \neq i_1 i_2$$

am constata că *produsele de mărimi sinusoidale nu se reprezintă prin produsele imaginilor complexe.* Ca și metoda reprezentării geometrice, metoda reprezentării în complex poate fi utilizată numai pentru ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți, în care nu apar produse de funcțiuni de timp.

În studiul în complex al circuitelor prezintă însă interes semisuma produsului dintre imaginea complexă a unei mărimi și conjugata complexă a celeilalte :

$$\frac{1}{2}\,\underline{i}_1\underline{i}_2^* = \frac{1}{2} I_1\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \gamma_1)} \cdot I_2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t + \gamma_2)} =$$

$$= I_1 I_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\gamma_1 - \gamma_2)} = I_1 I_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) + \mathrm{j} I_1 I_2 \sin(\gamma_1 - \gamma_2), \qquad (34.69)$$

care are următoarele proprietăți remarcabile :

— nu mai depinde de timp ;

— depinde numai de valorile efective și de diferența fazelor inițiale, adică nu depinde de alegerea originii timpului ;

— are partea reală egală cu valoarea medie a produsului valorilor instantanee (v. relația 33.29') :

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\underline{i}_1 + \underline{i}_2^*}{2}\right\} = I_1 I_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) = \widetilde{i_1 i_2} = \frac{1}{T}\int_0^T i_1 i_2 \mathrm{d}t. \qquad (34.70)$$

Regulile de mai sus, privitoare la traducerea operațiilor elementare efectuate cu mărimile sinusoidale, arată că aceste operații se traduc — fără excepție — prin operații algebrice efectuate cu imaginile în complex ale mărimilor.

Metodele de reprezentare în complex prezintă avantajul principal de a transforma ecuaţiile integro-diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi ale circuitelor, satisfăcute de curenţii şi tensiunile sinusoidale, în ecuaţii algebrice liniare (de gradul întîi) satisfăcute de imaginile complexe ale acestor curenţi şi tensiuni [1].

[1] Regula reprezentării analitice poate fi dedusă exclusiv din condiţia ca ecuaţiile diferenţiale liniare ale circuitelor să fie traduse în ecuaţii algebrice liniare .Pentru aceasta e necesar ca reprezentarea căutată să fie liniară :

$$\mathcal{C}(\lambda i_1 + \lambda i_2) = \lambda_1 \mathcal{C}(i_1) + \lambda_2 \mathcal{C}(i_2), \tag{a}$$

iar derivarea să se traducă prin înmulţirea cu un număr p :

$$\mathcal{C}\left(\frac{di}{dt}\right) = p\mathcal{C}(i). \tag{b}$$

Din $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$ rezultă $\frac{d^2 i}{dt^2} = -\omega^2 i$. Aplicînd condiţia (b) derivatei a doua, se obţine cu (a) :

$$\mathcal{C}(d^2i/dt^2) = p\mathcal{C}(di/dt) = p^2\mathcal{C}(i) = -\omega^2\mathcal{C}(i),$$

de unde

$$p = \pm j\omega. \tag{c}$$

Ţinînd seama că

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) = I\sqrt{2}\cos\gamma\sin\omega t + \frac{1}{\omega} I\sqrt{2}\sin\gamma\frac{d}{dt}(\sin\omega t)$$

cu (a), (b) şi (c) rezultă :

$$\mathcal{C}(i) = I\cos\gamma\ \mathcal{C}(\sqrt{2}\sin\omega t) + I\sin\gamma\frac{1}{\omega}\ p\mathcal{C}(\sqrt{2}\sin\omega t) = I(\cos\gamma \pm j\sin\gamma)\ \mathcal{C}(\sqrt{2}\sin\omega t)$$

sau

$$\boxed{\mathcal{C}(i) = Ie^{\pm j\gamma}\mathcal{C}(\sqrt{2}\sin\omega t) = AIe^{\pm j\gamma}} \tag{d}$$

Aceasta e cea mai generală reprezentare analitică a funcţiunilor sinusoidale de timp, care asigură transformarea ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, ale circuitelor, în ecuaţii algebrice de gradul întîi. Semnul de la exponent se alege +, pentru ca exponentul să fie chiar faza iniţială a mărimii. Mărimea :

$$A = \mathcal{C}(\sqrt{2}\sin\omega t)$$

este imaginea celei mai „simple" mărimi sinusoidale (de valoare efectivă egală cu unu şi de fază iniţială nulă). Alegerea acestui simbol e arbitrară. În reprezentarea în complex simplificat se alege $A = 1$ şi rezultă :

$$\mathcal{C}(i) = Ie^{j\gamma} = \underline{I}. \tag{e}$$

În reprezentarea în complex nesimplificat se alege

$$A = \sqrt{2}\,e^{j\omega t}$$

şi rezultă :

$$\mathcal{C}(i) = I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t + \gamma)} \tag{f}$$

Circuitele electrice liniare de curent alternativ sinusoidal vor fi caracterizate prin sisteme de ecuații algebrice de gradul întîi, ca și circuitele de curent continuu. Aceasta va permite elaborarea teoriei circuitelor de curent alternativ în strînsă analogie cu aceea a circuitelor de curent continuu.

Metoda reprezentării în complex (nesimplificat), pentru rezolvarea circuitelor de curent alternativ, consistă în următoarele :

1. Se scriu ecuațiile integro-diferențiale ale circuitelor (ecuațiile în valori instantanee).

2. Se determină imaginile în complex ale mărimilor sinusoidale, care figurează ca termeni liberi ai acestor ecuații (și care sînt, de obicei, date — de ex. tensiunile) cu regula trecerii directe (34.53...34.55).

3. Se stabilesc imaginile în complex ale ecuațiilor diferențiale, adică ecuațiile algebrice liniare care le corespund (ecuațiile în complex) cu regulile (34.63, 34.64, 34.65, 34.67). Datorită liniarității, corespondența se face termen cu termen, înlocuind derivările în raport cu timpul prin înmulțiri cu j ω și integrările în timp prin împărțiri cu j ω.

4. Se rezolvă aceste ecuații în raport cu imaginile (valorile instantanee complexe) mărimilor necunoscute (de obicei, curenții).

5. Se determină mărimile sinusoidale necunoscute cu regula trecerii inverse (34.57), adică separînd părțile imaginare ale imaginilor complexe ale lor.

34.2.2. **Aplicație la circuitul serie** *r, L, C.* Exemplificăm metoda — în forma expusă mai sus — prin rezolvarea (circuitului serie care a mai fost studiat în paragraful 33.2.6 și 34.1.2. Reprezentarea ecuației 34.10) a circuitului se poate prezenta schematic astfel :

$$\left.\begin{array}{l} u = ri + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\,dt \\ \downarrow \quad \downarrow \quad\quad \downarrow \quad\quad\quad \downarrow \\ \underline{u} = r\underline{i} + Lj\omega\underline{i} + \dfrac{1}{Cj\omega}\underline{i} \end{array}\right\} \tag{34.71}$$

sau

$$\underline{u} = (r + j\omega L + 1/j\omega C)\underline{i},$$

de unde imaginea complexă a curentului este :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{r + j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{U\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\beta)}}{\sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}\,e^{j\,\mathrm{arc\,tg}\,[(L\omega - 1/\omega C)/r]}}$$

sau

$$\underline{i} = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{r^2+(\omega L - 1/\omega C)^2}}\,e^{j\left(\omega t + \beta - \mathrm{arc\,tg}\frac{L\omega - 1/C\omega}{r}\right)}. \tag{34.72}$$

Aceasta este imaginea complexă nesimplificată (valoarea instantanee complexă) a curentului care trebuie determinat și a cărui valoare instantanee se obține separînd partea imaginară a expresiei precedente :

$$i(t) = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{r^2+(\omega L - 1/\omega C)^2}}\sin\left(\omega t + \beta - \mathrm{arc\,tg}\frac{L\omega - 1/C\omega}{r}\right). \tag{34.72'}$$

Am obținut chiar expresia (33.69), determinată prin calculul direct.

Observații: *a)* Avantajele acestei metode sînt și mai evidente la circuite complicate, la care se obțin *sisteme* de ecuații diferențiale și deci, cu ajutorul reprezentării în complex, *sisteme* de ecuații algebrice. Explicitarea formală a necunoscutelor e la fel de simplă ca și în cazul circuitelor de curent continuu (regula lui Kramer pentru sisteme de ecuații liniare), deși calculele sînt mai lungi, din cauză că se operează cu numere complexe. O dată scrise ecuațiile în complex, rezolvarea e o chestiune de calcul algebric, care se desfășoară „mecanic", fără să fie necesare raționamente suplimentare.

b) Metoda e avantajoasă nu numai pentru rezolvarea propriu-zisă a circuitelor (determinarea curenților cînd se dau tensiunile etc.) ci și pentru studii teoretice, deoarece sistemele de ecuații în complex permit studiul sistematic al circuitelor sub această formă. Întreaga teorie modernă a circuitelor de curent alternativ este elaborată astăzi cu reprezentarea în complex (v. și cap. 36, 37, 38, 39 etc.).

c) Dacă se scriu explicit (sub formă exponențială) toate imaginile complexe din ecuații — cînd toate mărimile sinusoidale au aceeași frecvență —, se constată că toți termenii acestor ecuații (care sînt liniare și omogene în raport cu aceste imagini) au un același factor comun $\sqrt{2}\, e^{j\omega t}$. Acest factor poate fi simplificat de la început, fără ca restul calculului să fie afectat. Ecuația (34.71), de exemplu, se poate scrie:

$$U\sqrt{2}\, e^{j(\omega t+\beta)} = rI\sqrt{2}\, e^{j(\omega t+\gamma)} + j\omega LI\sqrt{2}\, e^{j(\omega t+\gamma)} + \frac{1}{j\omega C} I\sqrt{2}\, e^{j(\omega t+\gamma)}$$

sau — după simplificare:

$$Ue^{j\beta} = rIe^{j\gamma} + j\omega LIe^{j\gamma} + \frac{1}{j\omega C} Ie^{j\gamma}, \tag{34.73}$$

de unde rezultă direct necunoscutele I și γ necesare scrierii valorii instantanee (34.72), dacă frecvența e cunoscută.

De aceea, în aplicații, metoda reprezentării în complex se simplifică, adoptînd ca simbol al mărimii sinusoidale i raportul $\underline{i}/\sqrt{2}\, e^{j\omega t}$. Noul simbol nu mai e o funcțiune de timp, ci un număr complex constant. Se obține astfel o altă formă a reprezentării analitice, pe care o prezentăm în continuare și care e utilizabilă numai atunci cînd toate mărimile sinusoidale au aceeași frecvență.

34.2.3. Reprezentarea în complex simplificat.

În reprezentarea în complex simplificat, imaginea în complex a mărimii sinusoidale i e un număr complex constant, avînd modulul egal cu valoarea efectivă a mărimii și argumentul egal cu faza inițială a mărimii:

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows Ie^{j\gamma}. \tag{34.74}$$

Această imagine se mai numește *reprezentarea în complex simplificată* a lui i sau *valoarea efectivă complexă* [1] a lui i și se notează cu simbolul majuscul, subliniat, al lui i:

$$\boxed{\mathcal{C}(i) = Ie^{j\gamma} = \underline{I}} \tag{34.75}$$

(În literatură se mai folosește simbolul $\bar{I}$ sau **I**, sau chiar I — în acest ultim caz rămînînd ca valoarea efectivă să se noteze $|I|$). În mod analog, imaginea în complex a tensiunii u este:

$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta) \rightleftarrows Ue^{j\beta} = \underline{U}. \tag{34.76}$$

[1] Dacă se operează cu amplitudinile mărimilor sinusoidale și nu cu valorile lor efective, adică dacă se scrie $i = I\sin(\omega t + \gamma)$ — unde I e acum amplitudinea —, imaginea în complex e $\underline{I} = Ie^{j\gamma}$ și se numește *amplitudine complexă*.

În exprimarea curentă se spune concis curentul complex (în loc de imaginea în complex a curentului) și tensiunea complexă (în loc de imaginea în complex a tensiunii).

Observație: În reprezentarea în complex simplificat, mărimile sinusoidale origine de fază ($\gamma = 0$) au imagini reale.

În această reprezentare, regula trecerii directe se poate exprima analitic sub forma:

$$\underline{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\omega t}\left[i\left(t + \frac{T}{4}\right) + ji(t)\right], \tag{34.77}$$

iar regula trecerii inverse sub forma:

$$i(t) = \text{Im}\,\{\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\underline{I}\}. \tag{34.78}$$

Deoarece reprezentarea simplificată se obține prin suprimarea unui factor comun parazit din toate relațiile în complex, care sînt liniare și omogene în raport cu imaginile complexe, toate proprietățile reprezentării în complex nesimplificate, corespunzătoare unor astfel de relații, rămîn valabile. Defazajele rămîn egale cu argumentele rapoartelor imaginilor complexe respective:

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \varphi_{12} = \arg\left\{\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right\}. \tag{34.79}$$

și, în particular, defazajul dintre tensiune și curent e:

$$\beta - \gamma = \varphi = \arg\left\{\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right\}. \tag{34.80}$$

Transpunerile operațiilor se fac după regulile stabilite:

1. *Suma a două mărimi sinusoidale se reprezintă prin suma imaginilor în complex corespunzătoare*:

$$i_1 + i_2 \rightleftarrows \underline{I}_1 + \underline{I}_2. \tag{34.81}$$

2. *Amplificarea cu un scalar real a mărimii sinusoidale se reprezintă prin amplificarea cu același scalar a imaginii în complex a mărimii:*

$$\lambda i \rightleftarrows \lambda \underline{I}. \tag{34.82}$$

3. *Derivarea unei mărimi sinusoidale în raport cu timpul se traduce prin înmulțirea imaginii ei în complex cu numărul imaginar* jω*:*

$$\frac{di}{dt} \rightleftarrows j\,\omega \underline{I}. \tag{34.83}$$

De astă dată, relația (34.66) nu mai e valabilă, adică imaginea derivatei nu e derivata imaginii (care nu mai e funcțiune de timp).

4. *Integrarea în timp a unei mărimi sinusoidale se traduce prin împărțirea imaginii ei în complex cu numărul imaginar* jω*:*

$$\int i\mathrm{d}t \rightleftarrows \frac{1}{j\,\omega}\,\underline{I}. \tag{34.84}$$

De astă dată, relația (34.68) nu mai e valabilă, adică imaginea integralei nu mai este integrala imaginii (care nu mai e funcțiune de timp).

Observație: Înmulțirii sau împărțirii a două mărimi sinusoidale *nu le corespund* înmulțirea sau împărțirea imaginilor lor complexe. Reprezentarea e aplicabilă numai la operații liniare.

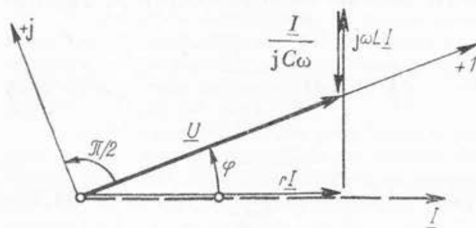


Fig. 34.16.

Metoda reprezentării în complex (simplificat) cuprinde aceleași etape ca și metoda reprezentării nesimplificate, cu diferența că trecerea directă (determinarea imaginii în complex a unei mărimi sinusoidale) se face acum cu regula (34.74); iar trecerea inversă (determinarea mărimii sinusoidale corespunzătoare unei anumite imagini în complex) se face cu regula (34.78). Calculul e însoțit de obicei de diagrama vectorială întocmită în planul complex în care axa reală e axă origine de fază — și ades nici nu se figurează), în care fazorii sînt notați cu simbolurile (34.75) ale imaginilor în complex.

Construcția însăși a diagramei vectoriale se urmărește pe baza indicațiilor cuprinse în ecuațiile în complex, știind că înmulțirea cu j *înseamnă rotirea în sens direct cu* $\frac{\pi}{2}$, *iar împărțirea cu* j *înseamnă rotirea în sens invers cu* $\frac{\pi}{2}$.

Exemplu: Corespondența (34.71) a ecuațiilor în instantaneu și în complex ale circuitului serie r, L, C este în acest caz:

$$\begin{array}{ccccccc} u = & ri & + & L\dfrac{di}{dt} & + & \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i dt & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \underline{U} = & r\underline{I} & + & j\omega L\underline{I} & + & \dfrac{1}{j\omega C}\underline{I}, & \end{array} \tag{34.85}$$

iar diagrama vectorială din figura 34.11 se notează ca în figura 34.16, dacă se alege tensiunea ca origine de fază. Nici în cazul acesta nu prezintă utilitate să impunem axei reale o anumită direcție (de ex. cea orizontală de la stînga la dreapta).

Reprezentarea în complex se utilizează însă — așa cum am spus — la studiul sistematic al circuitelor electrice, împreună cu metode specifice de scriere directă a ecuațiilor în complex și de rezolvare a acestor ecuații. Pentru aceasta e necesară stabilirea mijloacelor de caracterizare a circuitelor cu mărimi complexe.

34.3. Caracterizarea în complex a circuitelor liniare.

Fie un circuit electric dipolar receptor, liniar și pasiv, ale cărui laturi interioare nu sînt cuplate magnetic cu exteriorul, la care se aplică tensiunea la borne sinusoidală, luată după regula de la receptoare:

$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta) \rightleftarrows \underline{U} = Ue^{j\beta}. \tag{34.86}$$

Dipolul absoarbe curentul de regim permanent:

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \underline{I} = Ie^{j\gamma}. \qquad (34.87)$$

Observație: În cazul studiului în complex al circuitelor se obișnuiește ca în schemele acestora să se treacă direct simbolurile imaginilor în complex ale mărimilor (v. fig. 34.17), în locul simbolurilor valorilor instantanee.

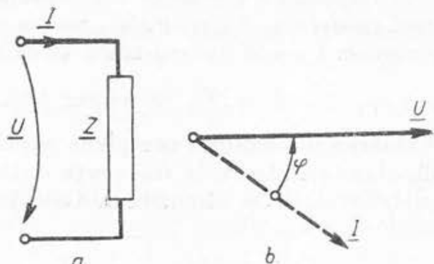


Fig. 34.17.

Caracterizarea acestui circuit în curent alternativ se face cu ajutorul parametrilor reali, definiți în paragraful 33.3 (impedanța, defazajul, rezistența, reactanța, admitanța, conductanța, susceptanța), iar caracterizarea regimului său energetic se face cu ajutorul puterilor reale, definite în paragraful 33.4 (puterea activă, puterea reactivă, puterea aparentă). Metoda reprezentării în complex se dovedește însă deosebit de eficace și în prezentarea unitară și concisă a proprietăților circuitelor electrice. Vom arăta în cele ce urmează că se pot defini parametri complecși (impedanța complexă, admitanța complexă) și o putere complexă, susceptibili de a asigura o caracterizare completă a circuitelor și din care se deduc imediat parametrii reali și puterile reale.

34.3.1. **Impedanța complexă.** Raportul dintre tensiunea complexă aplicată la bornele unui dipol liniar și pasiv și curentul complex corespunzător nu depinde decît de parametrii elementelor de circuit și de frecvență. Acest raport definește o mărime caracteristică dipolului, numită impedanță *complexă*

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}} = \Phi(\omega; r, L, C, ...) \qquad (34.88)$$

În adevăr, înlocuind în această relație expresiile imaginilor complexe (care pot fi nesimplificate sau simplificate) se obține:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\beta)}}{I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)}} = \frac{Ue^{j\beta}}{Ie^{j\gamma}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I}\,e^{j(\beta-\gamma)} =$$

$$= \frac{U}{I}\cdot\cos(\beta-\gamma) + j\frac{U}{I}\sin(\beta-\gamma).$$

Dar $\frac{U}{I} = Z$ e *impedanța* (reală), iar $\beta - \gamma = \varphi$ e *defazajul*, care, așa cum știm din relațiile (33.73) și (33.74), caracterizează circuitul la o frecvență dată. Impedanța complexă nu depinde deci de mărimile $\underline{U}$ și $\underline{I}$, prin care a fost definită,

ci numai de dipolul pe care îl caracterizează. Ţinînd seama de aceste relaţii şi de relaţiile (33.78) şi (33.79), rezultă :

$$\boxed{\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = R + jX} \cdot \tag{34.89}$$

Impedanţa complexă are modulul egal cu impedanţa circuitului, argumentul egal cu defazajul circuitului, partea reală egală cu rezistenţa circuitului şi partea imaginară egală cu reactanţa circuitului :

$$Z = |\underline{Z}|, \quad \varphi = \arg\{\underline{Z}\}, \quad R = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\}, \quad X = \mathrm{Im}\{\underline{Z}\}. \tag{34.90}$$

Valoarea impedanţei complexe $\underline{Z}$ permite o caracterizare completă a circuitului dipolar considerat, la frecvenţa dată, deoarece permite deducerea tuturor parametrilor reali ai circuitului. Calculul curentului se face imediat cu relaţia :

$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}} = \frac{Ue^{j\beta}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{U}{Z} e^{j(\beta-\varphi)}, \tag{34.91}$$

iar

$$i(t) = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}\, \underline{I} e^{j\omega t}\right\}. \tag{34.91'}$$

Ca orice numere complexe, impedanţele complexe se pot reprezenta într-un plan complex „al impedanţelor" (planul Z), în care afixul corespunzător se găseşte totdeauna în semiplanul drept (inclusiv axa imaginară), deoarece :

$$\mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = Z\cos\varphi = R \geqslant 0.$$

În figura 34.18, *a* sînt reprezentate impedanţele unui circuit inductiv ($\underline{Z}$), pur inductiv ($\underline{Z}_1$), capacitiv ($\underline{Z}_2$), pur capacitiv ($\underline{Z}_3$) şi rezistiv ($\underline{Z}_4$).

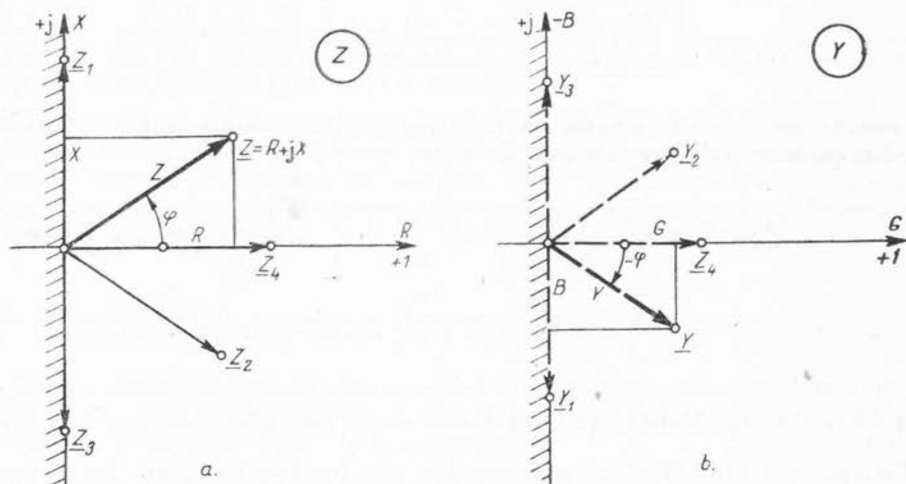


Fig. 34.18.

O b s e r v a ț i e : Impedanța complexă *nu este o reprezentare în complex* a raportului valorilor instantanee ale tensiunii și curentului (raport care — de altfel — nu e o mărime sinusoidală), sau a oricărei alte mărimi instantanee. De aceea, uneori se folosește și o notație diferită de cele folosite pentru imaginile complexe. Ea este un parametru complex, caracteristic circuitului, care acționează în ecuațiile în complex ale circuitului ca un *operator* de înmulțire.

34.3.2. **Admitanța complexă.** Raportul dintre curentul complex și tensiunea complexă aplicată la bornele unui dipol liniar și pasiv definește o mărime egală cu valoarea reciprocă a impedanței complexe și numită *admitanță complexă* :

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \Psi\,(\omega;\ r, L, C, ...). \tag{34.92}$$

Și admitanța complexă depinde numai de structura dipolului și de frecvență, fiind o caracteristică a acestui dipol. Înlocuind expresiile imaginilor complexe ale curentului și tensiunii, se oține :

$$\underline{Y} = \frac{I\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\gamma)}}{U\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\beta)}} = \frac{Ie^{j\gamma}}{Ue^{j\beta}} = \frac{I}{U}\,e^{-j(\beta-\gamma)} =$$

$$= \frac{I}{U}\cos(\beta-\gamma) - j\,\frac{I}{U}\sin(\beta-\gamma).$$

Cu relațiile (33.74'), (33.82), (33.85) și (33.86) rezultă :

$$\boxed{\underline{Y} = Ye^{-j\varphi} = G - jB}\ ^{1}. \tag{34.93}$$

Admitanța complexă are modulul egal cu admitanța circuitului, argumentul egal cu defazajul cu semn schimbat, partea reală egală cu conductanța circuitului și partea imaginară egală cu susceptanța circuitului cu semn schimbat :

$$Y = |\underline{Y}|,\quad \varphi = -\arg\{\underline{Y}\},\quad G = \mathrm{Re}\{\underline{Y}\},\quad B = -\mathrm{Im}\{\underline{Y}\}. \tag{34.94}$$

Valoarea admitanței complexe $\underline{Y}$ permite o caracterizare completă a circuitului dipolar considerat la frecvența dată, deoarece permite deducerea tuturor parametrilor reali ai circuitului. Calculul curentului se face imediat cu relația :

$$\underline{I} = \underline{Y}\underline{U} = \underline{U}Ye^{-j\varphi} = UYe^{j(\beta-\gamma)} \tag{34.95}$$

și cu $i(t)$ dat de relația (34.91').

Ca orice numere complexe, admitanțele complexe se pot reprezenta într-un plan complex „al admitanțelor" (planul Y), în care afixul corespunzător se găsește totdeauna în semiplanul drept (inclusiv axa imaginară), deoarece

$$\mathrm{Re}\{\underline{Y}\} = Y\cos\varphi = G \geqslant 0.$$

În figura 34.18, *b* sînt reprezentate impedanțele unui circuit inductiv ($\underline{Y}$), pur inductiv ($\underline{Y}_1$), capacitiv ($\underline{Y}_2$), pur capacitiv ($\underline{Y}_3$) și rezistiv ($\underline{Y}_4$).

---

[1] Dacă susceptanța s-ar defini prin relația $B' = -Y\sin\varphi$, atunci am avea $\underline{Y} = G + jB'$.

Observaţie: Admitanţa complexă *nu este o reprezentare în complex* a cîtului valorilor instantanee ale curentului şi tensiunii sau a oricărei alte mărimi instantanee. Ea este un parametru complex, caracteristic circuitului, care acţionează în ecuaţii ca *operator* de înmulţire.

34.3.3. **Puterea complexă.** După ce am studiat reprezentarea în complex a operaţiilor elementare (par. 34.2.1), am arătat că produsul a două mărimi instantanee nu e o mărime sinusoidală şi nu se poate reprezenta în complex. De aceea, nici puterea instantanee p la bornele unui dipol (generator sau receptor) (v. par. 33.4.1).

$$p = ui = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t + \gamma + \beta) \qquad (34.96)$$

nu se poate reprezenta în complex după regulile reprezentării stabilite pentru mărimi sinusoidale.

Se poate defini însă o mărime complexă, care să strîngă în aceeaşi expresie puterea activă, puterea reactivă şi puterea aparentă, utilizate pentru caracterizarea regimului permanent al circuitelor (v. par. 33.4), folosind proprietatea exprimată de relaţiile (34.69), (34.70).

Se numeşte *putere complexă* (uneori putere aparentă complexă) mărimea $\underline{S}$ definită de produsul dintre tensiunea complexă şi valoarea conjugată a curentului complex în reprezentare simplificată (sau cu semi-suma acestui produs, în reprezentarea nesimplificată):

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \frac{1}{2}\underline{u}\,\underline{i}^*. \qquad (34.97)$$

Înlocuind expresiile explicite ale imaginilor complexe, se verifică ultima egalitate şi se separă partea reală, partea imaginară, modulul şi argumentul acestei mărimi:

$$\frac{1}{2}\underline{u}\,\underline{i} = \frac{1}{2}U\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\beta)}\cdot I\sqrt{2}\,e^{-j(\omega t+\gamma)} = Ue^{j\beta}Ie^{-j\gamma} = \underline{U}\,\underline{I}^*$$

$$\underline{U}\,\underline{I}^* = UIe^{j(\beta-\gamma)} = UI\cos(\beta-\gamma) + jUI\sin(\beta-\gamma).$$

Ţinînd seama de relaţiile (33.104), (33.106) şi (33.110), rezultă:

$$\underline{S} = Se^{j\varphi} = UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ. \qquad (34.98)$$

Puterea complexă are modulul egal cu puterea aparentă, argumentul egal cu defazajul circuitului, partea reală egală cu puterea activă (adică valoarea medie a puterii instantanee) şi partea imaginară egală cu puterea reactivă:

$$S = |\underline{S}| = UI; \quad \varphi = \arg\{\underline{S}\} \qquad (34.99)$$

$$P = \widetilde{p} = UI\cos\varphi = \mathrm{Re}\{\underline{S}\}; \quad Q = UI\sin\varphi = \mathrm{Im}\{\underline{S}\}. \qquad (34.100)$$

O dată cu P şi Q, puterea complexă e primită (ca sens de referinţă), dacă tensiunea $\underline{U}$ şi curentul $\underline{I}$ sînt asociate ca sensuri după regula de la receptoare — şi e produsă (ca sens de referinţă), dacă tensiunea $\underline{U}$ şi curentul $\underline{I}$ sînt asociate ca sensuri după regula de la generatoare.

Ca orice număr complex și puterea complexă se poate reprezenta într-un plan complex „al puterilor" (planul S).

La dipoli activi, poziția afixului puterii complexe poate fi oricare în planul puterilor ($\underline{S}$, $\underline{S}_1$, $\underline{S}_2$, $\underline{S}_3$ în fig. 34.19). În adevăr, la acești dipoli $P \gtreqless 0$ și $Q \gtreqless 0$, în funcție de sensul real al transmisiunii puterii și de convenția de asociere a sensurilor de referință ale tensiunii și curentului. De exemplu, $\underline{S}_2$ poate fi puterea complexă la bornele unui dipol activ receptor (la care $\underline{U}$ și $\underline{I}$ se asociază după regula de la receptoare) cînd produce putere activă și primește putere reactivă — dar poate fi și puterea complexă la bornele unui dipol activ generator (la care $\underline{U}$ și $\underline{I}$ se asociază după regula de la generatoare) cînd primește putere activă și produce putere reactivă.

La dipoli pasivi, poziția afixului puterii complexe e conținută numai într-un semi-plan, și anume semiplanul drept (dacă se folosește convenția de asociere de la receptoare, așa cum se obișnuiește). În adevăr, la dipoli pasivi receptori $P \geqslant 0$ și $Q \gtreqless 0$. În figura 34.19, $\underline{S}$ e puterea complexă primită de un dipol inductiv ($Q > 0$), iar $\underline{S}_1$ puterea complexă primită de un dipol capacitiv ($Q < 0$).

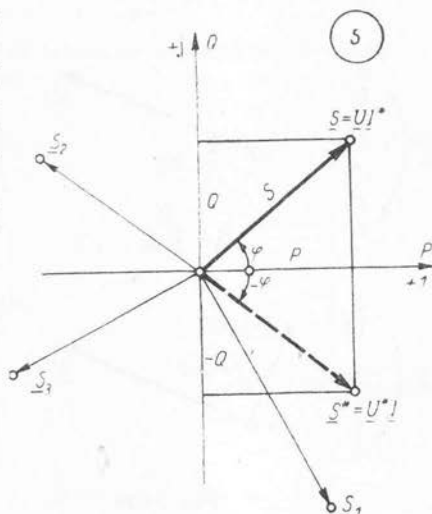


Fig. 34.19.

Puterea complexă primită de un *dipol pasiv* se mai exprimă folosind impedanța complexă și admitanța complexă:

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{Z}\ I^2 = \underline{Y}^*\ U^2 = (R + \mathrm{j}X)\ I^2 = (G + \mathrm{j}B)U^2. \qquad (34.101)$$

O b s e r v a ț i i: *a)* Puterea complexă $\underline{S}$ *nu este imaginea în complex a puterii instantanee p*, care — așa cum am menționat la începutul paragrafului — nu se poate reprezenta în complex.

b) Se poate opera în locul mărimii $\underline{S}$ cu mărimea (v. și fig. 34.19):

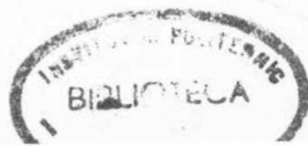
$$\underline{S}^* = \underline{U}^*\,\underline{I} = U\ I\ \mathrm{e}^{-j\varphi} = UI\ \cos\varphi - \mathrm{j}UI\ \sin\varphi = P - \mathrm{j}Q, \qquad (34.102)$$

numită putere complexă conjugată. Se operează cu această putere complexă în special în cazul cînd conjugata tensiunii complexe se calculează mai ușor decît a curentului complex (de ex. cînd $\underline{U} = \underline{U}^* = U$, deoarece e luat origine de fază).

c) O mărime complexă definită de produsul imaginilor complexe ale tensiunii și curentului (fără ca vreunul din factori să fie conjugat) nu poate caracteriza regimul permanent energetic al circuitului. În adevăr, această mărime:

$$\underline{U}\ \underline{I} = U\ I\ \mathrm{e}^{j\beta+\gamma} = UI\ \cos\,(\beta + \gamma) + \mathrm{j}\ UI\ \sin\,(\beta + \gamma)$$

are valori care depind de alegerea arbitrară a originii timpului (prin suma $\beta + \gamma$ a fazelor inițiale). O astfel de mărime nu are nici o semnificație fizică adecvată studiului regimului permanent.



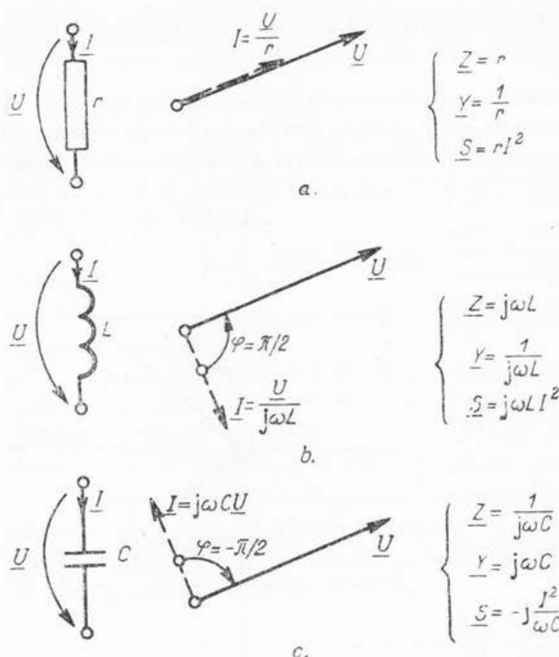


Fig. 34.20.

34.3.4. Caracterizarea elementelor de circuit în complex. Pentru studiul în complex al circuitelor de curent alternativ este necesar să se cunoască proprietățile și modul de caracterizare al elementelor ideale de circuit r, L, C. Considerăm că li se aplică o tensiune sinusoidală dată (34.86), cu imaginea complexă $\underline{U} = U e^{j\beta}$ și determinăm curentul $\underline{I} = I e^{j\gamma}$, parametrii caracteristici și puterile.

În studiul în complex al circuitelor, pe scheme se figurează simbolurile imaginilor complexe (în locul simbolurilor mărimilor instantanee) alături de săgețile sensurilor de referință — totdeauna necesare pentru scrierea ecuațiilor și interpretarea rezultatelor (v. fig. 34.20).

a) *Rezistorul ideal*, de rezistență r, are ecuația (31.22), reprezentată în complex, utilizînd regula amplificării cu un scalar (34.82) :

$$u = r\,i = u_r \rightleftarrows \underline{U} = \boxed{r\ \underline{I} = \underline{U}_r}\,. \tag{34.103}$$

Aceasta e expresia în complex a căderii de tensiune rezistive. Rezultă :

— impedanța complexă a rezistorului ideal :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = r}\,, \tag{34.104}$$

cu $Z = r$, $\varphi = 0$, $R = r$, $X = 0$.

— admitanța complexă a rezistorului ideal :

$$\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \boxed{\underline{Y} = \frac{1}{r}}\,, \tag{34.105}$$

cu $\quad Y = 1/r, \qquad G = 1/r, \qquad B = 0.$

— puterea complexă a rezistorului ideal :

$$\underline{U}\,\underline{I}^* = \boxed{\underline{S} = r\,I^2 = \frac{U^2}{r}} \tag{34.106}$$

cu $\quad P = RI^2 = rI^2 = U^2/r > 0, \quad Q = XI^2 = 0.$

Am regăsit toate valorile scalare determinate cu metoda reprezentării geometrice (34.21...34.23).

b) *Bobina ideală* de inductivitate L are ecuația (31.26), reprezentată în complex, utilizînd regula derivării (34.83) și a amplificării cu un scalar (34.82) :

$$u = L\frac{di}{dt} = u_L \rightleftarrows \underline{U} = \boxed{j\omega L\ \underline{I} = \underline{U}_L}\ . \qquad (34.107)$$

Aceasta e expresia în complex a căderii de tensiune inductive. Rezultă :

— impedanța complexă a bobinei ideale :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = j\ \omega\ L}\ , \qquad (34.108)$$

cu

$$Z = \omega L,\ \varphi = \pi/_2, \qquad R = 0, \qquad X = \omega\ L > 0.$$

— admitanța complexă a bobinei ideale :

$$\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \boxed{\underline{Y} = \frac{1}{j\ \omega\ L}}, \qquad (34.109)$$

cu

$$Y = 1/\omega L, \qquad G = 0, \qquad B = \omega L > 0.$$

— puterea complexă a bobinei ideale :

$$\underline{U}\ \underline{I}^* = \boxed{\underline{S} = j\omega L\ I^2 = j\ \frac{U^2}{\omega L}}, \qquad (34.110)$$

cu

$$P = RI^2 = 0, \qquad Q = XI^2 = \omega LI^2 = U^2/\omega L > 0.$$

Am regăsit toate valorile scalare determinate cu metoda reprezentării geometrice (34.24...34.26).

c) *Condensatorul ideal* de capacitate C are ecuația (31.30′), reprezentată în complex, utilizînd regula integrării (34.84) și a amplificării cu un scalar (34.82) :

$$u = \frac{1}{C}\int i\ dt = u_C \rightleftarrows \underline{U} = \boxed{\frac{\underline{I}}{j\ \omega\ C} = \underline{U}_C}\ . \qquad (34.111)$$

Aceasta e expresia în complex a căderii de tensiune capacitive. Rezultă :

— impedanța complexă a condensatorului ideal :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = \frac{1}{j\ \omega\ C}}\ , \qquad (34.112)$$

cu

$$Z = 1/\omega C, \quad \varphi = -\pi/_2, \quad R = 0, \quad X = -1/\omega C.$$

— admitanţa complexă a condensatorului ideal:

$$\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \boxed{\underline{Y} = \mathrm{j}\,\omega\, C}, \tag{34.113}$$

cu

$$Y = \omega\ C, \qquad G = 0, \qquad B = -\ \omega\ C < 0.$$

— puterea complexă a condensatorului ideal:

$$\underline{U}\ \underline{I}^* = \boxed{\underline{S} = \frac{I^2}{\mathrm{j}\,\omega\, C} = -\,\mathrm{j}\,\omega C\ U^2}, \tag{34.114}$$

cu

$$P = R\,I^2 = 0, \qquad Q = X\,I^2 = -\,I^2/\omega\ C = -\ \omega\ C\ U^2 < 0.$$

Am regăsit toate valorile scalare determinate cu metoda reprezentării geometrice (34.27...34.29).

În figura 34.20 sînt construite şi diagramele vectoriale corespunzătoare (cu notaţia de la reprezentarea în complex).

34.4. Formele complexe ale „legii lui Ohm"

34.4.1. **Analogii cu circuitele de curent continuu.** *În regim staţionar*, datorită lipsei tensiunii electromotoare induse (31.8), cîmpul electric este un cîmp potenţial şi tensiunea electrică nu depinde de drum. De aceea, în curent continuu (v. şi par. 13, vol. I), în expresia integrală (31.9) a legii conducţiei electrice, tensiunea în lungul firului poate fi înlocuită cu tensiunea la borne. Se obţine astfel „legea lui Ohm", sub forma

$$u_b = r\ i \tag{34.115}$$

pentru un dipol liniar şi pasiv, de rezistenţă r, alimentat cu tensiunea la borne u_b cu sensul asociat curentului după regula de la receptoare — sau sub forma mai generală

$$e \pm u_b = r\ i \tag{.16}$$

pentru un dipol liniar şi activ, conţinînd o sursă de tensiune electromotoare e, avînd sensul curentului. Semnul (+) din ultima relaţie corespunde dipolului receptor (sensul tensiunii la borne e asociat sensului curentului după regula de la receptoare), iar semnul (—) corespunde dipolului generator (sensul tensiunii la borne e asociat sensului curentului după regula de la generatoare).

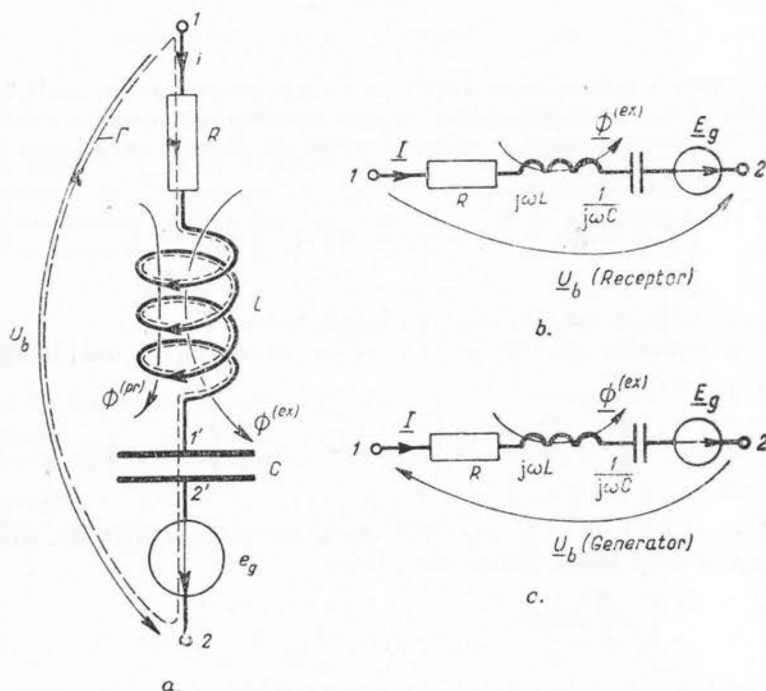
În regim nestaţionar şi deci şi în curent alternativ, datorită existenţei tensiunii electromotoare induse şi a prezenţei condensatoarelor, relaţiile (34.115) şi (34.116) nu mai sînt valabile în valori instantanee. Un analog formal al acestor relaţii se obţine dacă se operează cu imaginile în complex ale tensiunilor şi curenţilor. Analogul formal al relaţiei (34.115) rezultă din relaţia (34.88) de introducere a impedanţei complexe, pentru dipoli liniari şi pasivi:

$$\boxed{\underline{U} = \underline{Z}\ \underline{I}} \tag{34.117}$$

şi se numeşte *forma complexă a legii lui Ohm*. Analogul formal al relaţiei (34.116) este teorema lui Joubert, demonstrată în paragraful următor — şi care se mai numeşte *forma complexă generalizată a legii lui Ohm*.

Aceste analogii formale cu relaţiile fundamentale de la circuitele de curent continuu vor fi întregite prin formularea unor teoreme analoge teoremelor lui Kirchhoff (cap. 36) şi constituie unul din marile avantaje ale reprezentării în complex. Ele sînt limitate de existenţa impedanţelor mutuale (v. 34.4.3).

34.4.2. **Teorema lui Joubert.** Fie o latură activă de circuit electric (fig.34.21,*a*) cuplată magnetic cu altele, conţinînd un rezistor, o bobină, un condensator şi un generator de tensiune electromotoare instantanee dată e_g, avînd sensul de referinţă al curentului i. Inductivitatea proprie a laturii[1] este L, capacitatea condensatorului este C, rezistenţa totală a conductorului (de la borna 1 la armătura 1′ a condensatorului şi de la cealaltă armătură, 2′, la borna 2) este R, iar tensiunea la borne instantanee cu sensul de referinţă după regula



de la receptoare este $u_{12} = u_b$. Fie Γ o curbă luată în sensul curentului (de la 1 la 1′) prin interiorul conductorului laturii şi prin dielectricul condensatorului şi închisă pe la borne în sens opus tensiunii u_b. Fluxul total înlănţuit de latură,

[1] Această inductivitate include şi inductivitatea proprie a generatorului, dacă t.e.m. corespunzătoare nu e inclusă în e_g. Pentru definirea inductivităţii laturii şi — mai general — a fluxului înlănţuit de latură, suprafaţa de definiţie a fluxului se consideră sprijinită de linia tensiunii la borne (v. şi observaţia de la par. 31.3.2).

calculat prin suprafaţa S_Γ în sensul asociat sensului curentului burghiului drept, se compune din fluxul bobinei $\Phi = L\ i + \Phi^{(ex)}$ şi din fluxul care induce t.e.m. a generatorului e_g. Fluxul exterior $\Phi^{(ex)}$ e fluxul produs prin bobină de curenţii altor laturi. Tensiunea electromotoare indusă în lungul curbei Γ este :

$$\int_\Gamma \mathbf{E}\ d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} + e_g\ . \tag{34.118}$$

Această integrală se poate însă desface pe porţiuni :

$$\int_\Gamma \mathbf{E}\ d\mathbf{s} = \underset{\text{(fir)}}{\int_1^{1'} \mathbf{E}\ d\mathbf{s}} + \underset{\text{(dielectric)}}{\int_{1'}^{2'} \mathbf{E}\ d\mathbf{s}} + \underset{\text{(fir)}}{\int_{2'}^{2} \mathbf{E}\ d\mathbf{s}} + \underset{\text{(pe la borne)}}{\int_2^{1} \mathbf{E}\ d\mathbf{s}}$$

Primul şi al treilea termen reprezintă tensiunea în lungul firului, egală, conform legii conducţiei electrice, cu produsul dintre rezistenţă şi curent.
Termenul al doilea e tensiunea condensatorului, iar ultimul e tensiunea la borne cu semn schimbat :

$$\int_\Gamma \mathbf{E}\ d\mathbf{s} = u_R + u_C - u_b = R\ i + \frac{1}{C}\int i dt - u_b, \tag{34.118'}$$

ultima egalitate fiind valabilă pentru circuite liniare.

Egalînd expresiile (34.118) şi (34.118'), se obţine ecuaţia unei laturi receptoare active şi cuplate

$$e_g - \frac{d\Phi}{dt} = u_R + u_C - u_b = R\ i + \frac{1}{C}\int i\ dt - u_b\ . \tag{34.119}$$

Înlocuind $\Phi = Li + \Phi^{(ex)}$ şi separînd termenii dependenţi de curent, se obţine ecuaţia unei laturi liniare receptoare :

$$e_g - \frac{d\Phi^{(ex)}}{dt} + u_b = R\ i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\ dt. \tag{34.120}$$

Ecuaţia corespunzătoare în complex este :

$$\underline{E}_g - j\ \omega\underline{\Phi}^{(ex)} + \underline{U}_b = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\underline{I}\ . \tag{34.120'}$$

Factorul complex al curentului este chiar impedanţa complexă proprie $\underline{Z}$ a laturii. Se obţine astfel expresia teoremei lui Joubert pentru laturi receptoare (v. schema echivalentă din fig. 34.21, *b*) :

$$\underline{E}_g - j\,\omega\underline{\Phi}^{(ex)} + \underline{U}_b = \underline{Z}\ \underline{I}\ , \tag{34.121}$$

care pentru laturi generatoare (la care s-a luat $u_b = u_{21} = - u_{12}$ v. schema echivalentă din fig. 34.21, *c*) se scrie:

$$\underline{E}_g - j\omega \underline{\Phi}^{(ex)} - \underline{U}_b = \underline{Z}\, \underline{I} \qquad (34.121')$$

Aceste două expresii se scriu strîns:

$$\boxed{\underline{E}_g - j\omega \underline{\Phi}^{(ex)} \pm \underline{U}_b = \underline{Z}\, \underline{I}}, \qquad (34.122)$$

semnul (+) corespunzînd laturii receptoare și semnul (—) laturii generatoare.

Această relație constituie analogul pentru curent alternativ, în complex, al legii lui Ohm generalizate (34.116). Suma tensiunilor din membrul stîng se numește *tensiune aplicată*

$$\boxed{\underline{U}_a = \underline{E}_g - j\omega \underline{\Phi}^{(ex)} \pm \underline{U}_b} \qquad (34.123)$$

și coincide cu tensiunea la borne luată după regula de la receptoare, în cazul laturilor pasive ($\underline{E}_g = 0$) și necuplate $\left(\underline{\Phi}^{(ex)} = 0\right)$. Cu ajutorul tensiunii aplicate, teorema lui Joubert se enunță: *Tensiunea aplicată unei laturi de circuit (pasive sau active, cuplate sau necuplate) e egală cu produsul dintre impedanța proprie a laturii și curent:*

$$\boxed{\underline{U}_a = \underline{Z}\, \underline{I}} \cdot \qquad (34.124)$$

34.4.3. **Impedanțe mutuale.** Fluxul exterior instantaneu poate fi produs de curenții $i_2, i_3, ..., i_L$ ai altor $L - 1$ laturi de circuit. În acest caz vom da indicele 1 laturii studiate pînă acum, al cărei curent va fi $i = i_1$, a cărei inductivitate proprie va fi $L = L_{11}$, și al cărei flux exterior va fi $\Phi_1^{(ex)}$. Vom exprima acest flux cu ajutorul relației lui Maxwell (31.15):

$$\Phi_1^{(ex)} = \Phi_1 - L_{11}\, i_1 = \sum_{s=2}^{L} L_{1s}\, i_s, \qquad (34.125)$$

în care intervin inductivitățile mutuale $L_{1s} = L_{s1} \gtrless 0$. Semnul unei inductivități mutuale, de exemplu L_{12} (v. fig. 34.22), *depinde de sensurile de referință de pe circuite în raport cu care a fost definită*. Dacă $L_{12} > 0$, fluxul produs de circuitul 2 (parcurs de curentul i_2 în sensul de referință considerat pe acest circuit) înlănțuie circuitul 1 (v. fig. 34.22,*a*) într-un sens asociat după regula burghiului drept cu sensul de referință de pe circuitul 2 (sensul în care calculăm tensiunea electromotoare indusă de 2 în 1). Dacă $L_{12} < 0$, fluxul produs de circuitul 2 înlănțuie circuitul 1 (v. fig. 34.22,*c*) într-un sens opus celui asociat după regula burghiului drept. *De aceea, pe schemele echivalente ale circuitelor* (v. fig. 34.22, *b* pentru cazul din fig. 34.22, *a* și fig. 34.22,*d* pentru cazul din

fig. 34.22, c), *valoarea, pozitivă sau negativă, a inductivităţii mutuale trebuie însoţită de indicarea sensurilor ei de referinţă de pe circuite*, indicarea care se face cu steluţe (sau puncte), plasate alături de bornele „de intrare“ pentru

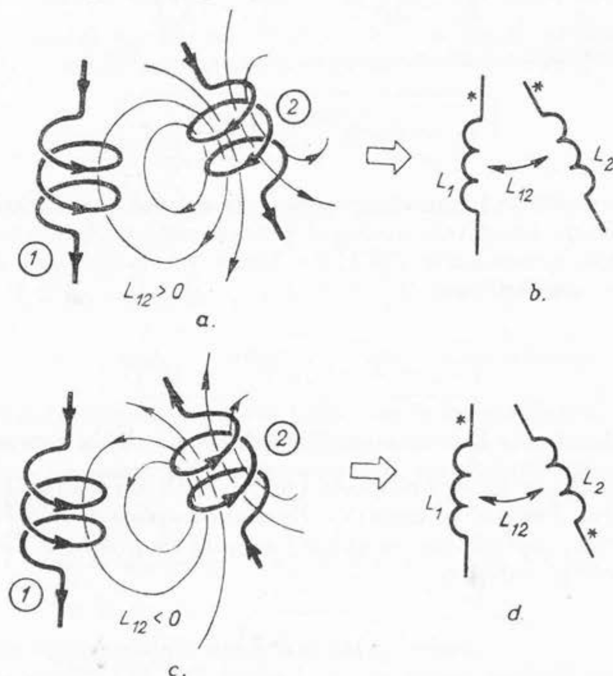


Fig. 34.22.

acele sensuri de referinţă (bornele polarizate). Indicarea nu se face cu săgeţi, pentru a nu se impune în nici un fel sensurile de referinţă ale curenţilor folosite la scrierea ecuaţiilor.

Tensiunea electromotoare indusă de fluxul exterior (34.125) are (în circuite liniare cu L_{rs} = const.) expresia instantanee :

$$e_1^{(ex)} = -\frac{\mathrm{d}\,\Phi_1^{(ex)}}{\mathrm{d}t} = -\sum_{s=2}^{L} L_{1s}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}, \tag{34.126}$$

respectiv în complex :

$$\underline{E}_1^{(ex)} = -\mathrm{j}\,\omega\,\underline{\Phi}_1^{(ex)} = -\sum_{s=2}^{L}\mathrm{j}\,\omega\,L_{1s}\,\underline{I}_s = -\sum_{s=2}^{L}\underline{Z}_{1s}\,\underline{I}_s\,. \tag{34.127}$$

Mărimea imaginară :

$$\boxed{\underline{Z}_{rs} = \mathrm{j}\,\omega\,L_{rs} = \mathrm{j}\,X_{rs}} = \underline{Z}_{sr} \tag{34.128}$$

se numește *impedanță complexă mutuală* dintre circuitele s și r, iar mărimea reală :

$$\boxed{X_{rs} = \omega L_{rs}} = X_{sr} \gtrless 0 \qquad (34.129)$$

se numește rectanță mutuală (inductivă). Deci, în cazul cînd fluxul exterior e produs de curenții altor laturi (liniare) de circuit, expresia (34.122) se poate scrie (afectînd acum indicele 1 tuturor mărimilor referitoare la latura studiată) :

$$\underline{E}_{g1} - \sum \underline{Z}_{1s}\, \underline{I}_s \pm \underline{U}_{b1} = \underline{Z}_1\, \underline{I}_1$$

sau

$$\boxed{\underline{E}_{g1} \pm \underline{U}_{b1} = \underline{Z}_1\, \underline{I}_1 + \sum_{s=2}^{L} \underline{Z}_{1s}\, \underline{I}_s} = \sum_{s=1}^{L} \underline{Z}_{1s}\, \underline{I}_s \,. \qquad (34.130)$$

Semnul (+) corespunde regulii de la receptoare, iar semnul (—) regulii de la generatoare pentru $\underline{U}_{b1}$. Mărimea

$$\underline{U}_{1s} = -\underline{E}_{1s} = \underline{Z}_{1s}\, \underline{I}_s = \mathrm{j}X_{1s}\, \underline{I}_s = \mathrm{j}\,\omega\, L_{1s}\, \underline{I}_s \qquad (34.131)$$
$$(s \neq 1)$$

se mai numește *cădere de tensiune indusă mutual* de curentul $\underline{I}_s$ în latura 1 și e egală și de semn contrar cu *tensiunea electromotoare indusă* de curentul $\underline{I}_s$ în latura 1 :

$$\underline{E}_{1s} = -\mathrm{j}\,\omega\, \underline{\Phi}_{1s} = -\mathrm{j}\,\omega\, L_{1s}\, \underline{I}_s = -\underline{Z}_{1s}\, \underline{I}_s. \qquad (34.132)$$

Comparînd relațiile (34.116) și (34.130), se constată imediat că analogia formală dintre relațiile fundamentale de la circuitele de curent continuu și cele de la circuitele de curent alternativ studiate în complex este imperfectă, în cazul cînd există tensiuni de inducție mutuală, respectiv impedanțe mutuale, care nu au analog în curent continuu.

Observație : *a)* Semnele din fața mărimilor L_{1s} și X_{1s} din ecuațiile (34.125), (34.126), (34.127), (34.128) se schimbă, dacă se schimbă unul dintre sensurile de referință ale curentului $\underline{I}_s$, sau al tensiunii electromotoare calculate în latura 1, față de sensurile de referință indicate de bornele polarizate, utilizate pentru definirea mărimii $L_{1s} \gtrless 0$.

b) Semnul din fața t.e.m. a generatorului $\underline{E}_g$ se schimbă dacă sensul de referință al acesteia e opus celui al curentului. În acest caz, $\underline{E}_g$ se mai numește *tensiune contraelectromotoare.*

Sistematizarea studiului rețelelor electrice cu ajutorul reprezentării în complex se poate face în strînsă analogie cu aceea a rețelelor de curent continuu (v. cap. 13, vol. I). La circuitele dipolare, determinarea curentului la tensiune dată se reduce la calculul impedanței complexe prezentate de circuit (v. rel. 34.91); de aceea interesează metodele de calcul ale acestei impedanțe în funcție de structura circuitului și de impedanțele laturilor lui (v. cap. 35). La rețele

mai complicate se utilizează forma complexă a teoremelor lui Kirchhoff (v. cap. 36), cu ajutorul cărora se poate rezolva orice problemă privitoare la rețelele liniare. Numeroase alte teoreme și metode de rezolvare, consecințe ale teoremelor lui Kirchhoff, sînt utilizate pentru simplificarea și sistematizarea calculelor (v. cap. 37).

35. IMPEDANȚE ECHIVALENTE ȘI UTILIZAREA LOR

35.1. Impedanța complexă echivalentă și admitanța complexă echivalentă

Considerăm un circuit dipolar oarecare D, a cărui tensiune la borne e sinusoidală, cu imaginea în complex $\underline{U}$. Presupunem că în regim permanent curentul este, de asemenea, sinusoidal și are imaginea în complex $\underline{I}$, considerată cu sensul de referință asociat tensiunii la borne *după regula de la receptoare* (fig. 35.1).

Se numește *impedanță echivalentă complexă* raportul dintre tensiunea la borne complexă și curentul complex, cu sensul asociat după regula de la receptoare ale unui circuit dipolar oarecare:

$$\underline{Z}_e = \left[\frac{\underline{U}b}{\underline{I}}\right]_{recep} = Z_e\, e^{j\varphi_e} = R_e + j\, X_e\,, \tag{35.1}$$

cu partea reală, $R_e \gtrless 0$, *rezistența echivalentă* — și cu partea imaginară, $X_e \gtrless 0$, *reactanța echivalentă.*

Impedanța echivalentă mai e numită impedanța „văzută" din exterior a circuitului.

Se numește *admitanță echivalentă complexă* valoarea reciprocă a impedanței echivalente complexe:

$$\boxed{\underline{Y}_e = \frac{1}{\underline{Z}_e} = \left[\frac{\underline{I}}{\underline{U}_b}\right]_{recep}} = Y_e\, e^{-j\varphi_e} = G_e - jB_e\,, \tag{35.2}$$

cu partea reală, $G_e \gtrless 0$, *conductanța echivalentă* — și cu partea imaginară cu semn schimbat, $B_e \gtrless 0$, *susceptanța echivalentă.*

Mărimile (35.1) și (35.2) se definesc pentru circuite oarecare, care pot fi active, neliniare, cuplate cu alte circuite etc., cu singura presupunere că $u_b(t)$ și $i(t)$ sînt sinusoidale (eventual componente sinusoidale ale unor funcțiuni periodice nesinusoidale). De aceea, impedanța echivalentă și admitanța echivalentă nu caracterizează circuitul la care se referă decît într-un

regim dat de funcționare, pot depinde de valoarea tensiunii și a curentului și pot avea părțile reale negative. Aceste mărimi generalizează noțiunile de impedanță complexă și admitanță complexă definite în paragraful 34.3. Pentru dipolii liniari, pasivi și necuplați cu alte circuite exterioare, impedanța (admitanța) echivalentă complexă este egală cu impedanța (admitanța) complexă definită anterior (rel. 34.88, 34.92) și are partea reală pozitivă.

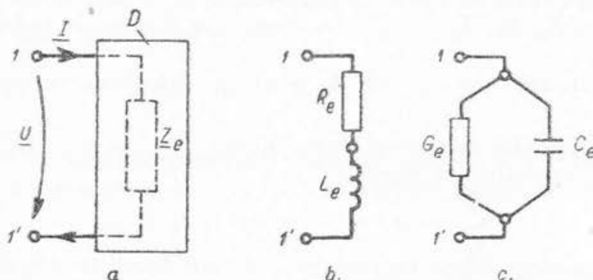


Fig. 35.1

Un circuit de impedanță echivalentă $\underline{Z}_e$ admite o schemă echivalentă, constituită dintr-o singură latură de circuit de impedanță $\underline{Z} = \underline{Z}_e$ (fig. 35.1, *a*). Dacă se definesc *inductivitatea echivalentă* L_e și *capacitatea echivalentă* C_e prin relațiile:

$$\boxed{L_e = \frac{X_e}{\omega}} = \frac{1}{\omega}\operatorname{Im}\{\underline{Z}_e\}; \quad \boxed{C_e = -\frac{B_e}{\omega}} = \frac{1}{\omega}\operatorname{Im}\{\underline{Y}_e\}, \tag{35.3}$$

circuitul mai admite o schemă echivalentă serie (fig. 35.1, *b*), compusă dintr-un rezistor ideal de rezistență $R_e = \operatorname{Re}\{\underline{Z}_e\}$ și o bobină ideală de inductivitate L_e, precum și o schemă echivalentă paralel (derivație), compusă dintr-un rezistor ideal de conductanță $G_e = \operatorname{Re}\{\underline{Y}_e\}$ și un condensator ideal de capacitate C_e (v. fig. 35.1, *c*).

Aceste scheme echivalente sînt utilizabile pentru studiul circuitului la o frecvență dată și în regimul de funcționare pentru care au fost definite $\underline{Z}_e$ și $\underline{Y}_e$. În general, aceste scheme nu sînt realizabile în concret, deoarece parametrii lor R_e, G_e, L_e, C_e nu sînt neapărat pozitivi și independenți de frecvență, cum sînt parametrii elementelor ideale de circuit.

În cazul general, pentru calculul impedanței echivalente e necesară rezolvarea circuitului respectiv (de ex. cu teoremele lui Kirchhoff, cap. 36), presupunînd că i se aplică tensiunea $\underline{U}_b$, pentru a afla curentul $\underline{I}$ absorbit.

Exemplu: Considerăm un dipol liniar și activ, cu o singură latură necuplată cu altele (fig. 35.2), de impedanță proprie $\underline{Z}$ și de t.e.m. $\underline{E}$. Din teorema lui Joubert pentru laturi receptoare (34.121) rezultă $\underline{U}_b + \underline{E} = \underline{Z}\,\underline{I}$. Impedanța echivalentă complexă (35.1) rezultă:

$$\underline{Z}_e = \left[\frac{\underline{U}_b}{\underline{I}}\right]_{recep} = \underline{Z} - \frac{\underline{E}}{\underline{I}} = R_e + \mathrm{j}\,X_e.$$

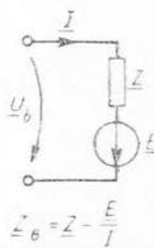


Fig. 35.2

Dacă t.e.m. e suficient de mare și proporțională cu curentul, se poate obține $R_e < 0$ și constant, adică se poate realiza în concret o rezistență echivalentă negativă.

În cazul particular al unor dipoli liniari, pasivi și fără inductivități mutuale între laturile lor interioare, impedanța echivalentă și admitanța echivalentă se pot calcula cu teoremele impedanțelor echivalente, eventual completate cu teoremele de transfigurare (v. par. 38.2).

35.2. Teoremele impedanţelor echivalente

35.2.1. **Dipoli în serie, necuplaţi inductiv** (fig. 35.3, *a*). Fie *n* dipoli pasivi, necuplaţi inductiv între ei sau cu exteriorul, şi conectaţi în serie, avînd impedanţele complexe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3, ..., \underline{Z}_n$. În lipsa unor fluxuri de inducţie exterioare, tensiunea instantanee $u_{11'} = \int_1^{1'} \mathbf{E}\, d\mathbf{s}$ poate fi calculată pe orice drum luat prin exteriorul dipolilor fie direct între borne ($u_{11'} = u_b$), fie urmînd succesiunea liniilor tensiunilor la borne:

$$u_{11'} = u_b = u_1 + u_2 + u_3 + ... \tag{35.4}$$

La conexiunea în serie, suma tensiunilor aplicate dipolilor e egală cu tensiunea aplicată la borne. În complex:

$$\underline{U}_b = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + ... \tag{35.4'}$$

Deoarece dipolii sînt pasivi şi necuplaţi inductiv între ei, tensiunea fiecăruia e egală cu produsul dintre impedanţa proprie şi curent (rel. 34.117):

$$\underline{U}_b = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{Z}_3\underline{I}_3. \tag{35.5}$$

În regim cvasistaţionar, curentul are însă aceeaşi valoare în lungul circuitului neramificat (conexiune serie):

$$\underline{I} = \underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = ... \tag{35.6}$$

şi împărţind relaţia (35.5) cu această valoare comună $\underline{I}$ a curentului rezultă cu relaţia (35.1):

$$\boxed{\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + ... = \sum_{s=1}^{n} \underline{Z}_s}\,. \tag{35.7}$$

Separînd părţile reale şi cele imaginare, se mai obţin relaţiile:

$$R_e = \sum_{s=1}^{n} R_s; \qquad X_e = \sum_{s=1}^{n} X_s. \tag{35.8}$$

La dipoli în serie, necuplaţi inductiv, impedanţa echivalentă complexă e suma impedanţelor complexe ale dipolilor, rezistenţa echivalentă e suma rezistenţelor lor, iar reactanţa echivalentă e suma reactanţelor lor. Am obţinut aceeaşi regulă ca pentru rezistoarele în serie în curent continuu (v. par. 13.5, vol. I).

Observaţii: *a*) Deoarece suma modulelor unor numere complexe nu este în general egală cu modulul sumei, rezultă că regula de mai sus nu e valabilă pentru impedanţele scalare:

$$|\underline{Z}_e| = Z_e \neq \sum_{s=1}^{n} Z_s \tag{35.9}$$

(exceptînd cazul cînd toţi dipolii au acelaşi defazaj).

b) Pentru admitanța echivalentă complexă din relația (35.7) rezultă la dipoli în serie:

$$\boxed{\frac{1}{\underline{Y}_e} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{\underline{Y}_s}} \; . \tag{35.10}$$

c) În cazul a numai două laturi în serie:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2; \quad \underline{Y}_e = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \, . \tag{35.11}$$

35.2.2. **Dipoli în paralel, necuplați inductiv** (fig. 35.3, *b*). Fie cei *n* dipoli din cazul precedent, conectați de astă dată în paralel. Admitanțele lor complexe sînt:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}; \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2};\ldots, \quad \underline{Y}_n = \frac{1}{\underline{Z}_n} \, .$$

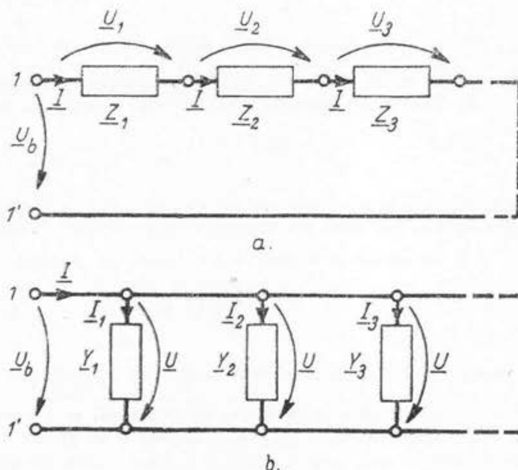


Fig. 35.3

În regim cvasistaționar, din teorema continuității (31.10) rezultă că suma curenților care ies dintr-un nod e nulă (teorema I-a a lui Kirchhoff, v. cap. 36). Ținînd seama de sensurile curenților celor *n* dipoli și de al curentului rezultant *i*, se poate scrie:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots \tag{35.12}$$

La conexiunea în paralel, curentul total absorbit e suma curenților dipolilor. În complex:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \ldots \tag{35.12'}$$

Deoarece dipolii sînt pasivi și necuplați inductiv între ei, curentul fiecăruia e egal cu produsul dintre admitanță și tensiune (rel. 34.95):

$$\underline{I} = \underline{Y}_1\underline{U}_1 + \underline{Y}_2\underline{U}_2 + \underline{Y}_3\underline{U}_3 + \ldots \tag{35.13}$$

În lipsa unor fluxuri de inducție exterioare, tensiunea la bornele circuitului e egală cu tensiunea aplicată fiecărui dipol în parte (conexiunea paralel):

$$\underline{U}_b = \underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{U}_3 = \ldots \tag{35.14}$$

și împărțind relația (35.13) cu această valoare comună, rezultă cu relația (35.2):

$$\boxed{\underline{Y}_e = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \ldots = \sum_{s=1}^{n} \underline{Y}_s} \; . \tag{35.15}$$

Separînd părţile reale şi cele imaginare, se mai obţin relaţiile :

$$G_e = \sum_{s=1}^{n} G_s \quad ; \quad B_e = \sum_{s=1}^{n} B_s. \tag{35.16}$$

La dipoli în paralel, necuplaţi inductiv, admitanţa echivalentă complexă e suma admitanţelor complexe ale dipolilor, conductanţa echivalentă complexă e suma conductanţelor lor, iar susceptanţa echivalentă complexă e suma susceptanţelor lor. Am obţinut aceeaşi regulă ca pentru rezistoarele în paralel, în curent continuu (v. par. 13.5, vol. I).

Observaţii: *a*) Teorema nu e valabilă pentru admitanţele scalare :

$$|\underline{Y}_e| = Y_e \neq \sum_{s=1}^{n} Y_s \tag{35.17}$$

(exceptînd cazul cînd toţi dipolii au acelaşi defazaj).

b) Pentru impedanţa echivalentă complexă, din relaţia (35.15) rezultă la dipoli în paralel :

$$\frac{1}{\underline{Z}_e} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_1} \tag{35.18}$$

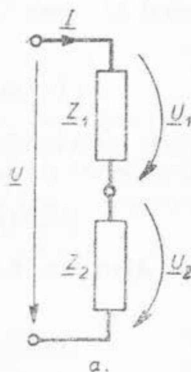
c) În cazul a numai două laturi în paralel

$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \quad ; \quad \underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \tag{35.19}$$

Ultima formulă e foarte mult utilizată în aplicaţii.

35.2.3. **Aplicaţii la divizarea tensiunii şi a curentului.** *Divizorul de tensiune* e un sistem de doi dipoli în serie ($\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$), căruia i se aplică tensiunea dată $\underline{U}$, astfel că la bornele fiecăruia din dipolii componenţi se obţine o „fracţiune" a tensiunii aplicate (v. fig. 35.4, *a*) : $\underline{U}_1$, respectiv $\underline{U}_2$. Deoarece dipolii sînt în serie $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ şi $\underline{I} = \underline{U}/\underline{Z}_e$, iar $\underline{U}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}$ şi $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2\underline{I}$. Se obţine :

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}, \qquad \underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}. \tag{35.20}$$



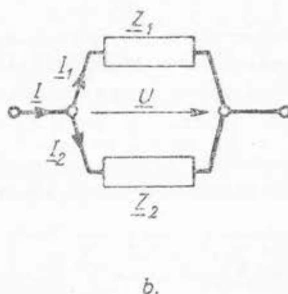


Fig. 35.4

Relaţiile obţinute arată că dacă un dipol e capacitiv şi altul inductiv, putem avea $|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2| < |\underline{Z}_1|$, şi tensiunile parţiale pot fi mai mari decît tensiunea aplicată. O divizare propriu-zisă se obţine numai cu $\varphi_1 = \varphi_2$. De obicei, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (divizor de tensiune rezistiv — sau potenţiometric) sau $\varphi_1 = \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$ (divizor de tensiune capacitiv); aceşti divizori se folosesc la măsurarea tensiunilor electrice înalte.

Divizorul de curent e un sistem de doi dipoli în paralel, care absoarbe din exterior curentul dat $\underline{I}$, astfel că în fiecare din dipolii componenţi se obţine cîte o „fracţiune" a curentului total

(fig. 35.4, *b*): $\underline{I}_1$, respectiv $\underline{I}_2$. Deoarece dipolii sînt în paralel, $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ și $\underline{U} = \underline{I}/\underline{Y}_e$, iar $\underline{I}_1 = \underline{U}\underline{Y}_1$ și $\underline{I}_2 = \underline{U}\underline{Y}_2$. Se obține:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\underline{I} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I} \quad (35\cdot21)$$

Curentul dintr-o latură e proporțional deci cu impedanța celeilalte laturi. Relațiile (35.21) sînt foarte utilizate în aplicații. Și în acest caz se obține o divizare propriu-zisă numai cu $\varphi_1 = \varphi_2$. De obicei, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (divizor de curent rezistiv — sau tip shunt, care se folosește la măsurarea curenților intenși).

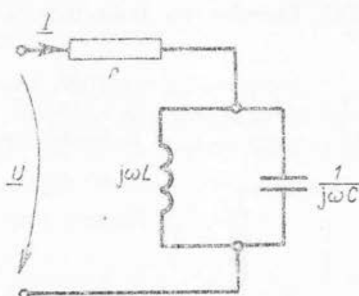


Fig. 35.5

35.2.4. **Aplicație numerică la rezolvarea unui circuit mixt (serie-paralel).** Se numește circuit mixt serie-paralel un circuit constituit din doi dipoli în paralel, conectați în serie cu un al treilea. Considerăm ca exemplu circuitul din figura 35.5, în care:

$$r = 3\Omega, \quad L\omega = 2\Omega, \quad \frac{1}{C\omega} = 6\Omega, \quad U = 120 \text{ V}.$$

Se determină valoarea instantanee a curentului absorbit, avînd tensiunea ca origine de fază, cu folosirea teoremelor impedanțelor echivalente. Impedanțele complexe ale celor trei ramuri sînt:

$$\underline{Z}_1 = r = 3, \quad \underline{Z}_2 = \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}2, \quad \underline{Z}_3 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}6.$$

Impedanța echivalentă grupului paralel (L, C) este:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\mathrm{j}2(-\mathrm{j}6)}{\mathrm{j}2 - \mathrm{j}6} = \frac{12}{-4\mathrm{j}} = 3\mathrm{j}.$$

Impedanța echivalentă a ansamblului ($\underline{Z}_1$ în serie cu $\underline{Z}_{23}$) este:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 3 + 3\mathrm{j} = 3\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{j\pi/4} = \underline{Z}_e\ \mathrm{e}^{j\varphi},$$

așa că impedanța scalară și defazajul sînt:

$$Z_e = 3\sqrt{2}\ \Omega, \quad \varphi_e = \frac{\pi}{4} = 45° > 0.$$

Curentul complex, cu $\underline{U} = U = 120$ origine de fază, este:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{120}{3\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{j\pi/4}} = 20\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-j\pi/4} = I\mathrm{e}^{j\gamma},$$

așa că valoarea efectivă a curentului e $I = 20\sqrt{2}$ A, iar valorile instantanee sînt:

$$i(t) = 20\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\ \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = 40\ \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right); \qquad u(t) = 120\sqrt{2}\ \sin \omega t.$$

Observație: La frecvența considerată, circuitul a rezultat inductiv. La o frecvență de două ori mai mare $\underline{Z}_2 = \mathrm{j}\,4$, $\underline{Z}_3 = -\mathrm{j}\,3$, $\underline{Z}_{23} = -\mathrm{j}12$ și $\underline{Z}_e = 3 - \mathrm{j}12$, adică $\varphi < 0$ și circuitul e capacitiv. Reactanța echivalentă a acestui circuit depinde de frecvență.

35.3. Circuite cu inductivităţi mutuale

Studiem, ca exemplu, un caz în care nu se pot utiliza teoremele impedanţelor echivalente (35.7, 35.18), deoarece dipolii sînt cuplaţi magnetic : o bobină de rezistenţă r_1 şi inductivitatea L_1 e conectată în serie cu o bobină de rezistenţă r_2 şi inductivitate L_2. Inductivitatea lor mutuală (pentru sensuri de referinţă corespunzătoare sensului curentului, v. fig. 35. 6, *a*) e notată L_{12} şi poate fi pozitivă (bobine cu fluxuri aditive) sau negativă (bobine cu fluxuri în opoziţie). Se cere schema echivalentă serie a acestui circuit, adică schema în care rezistenţa lui echivalentă R_e e în serie cu inductivitatea echivalentă L_e (fig. 35.6, *b*).

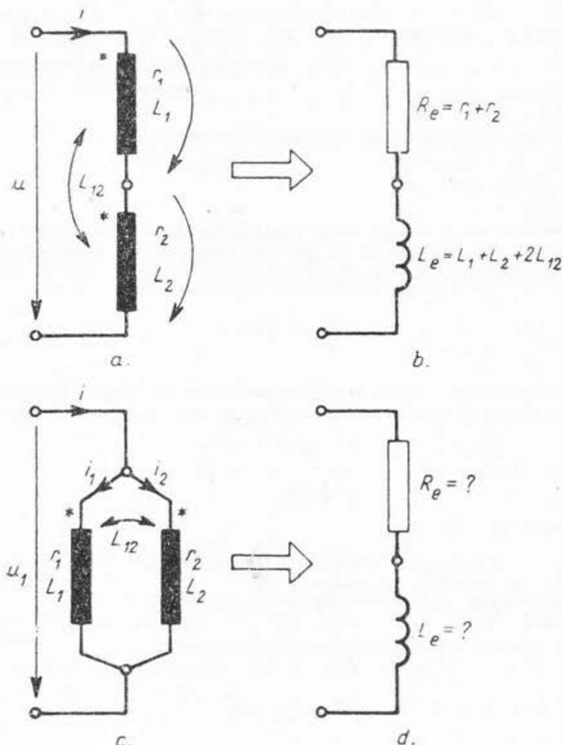


Fig. 35.6

Presupunem că se aplică tensiunea $\underline{U}$, de pulsaţie ω, şi că sistemul absoarbe curentul $\underline{I} = \underline{I}_1 = \underline{I}_2$. Căderile de tensiune la bornele fiecărei bobine în parte se pot exprima utilizînd teorema lui Joubert sub forma (34.130) :

$$\underline{U}_1 = (r_1 + j\omega L_1)\,\underline{I} + j\omega L_{12}\underline{I};$$

$$\underline{U}_2 = (r_2 + j\omega L_2)\,\underline{I} + j\omega L_{21}\underline{I},$$

adică :

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = [r_1 + r_2 + j\omega\;(L_1 + L_2 + 2L_{12})]\,\underline{I} = \underline{Z}_e\,\underline{I}.$$

Paranteza dreaptă care înmulţeşte curentul e chiar impedanţa echivalentă complexă. Rezultă rezistenţa echivalentă şi reactanţa echivalentă :

$$R_e = r_1 + r_2,\quad X_e = \omega\;(L_1 + L_2 + 2\;L_{12}), \tag{35.22}$$

respectiv inductivitatea echivalentă (35.3) :

$$\boxed{\frac{X_e}{\omega} = L_e = L_1 + L_2 \pm 2|L_{12}|}\,, \tag{35.23}$$

unde semnul (+) corespunde bobinelor cu fluxuri aditive, iar semnul (—) corespunde bobinelor cu fluxuri în opoziţie.

Ca exerciţiu propunem stabilirea schemei echivalente (din figura 35.6, *d*) pentru circuitul paralel, cu laturi cuplate, din figura 35.6, *c*.

35.4. Circuite rezonante

Un *sistem oscilant*, mecanic sau electric, e un sistem care, în lipsa unei „forțe“ exterioare (în cazul unui circuit electric, în lipsa unei tensiuni aplicate), poate prezenta oscilații proprii slab amortizate, adică un regim liber oscilatoriu amortizat (v. par. 32.3). În cazul general, aceste oscilații sînt suprapuneri de oscilații cvasisinusoidale, cu diferite frecvențe proprii $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$.

De exemplu, circuitul serie r, L, C, studiat în paragraful 32·3, avea o singură frecvență proprie, corespunzătoare pulsației (32.27):

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{R^2C}{4L}} = \omega_0\sqrt{1-\frac{R^2C}{4L}} \approx \omega_0\left(1-\frac{R^2C}{8L}\right). \qquad (35.24)$$

Să presupunem că unui astfel de sistem oscilant i se aplică o „forță“ exterioară periodică, de frecvență unghiulară ω. În regim permanent, oscilațiile forțate ale sistemului vor avea amplitudini și faze inițiale dependente de frecvența „forței“ exterioare. Dacă această frecvență variază lent, se observă următoarele: pentru anumite valori ale frecvenței exterioare, amplitudinile oscilațiilor trec prin valori maxime sau minime cu atît mai nete, cu cît amortizarea sistemului e mai mică; pentru aceleași valori ale frecvenței (sau foarte apropiate de acestea), oscilațiile forțate ajung în cvadratură (deplasările) sau în fază (vitezele) cu „forța“ exterioară; valorile frecvenței la care se observă extremum-ul amplitudinilor sau valorile critice ale defazajelor sînt foarte apropiate de frecvențele proprii ale sistemului. Acest fenomen se numește *rezonanță*.

În cazul circuitelor electrice în regim permanent sinusoidal sub tensiune aplicată dată, fenomenul de rezonanță consistă în trecerea amplitudinii curentului absorbit din exterior prin valori maxime (rezonanța propriu-zisă) sau minime (antirezonanța), cum și în anularea defazajului și a puterii reactive absorbite — atunci cînd frecvența are valori apropiate de acelea ale frecvențelor proprii.

Caracterizarea *exactă* a stării de rezonanță se poate face în mai multe moduri — care toate sînt echivalente, în practică, pentru circuitele slab amortizate (de înaltă calitate). Astfel, pentru pulsația de rezonanță ω_r [1] se folosește una din următoarele trei definiții:

ω_{r1} — pulsația tensiunii aplicate, la care circuitul absoarbe o putere reactivă nulă, respectiv la care are defazaj nul;

ω_{r2} — pulsația tensiunii aplicate, la care impedanța scalară e minimă sau maximă, respectiv curentul e maxim sau minim la tensiune dată;

$\omega_{r3}=\omega_p$ — pulsația oscilațiilor proprii.

În acest curs vom considera pulsația ω_{r1} ca *pulsație de rezonanță*. Pentru circuite foarte slab amortizate (cu rezistențe foarte mici față de reactanțele

[1] Prin împărțirea pulsației de rezonanță cu 2π, aceleași definiții conduc la frecvența de rezonanță $f_r = \omega_r/2\pi$.

bobinelor și ale condensatoarelor la frecvența de rezonanță), cele trei valori de mai sus tind către o valoare limită unică, numită *pulsația ideală de rezonanță* :

$$\omega_0 = \lim_{r_k \to 0} \omega_{r1} = \lim_{r_k \to 0} \omega_{r2} = \lim_{r_k \to 0} \omega_p$$

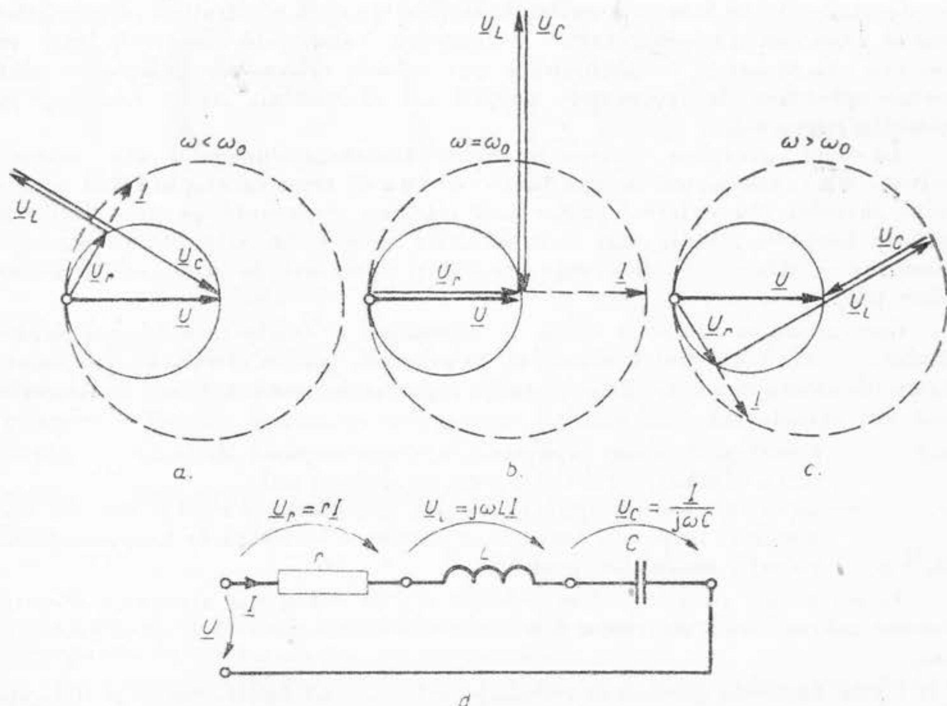
(limita fiind considerată la valori tinzînd către zero ale rezistențelor r_k ale laturilor $k = 1, 2, ..., L$).

Pentru un circuit care conține un singur condensator de capacitate C și o singură bobină de inductivitate L, pulsația ideală de rezonanță rezultă din (35.24) cu $R \to 0$ și este :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{cu} \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} . \qquad (35.24')$$

Această formulă se numește *formula lui Thomson*. În cele ce urmează, vom studia cele mai simple circuite rezonante și unele aplicații ale lor.

35.4.1. Circuitul cu rezonanță de tensiune (rezonanță serie). Considerăm circuitul serie r, L, C (fig. 35.7, d), studiat pînă acum, ca exemplu, cu diferite metode. Dacă $r < 2\sqrt{L/C}$, regimul său liber e oscilatoriu amortizat (v. rel. 32.26), cu pulsația proprie (35.24).



Curentul se poate calcula și cu ajutorul impedanței echivalente complexe, care e suma impedanțelor elementelor conectate în serie:

$$\underline{Z} = r + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = r + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{35.25}$$

Curentul complex sub tensiunea la borne $\underline{U} = U$, luată ca origine de fază, este:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{Z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma},$$

Cu valoarea efectivă:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = I\,(\omega). \tag{35.26}$$

Dacă pulsația variază în intervalul $(0, \infty)$, curentul crește, pornind de la valoarea $I\,(0) = 0$ și are un maxim pentru pulsația ω_{r2}, la care impedanța e minimă, adică reactanța e nulă

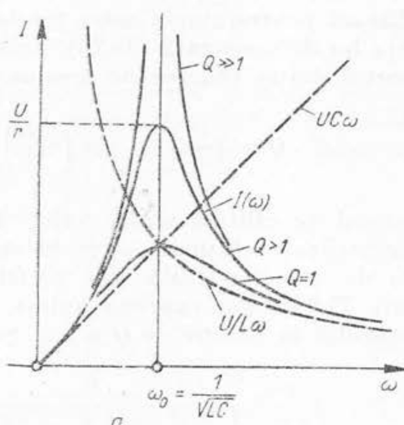
$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0, \tag{35.27}$$

adică

$$\omega_{r2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \neq \omega_p. \tag{35.28}$$

Maximul curentului este:

$$I(\omega_{r2}) = I_0 = \frac{U}{r}. \tag{35.29}$$



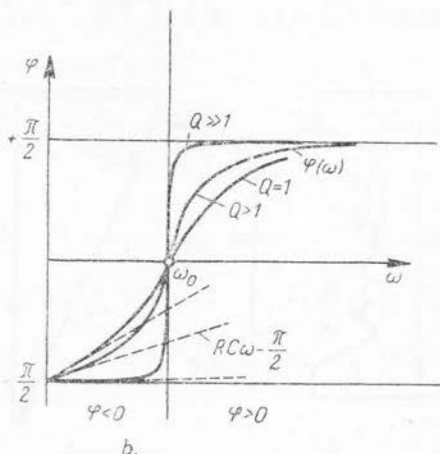


Fig. 35.8

La rezonanță, impedanța circuitului e egală cu rezistența lui și e foarte mică. Pentru $\omega > \omega_{r2} = \omega_0$, curentul scade, tinzînd asimptotic către zero (fig. 35.8,*a*). Defazajul circuitului rezultă din relația (35.25):

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{X}{R} = \operatorname{arc\,tg}\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r} = \varphi(\omega). \tag{35.30}$$

La pulsații mici, circuitul e capacitiv ($\varphi < 0$), și anume $\varphi\,(0) = -\frac{\pi}{2}$. O dată cu creșterea pulsației, defazajul (negativ) scade în valoare absolută și

se anulează la pulsația care anulează pe tg φ, adică la pulsația care anulează reactanța (35.27). Pulsația de rezonanță ω_{r1} e deci tot ω_0

$$\omega_{r1} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \neq \omega_p. \qquad (35.31)$$

Pentru $\omega > \omega_{r1} = \omega_0$, circuitul e inductiv ($\varphi > 0$) și defazajul tinde către $\frac{\pi}{2}$ cînd $\omega \to \infty$ (fig. 35.8, *b*).

În figura 35.7 sînt construite diagramele vectoriale pentru $\omega < \omega_0$ (fig. *a*), $\omega = \omega_0$ (fig. *b*), $\omega > \omega_0$ (fig. *c*). Din însăși construcția geometrică a diagramei rezultă că vîrful fazorului căderii de tensiune din rezistență $\underline{U}_r = r\,\underline{I}$, și deci și al fazorului curentului $\underline{I}$ descriu cîte un cerc. Se mai observă că în acest circuit tensiunile la bornele condensatorului $\underline{U}_C$ și ale bobinei $\underline{U}_L$ pot atinge la rezonanță valori efective mari, și anume, mai mari decît ale tensiunii aplicate la borne. De aceea, circuitul se numește *circuit cu rezonanță de tensiune* și se utilizează pentru amplificarea tensiunilor slabe, avînd frecvența egală cu frecvența lui de rezonanță (35.28). Se numește *factor de calitate*, Q, al circuitului, raportul dintre căderea de tensiune din bobină și cea aplicată la rezonanță

$$Q = \left(\frac{U_1}{U}\right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{L\omega I}{U}\right)_{\omega=\omega_0} = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{C\omega_0 r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (35.32)$$

Factorul de calitate atinge valori foarte mari — de ordinul sutelor în circuitele oscilante obișnuite — și de aceea diagramele din figura 35.7 sînt depărtate de situația reală din astfel de circuite. Curbele de rezonanță din figura 35.8 se pot exprima unitar, înlocuind în (35.26) și (35.30) parametrii circuitului în funcție de Q și ω_0. Se obțin relațiile :

$$I = \frac{U}{r}\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}; \quad \varphi = \text{arc tg}\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]. \qquad (35.33)$$

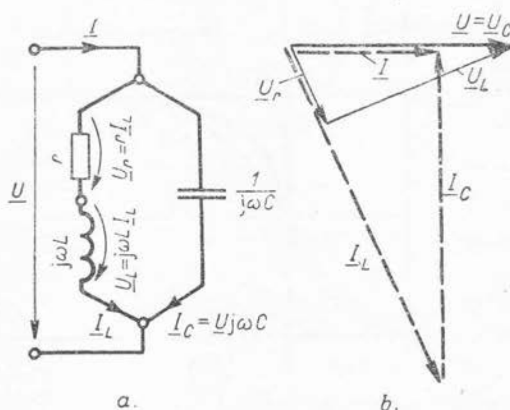


Fig. 35.9

Pentru $r \to 0$, $Q \to \infty$ și curentul $I = U/(L\omega - 1/C\omega)$ tinde către infinit la frecvența de rezonanță, dacă tensiunea la borne e menținută constantă. Circuitul serie de înaltă calitate ($Q \gg 1$) constituie un scurtcircuit pentru curenții de frecvență corespunzătoare, $\omega = \omega_0$.

35.4.2. **Circuitul cu rezonanță de curent (rezonanță paralel).** Considerăm o bobină de rezistență r și inductivitate L în paralel, cu un condensator de capacitate C. Rezistența laturii cu condensatorul o considerăm neglijabilă (fig. 35.9, *a*).

Admitanța circuitului se calculează cu teoremele impedanțelor echivalente:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{r + \mathrm{j}\omega L} = \frac{1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}r\omega C}{r + \mathrm{j}\omega L}. \quad (35.34)$$

Curentul complex sub tensiunea la borne $\underline{U} = U$ este:

$$\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U} = YU\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi},$$

cu valoare efectivă:

$$I = Y\,U = U\frac{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + r^2\omega^2 C^2}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} = I(\omega). \quad (35.35)$$

Dacă pulsația variază în intervalul $(0, \infty)$, curentul scade, pornind de la valoarea $I(0) = U/r$, și are un minim la pulsația ω_{r2}, care se determină exact, anulînd derivata expresiei (35.35) (fig. 35.10, *a*). După un calcul relativ lung se obține:

$$\omega_{r2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\sqrt{1 + \frac{2r^2C}{L}} - \frac{r^2C}{L}} \approx \omega_0\left(1 - \frac{r^4C^2}{4L^2}\right). \quad (35.36)$$

O valoare aproximativă a pulsației pentru care curentul e minim se poate obține observînd că dacă amortizarea e slabă atunci $r^2 \ll \omega^2 L^2$ — la frecvențe mai apropiate de rezonanță sau mai mari — și r^2 poate fi neglijat pe lîngă $\omega^2 L^2$. Cu această aproximație expresia (35.35) devine:

$$I \approx U\sqrt{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2 + \frac{r^2C^2}{L^2}} \quad (35.37)$$

și e minimă pentru:

$$\omega_{r2} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (35.38)$$

Această valoare aproximativă e foarte apropiată (cu mai puțin de 1‰) de valoarea exactă (35.36) pentru circuite cu $Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} > 4$. Cu relația (35.38), valoarea aproximativă a curentului la rezonanță este:

$$I(\omega_{r2}) \approx I(\omega_0) = U\frac{rC}{L}, \quad (35.39)$$

iar impedanța la rezonanță este:

$$Z(\omega_0) \approx \frac{L}{rC} = r\,Q^2 \gg r. \quad (35.40)$$

Defazajul circuitului rezultă din relația (35.34):

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{G} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L\left(1 - \omega^2 LC - r^2\dfrac{C}{L}\right)}{r} \quad (35.41)$$

$$\varphi \approx \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L}{r}(1 - \omega^2 LC).$$

Defazajul e nul pentru $\omega = 0$, iar la pulsații mici e inductiv, trecînd printr-un maxim, pentru a se anula la pulsația de rezonanță :

$$\omega_{r1} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{r^2C}{L}} \approx \omega_0\left(1 - \frac{r^2C}{2L}\right), \qquad (35.42)$$

practic egală cu ω_0 la amortizări mici. Pentru $\omega > \omega_{r1}$, circuitul e capacitiv ($\varphi < 0$) și defazajul tinde către $-\pi/2$ cînd $\omega \to \infty$ (fig. 35.10, *b*).

În figura 35.9, *b* este construită diagrama vectorială pentru $\omega = \omega_{r2} \approx \omega_0$. În acest circuit, curenții din cele două ramuri I_C și I_L pot atinge la rezonanță valori efective mari, și anume mai mari decît ale curentului absorbit din exterior. De aceea, circuitul se numește *circuit cu rezonanță de curent* și se utilizează pentru amplificarea curenților slabi, avînd frecvența egală cu frecvența lui de rezonanță. *Factorul de calitate* este egal în acest caz cu raportul de amplificare al curentului :

$$\left(\frac{I_C}{I}\right)_{\omega\approx\omega_0} = \left(\frac{UC\omega}{I}\right)_{\omega\approx\omega_0} \approx \frac{L\omega_0}{r} =$$

$$= \frac{1}{rC\omega_0} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q. \qquad (35.43)$$

Curbele de rezonanță (35.35) și (35.41) se pot exprima cu ajutorul factorului de calitate și al pulsației ideale de rezonanță ω_0 :

$$I = \frac{U}{r}\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega^2 Q^2}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}Q^2}};$$

$$\varphi = \text{arc tg}\left[\frac{\omega}{\omega_0}Q\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{Q^2}\right)\right]. \qquad (35.44)$$

Pentru $r \to 0$, $Q \to \infty$, $Z(\omega_0) \to \infty$ și curentul $I = U\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$ se anulează la frecvența de rezonanță. Circuitul paralel de înaltă calitate ($Q \gg 1$) blochează trecerea curenților de frecvență corespunzătoare.

Circuitul paralel este un circuit rezonant, la care cele trei condiții menționate la începutul acestui paragraf, ca fiind caracteristice rezonanței, duc la valori distincte pentru pulsația de rezonanță. Astfel, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ fiind pulsația ideală de rezonanță, pulsația de

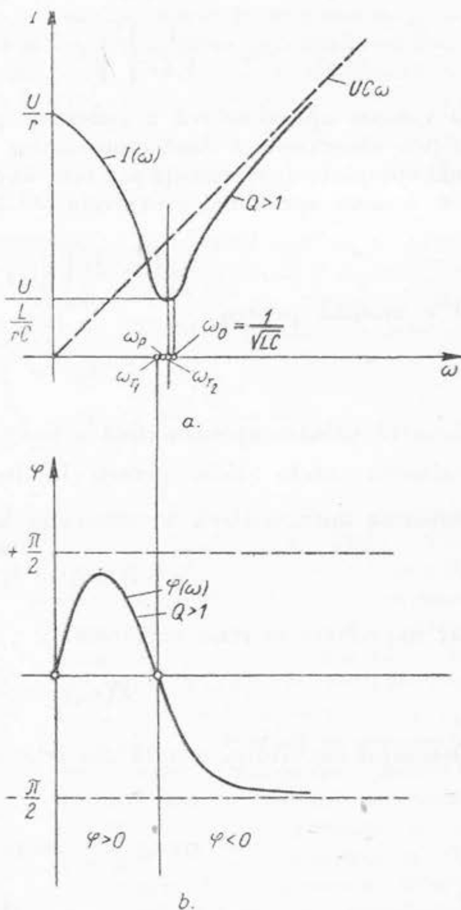


Fig. 35.10

anulare a defazajului e ω_{r1}, dat de (35.42), pulsația de maxim al impedanței de e ω_{r2}, dat de (35.36), și amîndouă sînt diferite de pulsația proprie $\omega_{r3} = \omega_p$, dată de (35.24). Pentru circuitele oscilante, utilizate în aplicații pentru proprietățile lor rezonante (radiotehnică, telecomunicații), factorii de calitate sînt foarte mari și toate aceste pulsații practic coincid:

$$\omega_{r1} \approx \omega_{r2} \approx \omega_{r3} \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \tag{35.45}$$

La $Q \gg 1$, dezvoltarea in serie a expresiilor de mai sus arată că

$$\omega_{r1} < \omega_p < \omega_{r2} < \omega_0,$$

frecvența ω_{r2} fiind foarte apropiată de ω_0.

35.5. Circuite cu proprietăți speciale

35.5.1. **Circuite generatoare de curent constant (montaje Boucherot).** Considerăm un circuit mixt cu structura din figura 35.11, *a*. Presupunînd constantă tensiunea aplicată circuitului, determinăm condiția pentru ca, indiferent de valoarea impedanței $\underline{Z}_3$, curentul $\underline{I}_3$ să aibă aceeași valoare.

Impedanța echivalentă se calculează cu teoremele (35.11) și (35.19)

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1}. \tag{36.46}$$

Curentul $\underline{I}_3$ e curentul uneia dintre ramurile unui divizor de curent și e dat de (35·21):

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}\,\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}. \tag{35.47}$$

Pentru ca $\underline{I}_3$ să fie independent de valoarea lui $\underline{Z}_3$, este necesară satisfacerea condiției complexe:

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 0, \tag{35.48}$$

adică a relațiilor reale:

$$R_1 + R_2 = 0,$$
$$X_1 + X_2 = 0. \tag{35.49}$$

Rezistențele fiind pozitiv definite, trebuie să fie nule amîndouă:

$$R_1 = R_2 = 0. \tag{35.50}$$

Deci $\underline{Z}_1$ trebuie să fie o bobină ideală și $\underline{Z}_2$ un condensator ideal (sau invers), ai căror parametri să satisfacă condiția de rezonanță (35.27):

$$j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0 \rightarrow L\omega = \frac{1}{\omega C}. \tag{35.51}$$

Cele două posibilități sînt reprezentate în figura 35.11, *b* și *c*. Dacă condițiile (35.50) și (35.51) sînt îndeplinite, curentul $\underline{I}_3$ este:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \pm \underline{U} j\omega C = \mp \underline{U}/j\omega L, \tag{35.52}$$

semnul de sus corespunzînd figurii 35.11, *b* și semnul de jos figurii 35.11, *c*.

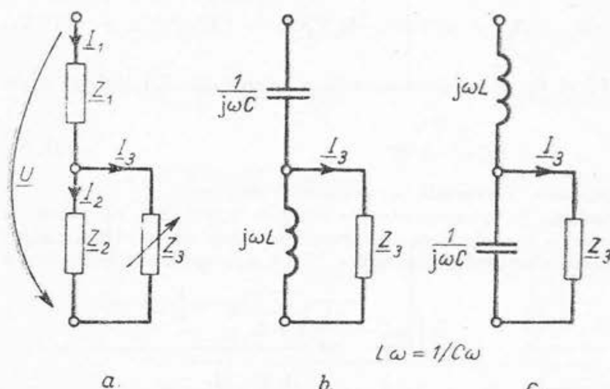


Fig. 35.11.

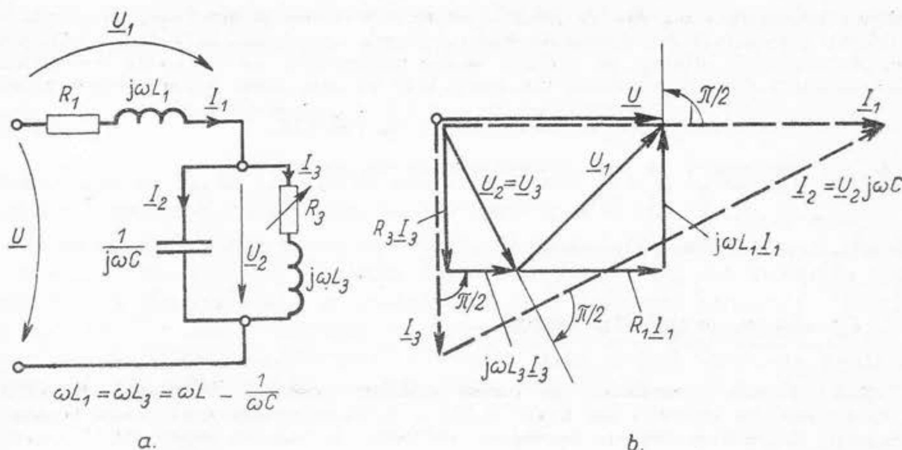


Fig. 35.12.

Circuitele din această categorie sînt alimentate cu tensiuni constante şi furnizează curenţi constanţi, oricare ar fi impedanţa de sarcină $\underline{Z}_3$. În practică, totdeauna $R_1 \neq 0$ şi $R_2 \neq 0$, chiar dacă sînt foarte mici. De aceea, curentul e numai aproximativ constant (pentru valori $\underline{Z}_3$ nu prea mari).

35.5.2. **Circuit defazor.** Se consideră circuitul mixt din figura 35.12, în care bobinele au inductivităţi egale:

$$L_1 = L_2 = L; \qquad C_2 = C \tag{35.53}$$

şi căutăm ce condiţie trebuie să fie satisfăcută între parametrii circuitului, pentru ca să existe o diferenţă de fază de $\pi/2$ între $\underline{I}_3$ şi $\underline{U}$, oricare ar fi rezistenţele R_3 şi R_1. Tensiunea la borne este:

$$\underline{U} = \left(\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}\right)\underline{I}_1 = \left(\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}\right)\left(\frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}\right)\underline{I}_3 = \\ = \underline{I}_3\left((\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}\right). \tag{35.54}$$

Explicitînd impedanţele cu relaţia (35.53), se obţine:

$$\underline{U} = \underline{I}_3[(1 - LC\omega^2)(R_1 + R_3) + j(2L\omega + R_1R_3C\omega - CL^2\omega^3)]. \tag{35.55}$$

Pentru ca defazajul între $\underline{U}$ şi $\underline{I}_3$ să fie $\frac{\pi}{2}$, partea reală a relaţiei (35.55) trebuie să fie nulă, adică:

$$1 - LC\omega^2 = 0. \tag{35.56}$$

În figura 35.12, *b* e construită diagrama vectorială a circuitului defazor.

35.5.3. **Circuite complet aperiodice.** Se numesc *circuite complet aperiodice* circuitele a căror impedanţă echivalentă complexă nu depinde de frecvenţă, deşi au în structura lor elemente de circuit reactive. În cazul circuitului din figura 35.13, *a*, impedanţa echivalentă complexă este:

$$\underline{Z}_1 = \frac{r \cdot j\omega L}{r + j\omega L} + \frac{r \cdot \frac{1}{j\omega C}}{r + \frac{1}{j\omega C}} = r\,\frac{jr\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + 2\,\frac{L}{C}}{r^2 + jr\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \frac{L}{C}}.$$

Se vede că impedanța é independentă de frecvență, dacă numitorul și numărătorul fracției sînt egali și se simplifică, ceea ce are loc pentru:

$$r = \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{35.57}$$

În acest caz

$$\underline{Z}_1 = r, \qquad R_1 = r, \qquad X_1 = 0. \tag{35.58}$$

În cazul circuitului din figura 35.13, *b*, impedanța echivalentă complexă este:

$$\underline{Z}_2 = \frac{(r + \mathrm{j}\omega L)\left(r + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)}{2r + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = r\,\frac{r + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \frac{L}{Cr}}{2r + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Și în acest caz fracția se simplifică, dacă e satisfăcută condiția (35·57), și se obține:

$$\underline{Z}_2 = r, \qquad R_2 = r, \qquad X_2 = 0. \tag{35.59}$$

35.6. Linia monofazată scurtă de curent alternativ

Transmisiunea la distanță a energiei electrice dă posibilitatea utilizării surselor de energie depărtate de centrele de utilizare. În acest scop se utilizează *linii electrice* (fig. 35.14, *a*).

Dacă linia care leagă generatorul de receptor e scurtă (v. și cap. 53 și 54), ea poate fi înlocuită cu o schemă echivalentă *R*, *L* serie (fig. 35.14, *b*). Cînd este necesar să se țină seama și de impedanța interioară $\underline{Z}_i$ a generatorului, se includ în parametrii liniei rezistența, respectiv reactanța bobinajului generatorului. În acest caz, totul se reduce la examinarea funcționării

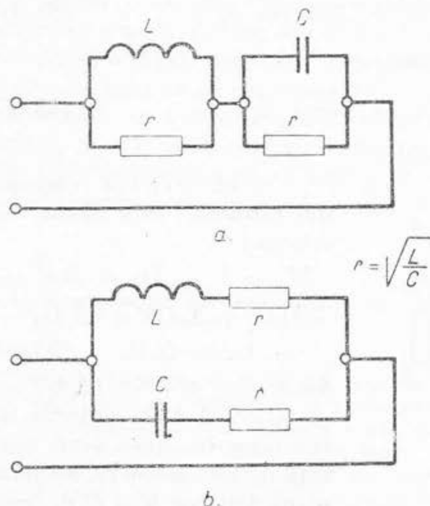


Fig. 35.13.

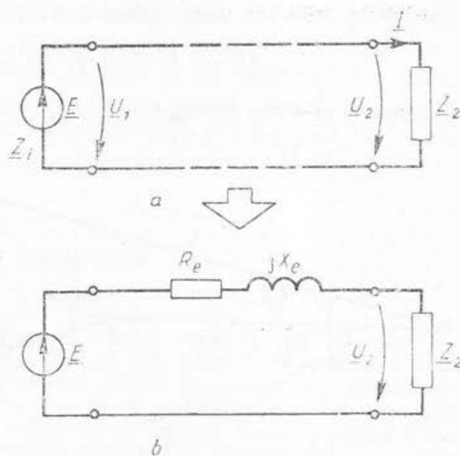


Fig. 35.14.

unui circuit serie, cu rezistența R_e și reactanța X_e, în serie cu un receptor de impedanță $\underline{Z}_2$ (fig. 35.14, *b*). În practică se cunosc tensiunea la bornele receptorului $\underline{U}_2$ (tensiunea secundară) și impedanța de sarcină $\underline{Z}_2$, respectiv curentul $\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \underline{I}$.

Adesea, receptorul e caracterizat de putera activă P_2, tensiunea U_2 și factorul de putere $\cos \varphi_2$ (de ex. inductiv). Atunci curentul este $I_2 = P_2/U_2 \cos \varphi_2$, iar $Z_2 = U_2/I_2 = U_2^2 \cos \varphi_2/P_2$.

Problema principală constă în examinarea relației între tensiunea generatorului $\underline{E}$ și tensiunea secundară $\underline{U}_2$, pentru a determina căderile de tensiune.

Diferența valorilor efective ale tensiunilor :

$$\delta U = E - U_2 \gtrless 0 \tag{35.60}$$

se numește *variație de tensiune*. Diferența tensiunilor complexe :

$$\Delta \underline{U} = \underline{E} - \underline{U}_2 \tag{35.61}$$

se numește *cădere geometrică de tensiune*. Schema echivalentă avînd toate elementele în serie, se poate scrie relația :

$$\underline{E} = (\underline{Z}_2 + R_e + jX_e)\,\underline{I} = \underline{U}_2 + (R_e + jX_e)\,\underline{I} = \underline{U}_2 + \Delta\underline{U}, \tag{35.62}$$

din care, prin calcul în complex, rezultă $\underline{E}$ și $\Delta\underline{U}$.

Calculul se poate face și grafic. Diagrama vectorială a liniei este repezentată în figura 35.15, considerînd tensiunea $\underline{U}_2$ origine de fază.

Din figura 35.15 se poate stabili relația :

$$E = OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{(U_2 + \Delta_l U)^2 + (\Delta_t U)^2}, \tag{35.63}$$

în care

$$BC = \Delta_l U = R_e I \cos \varphi_2 + X_e I \sin \varphi_2 \tag{35.64}$$

se numește *căderea longitudinală de tensiune*, iar

$$AC = \Delta_t U = R_e I \sin \varphi_2 + X_e I \cos \varphi_2 \tag{35.65}$$

se numește *căderea transversală de tensiune*.

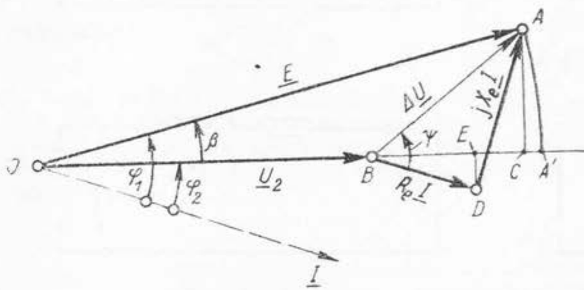


Fig. 35.15.

Se observă că variația de tensiune este dată de relația :

$$\delta U = E - U_2 = BA' = \sqrt{(U_2 + \Delta_l U)^2 + (\Delta_t U)^2} - U_2 \approx \Delta_l U, \tag{35.66}$$

deoarece, practic, $(\Delta_t U)^2 \ll (U_2 + \Delta_l U)^2$, căderile de tensiune în linie fiind mici față de tensiunea E, iar defazajul β dintre $\underline{E}$ și $\underline{U}$ de asemenea mic.

Valoarea efectivă a căderii geometrice de tensiune (fig. 35.15) este :

$$\Delta U = |\Delta \underline{U}| = BA = \sqrt{(\Delta_l U)^2 + (\Delta_t U)^2} > \delta U. \qquad (35.67)$$

În mod practic interesează variația de tensiune, deoarece receptoarele sînt dimensionate pentru o anumită valoare efectivă a tensiunii U_2. În rețelele de distribuție urbane de joasă tensiune se admite o variație de tensiune de 3—4% U_2.

Dacă $\varphi_2 < 0$ (receptor capacitiv), tensiunea U_2 poate depăși tensiunea E; după cum rezultă din (35.66) și (35.64), această situație se realizează dacă :

$$\operatorname{tg} \varphi_2 < -\frac{R_e}{X_e}. \qquad (35.68)$$

În acest caz, variația de tensiune reprezintă o creștere de tensiune și nu o pierdere de tensiune ca în cazul din figura 35.15.

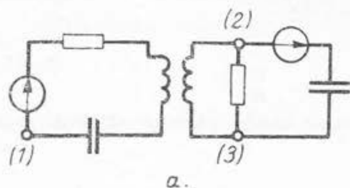
36. TEOREMELE LUI KIRCHHOFF PENTRU REȚELELE DE CURENT ALTERNATIV

Ca și rețelele de curent continuu (v. par. 13.2, vol. I), rețelele de curent alternativ pot fi studiate cu ajutorul unor ecuații asociate nodurilor, respectiv ochiurilor, care rezultă din aplicarea unor teoreme, numite teoremele lui Kirchhoff — datorită analogiei formale pe care o prezintă cu teoremele similare din curent continuu. Pentru rețelele liniare, alcătuite exclusiv din elemente de circuit dipolare (cum am studiat mereu pînă acum), teoremele lui Kirchhoff constituie o bază teoretică completă, furnizînd un sistem de ecuații liniare în număr egal cu al necunoscutelor. Deoarece aplicarea acestor teoreme necesită adesea un volum mare de calcule, s-au elaborat și alte metode mai sistematice, mai rapide, sau mai adaptate unor probleme particulare (v. cap. 38). Este însă important să se rețină că orice problemă care se studiază cu aceste metode poate fi rezolvată și numai cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff.

36.1. Teoremele lui Kirchhoff în valori instantanee

36.1.1. **Elemente de topologia rețelelor** (v. și par. 13.2.1, vol. I). Se numește *latură* orice porțiune mărginită și neramificată de rețea și *nod*, punctul de întîlnire a două sau mai multe laturi. În aplicații e util să se considere noduri numai punctele de întîlnire a trei sau mai multe laturi, cu excepția cazului unei laturi închise în ea însăși (v. ochiul din stînga al rețelei din fig. 36.1, *a*), care e mărginită de un nod comun ambelor ei capete și ales arbitrar [(1) din fig. 36.1]. Se numește *ochi* (buclă, contur, ciclu) o succesiune de laturi ale rețelei, alcătuind o curbă închisă. O rețea se numește *conexă*, dacă oricare două noduri ale ei pot fi unite printr-o curbă, care trece numai prin laturi ale rețelei.

În curent alternativ interesează și rețelele neconexe (fig.36.1, *a*), ale căror părți (subrețele) conexe, izolate unele de altele, pot interacționa prin inducție electromagnetică (cuplaj inductiv sau magnetic). Se numește *schemă topologică a rețelei* o schemă simplificată, în care structura laturilor nu mai e specificată, și acestea sînt figurate prin linii (fig. 36.1, *b* și 36.2). Pe schema topologică a unei rețele se pot studia toate proprietățile rețelei referitoare la relațiile dintre laturi, noduri și ochiuri. Laturile și ochiurile se consideră orientate, sensu-



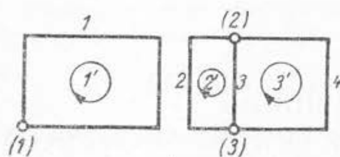
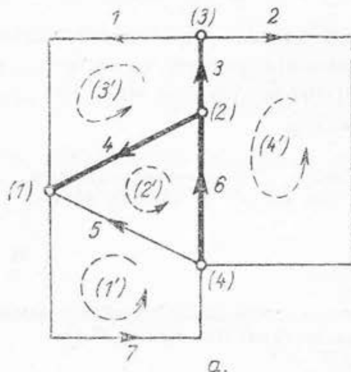


Fig. 36.1



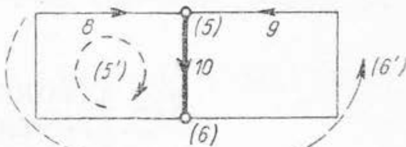


Fig. 36.2

rile de referință ale laturilor fiind indicate cu săgeți plasate pe laturi (uneori, alături), iar sensurile de referință ale ochiurilor fiind indicate cu arce de curbă deschisă dotate cu o săgeată și desenate înăuntrul sau în exteriorul ochiurilor (fig. 36.2).

Un ochi se numește *independent* față de un sistem dat de ochiuri, dacă existența lui nu poate fi dedusă din cunoașterea laturilor ochiurilor sistemului dat, ceea ce revine practic la faptul că orice integrală de contur scrisă pentru acest ochi nu poate fi exprimată ca o combinație liniară a unor integrale scrise pentru ochiurile sistemului dat. Se numește *sistem fundamental de ochiuri* independente un sistem de O ochiuri astfel alese încît fiecare dintre ele e independent față de celelalte, iar oricare ochi al rețelei, neaparținînd sistemului, nu e independent față de acesta. Ochiurile unui sistem fundamental furnizează numărul maxim de ecuații independente obținute, exprimînd integrale de contur. Pentru o rețea dată se pot găsi mai multe sisteme fundamentale de ochiuri, dar toate au *același* număr O de ochiuri, număr ce constituie o caracteristică a rețelei.

Notăm cu L numărul de laturi, cu N numărul de noduri, cu S numărul de *subrețele conexe* și izolate ale rețelei. Se numește *arbore* al unei subrețele conexe o porțiune conexă a ei, care conține toate nodurile acesteia și nu conține nici un ochi. În figura 36.2 sînt desenate îngroșat laturile unor arbori ale subrețelelor *a* și *b*. Un arbore are $N_s - 1$ laturi, dacă N_s e numărul de noduri ale subrețelei conexe considerate. În adevăr, cînd construim succesiv arborele din laturile lui, prima latură are două noduri (capetele ei), iar celelalte aduc fiecare cîte un nod (deoarece dacă nu ar avea capătul al doilea liber s-ar forma un ochi, ceea ce e exclus prin definiția arborelui). Se observă acum că dacă, pornind de la un arbore, se adaugă succesiv cîte o latură pentru a construi rețeaua definitivă, orice nouă latură astfel adăugată nu aduce nici un nod în plus (prin definiție arborele le cuprinde pe toate), dar aduce subrețelei cîte un ochi independent de celelalte și numai cîte unul. Numărul de laturi astfel adăugate e deci egal cu numărul O_s al ochiurilor independente ale subrețelei

considerate. Nunărul de laturi L_s al acestei subrețele conexe este egal cu numărul de laturi ale arborelui $N_s - 1$, plus numărul O_s al ochiurilor ei independente:

$$L_s = O_s + N_s - 1.$$

Scriind cîte o astfel de ecuație pentru fiecare subrețea conexă și însumînd cele S ecuații scrise, se obține pentru întreaga rețea relația:

$$L = O + N - S.$$

Sub forma:

$$\boxed{O = L - N + S}\ ^{1} \qquad (36.1)$$

această relație permite determinarea numărului de ochiuri independente ale unei rețele date. Practic (deși nu e necesar), acestea se aleg astfel încît fiecare să aibă cîte o latură care să nu aparțină celorlalte (în acest fel sîntem siguri de independența lor, iar dacă am ales O astfel de ochiuri independente, știm că le-am ales pe toate).

În cele ce urmează vom presupune că: toate laturile rețelei sînt numerotate într-o ordine dată, cu indicii curenți:

$$k,\ l,\ m,\ r,\ s,\ t = 1,\ 2,\ \ldots,\ L, \qquad (36.2)$$

toate nodurile rețelei sînt numerotate într-o ordine dată, cu indicii curenți.

$$b,\ c,\ d = 1,\ 2, \ldots,\ N, \qquad (36.3)$$

toate ochiurile independente ale unui sistem fundamental, ales arbritrar, sînt numerotate într-o ordine dată:

$$p,\ q = 1,\ 2,\ \ldots,\ O. \qquad (36.4)$$

36.1.2. **Prima teoremă a lui Kirchhoff.** Unei suprafețe închise $\sum_b$ care înconjură un nod oarecare (b) foarte aproape de nod, i se poate aplica teorema continuității (31.10), $i_\Sigma = 0$, curentul total $i_{\Sigma_b} = \iint_{\Sigma_b} \mathbf{J} d\mathbf{A}$, fiind în acest caz suma algebrică a curenților laturilor care se întîlnesc în nod. Se obține astfel — ca și în curent continuu — prima teoremă a lui Kirchhoff:

Suma algebrică a valorilor instantanee ale curenților din laturile care se reunesc într-un nod este nulă:

$$\boxed{\sum_{k \in (b)} i_k = 0}\ ^{2}. \qquad (36.5)$$

În această sumă „algebrică", curenților care ies din nod li se afectează semnul $(+)$, iar celor care intră în nod, semnul $(-)$; indicele k al laturii ia acele valori

[1] O relație de acest tip a fost stabilită prima dată de Euler pentru poliedre și de aceea (36·1) se mai numește *teorema lui Euler*.

[2] Semnul $\in$ e semnul de *apartenență*, folosit aici pentru a indica: latura k aparține mulțimii laturilor legate la nodul (b).

din şirul (36.2), care corespund laturilor legate la nodul (b) considerat. De exemplu, în cazul nodului din figura 36.3, prima teoremă a lui Kirchhoff se scrie :

$$i_1 - i_6 + i_7 + i_3 - i_{11} = 0.$$

Relaţia (36.5) a fost stabilită utilizînd legea conservării sarcinii şi aproximaţia regimului cvasistaţionar. În ea nu apar parametrii circuitelor. De aceea, această relaţie e valabilă în regim cvasistaţionar pentru orice fel de circuite : liniare, parametrice, neliniare.

Fig. 36.3

36.1.3. **A doua teoremă a lui Kirchhoff.** În lungul unei curbe închise Γ_p, compusă din succesiunea liniilor tensiunilor la borne u_{b_m} ale diferitelor laturi m ale unui ochi (p) (fig. 36.4), se poate calcula tensiunea electromotoare indusă $e_{\Gamma_p} = \oint_{\Gamma_p} \mathbf{E} d\mathbf{s}$, egală, în acest caz, cu suma algebrică a tensiunilor la borne ale laturilor ochiului. Această tensiune electromotoare indusă e însă nulă, deoarece fluxul magnetic prin suprafaţa S_{Γ_p} sprijinită pe curba Γ_p e neglijabil, ca urmare a modului de alegere a liniilor tensiunilor la borne — care ocolesc regiunile de flux intens, localizate în bobine (v. şi par. 31.2.2). Se obţine astfel cea mai generală formă a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff: *Suma algebrică a valorilor instantanee ale tensiunilor la bornele laturilor care alcătuiesc un ochi este nulă :*

$$\sum_{m \in (p)} u_{b_m} = 0. \qquad (36.6)$$

[1]

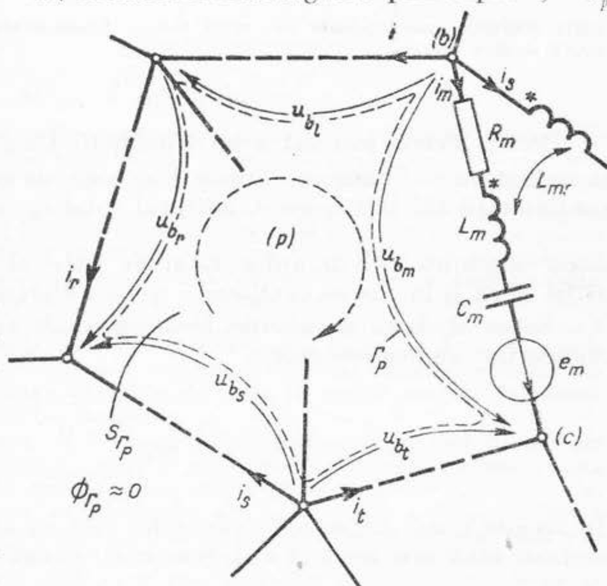


Fig. 36.4

În această sumă „algebrică", tensiunilor la borne, al căror sens de referinţă e acelaşi cu sensul de integrare (sensul

[1] Semnul $\in$ e semnul de *apartenenţă*, folosit aici pentru a indica : latura m aparţine mulţimii laturilor ochiului (p).

de referință al ochiului, numit și sens de scriere al ecuației), li se afectează semnul (+), iar celor al căror sens de referință e opus, semnul (—). Indicele m al laturii ia acele valori din șirul (36.2), care corespund laturilor ce aparțin ochiului (p) considerat.

De exemplu, în cazul ochiului din figura 36.4, relația (36.6) se scrie :

$$u_{b_m} - u_{b_t} + u_{b_s} - u_{b_r} - u_{b_l} = 0.$$

O altă formă generală a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff se obține înlocuind tensiunile la borne cu valorile scoase din ecuațiile laturilor scrise sub forma relației (34.119), utilizată la deducerea teoremei lui Joubert :

$$u_{b_m} = u_{R_m} + u_{C_m} + \frac{d\Phi_m}{dt} - e_m. \tag{36.7}$$

În această relație, u_{b_m} e tensiunea luată după regula de la receptoare pentru toate laturile rețelei, u_{R_m} e căderea de tensiune rezistivă din laturi, u_{C_m} e tensiunea condensatorului conectat în serie în latura m, e_m este t.e.m. a generatorului din latură cu sensul de referință același cu al curentului i_m , iar Φ_m e fluxul magnetic total care înlănțuie latura (mai puțin fluxul care induce t.e.m. a generatorului).

Înlocuind relația (36.7) în relația (36.6) și separînd într-un membru t.e.m. ale generatoarelor, se obține o altă formă generală a primei teoreme a lui Kirchhoff :

Suma algebrică a valorilor instantanee ale tensiunilor electromotoare ale generatoarelor din laturile unui ochi e egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune instantanee din acele laturi :

$$\sum_{m\in(p)} e_m = \sum_{m\in(p)} \left[u_{R_m} + u_{C_m} + \frac{d\Phi_m}{dt}\right]. \tag{36.8}$$

Această relație și relația (36.6) au fost stabilite utilizînd numai legi generale, și în ea nu apar explicit parametrii circuitului; de aceea ea este valabilă pentru orice fel de circuite : liniare, parametrice și neliniare.

Observație : Ecuația (36.8) poate fi dedusă și calculînd tensiunea electromotoare în lungul unei curbe care trece numai prin laturile ochiului (nu pe la borne, cum trecea curba Γ_p utilizată aici).

În cazul circuitelor liniare, căderile, de tensiune se pot exprima în funcție de curenți, introducînd parametrii circuitului în relațiile (31.22), (31.28), (31.15):

$$u_{R_m} = R_m i_m;\ u_{C_m} = \frac{q_m}{C_m} = \frac{1}{C_m}\int i_m dt;\ \Phi_m = \sum_{s=1}^{L} L_{ms} i_s, \tag{36.9}$$

în care $R_m > 0$ este rezistența conductorului laturii, $C_m > 0$ este capacitatea condensatorului, $L_{mm} = L_m > 0$ este inductivitatea proprie a laturii, $L_{ms} \gtrless 0$ este inductivitatea mutuală dintre latura s și latura m ($L_{ms} = L_{sm}$), cu sensul corespunzător sensului de scriere al ecuației prin latura m și sensului curentului i_s din latura s, care induce. Dacă numai unul dintre aceste sensuri nu coincide cu cel

indicat de borna polarizată corespunzătoare valorii date a inductivităţii mutuale, semnul acestei valori trebuie schimbat.

Cu relaţia (36.9) se obţine *a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite liniare* :

$$\sum_{m\in(p)} e_m = \sum_{m\in(p)} \left[R_m i_m + \frac{1}{C_m}\int i_m \mathrm{d}t + \sum_{s=1}^{L} L_{ms}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}\right], \tag{36.10}$$

sau, explicitînd căderea de tensiune de inducţie proprie ($s = m$),

$$\sum_{m\in(p)} e_m = \sum_{m\in(p)} \left[R_m i_m + \frac{1}{C_m}\int i_m \mathrm{d}t + L_m\frac{\mathrm{d}i_m}{\mathrm{d}t} + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq m}}^{L} L_{ms}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}\right]. \tag{36.10'}$$

36·1·4. **Observaţii privitoare la aplicarea teoremelor lui Kirchhoff.** *a*) Cu ajutorul acestor teoreme se obţin $N - S$ ecuaţii independente de noduri (deoarece în fiecare din cele S subreţele conexe, ultimul nod — în care intră numai curenţi ale căror valori au mai intrat în ecuaţiile altor noduri cu semn schimbat — conduce la o ecuaţie care e egală cu suma cu semn schimbat a celorlalte ecuaţii de noduri, şi deci nu e indpendentă de ele); $O = L - N + S$ ecuaţii independente de ochiuri. Rezultă în total $O + N - S = L$ ecuaţii integro-diferenţiale. În reţele liniare, acest sistem de ecuaţii are L funcţiuni necunoscute : curenţii $i(t)$ ai laturilor şi problema are o soluţie unică (în regim tranzitoriu, după precizarea condiţiilor iniţiale).

b) În ecuaţiile obţinute din cea de-a doua teoremă a lui Kirchhoff toţi termenii au semnul (+), respectiv (—), după cum sensul de referinţă al mărimii respective coincide sau nu cu sensul de scriere al ecuaţiei. Din cauza convenţiei suplimentare, pe care o implică semnul unei inductivităţi mutuale (v. par. 34.4.3), termenii de forma $L_{ms}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}$ au semnul hotărît de corespondenţa dintre sensul de scriere din ochiul cu latura m şi sensul curentului din latura s, de o parte, şi sensurile indicate de bornele polarizate, de altă parte — cum s-a precizat mai sus.

c) Aplicarea teoremelor se face (ca în curent continuu) alegînd sensuri de referinţă arbitrare pe laturi, alegînd ochiurile independente şi sensurile de referinţă arbitrare pentru ele, scriind ecuaţiile şi rezolvînd sistemul astfel obţinut.

d) Teorema a doua a lui Kirchhoff se poate scrie şi pentru un ochi care nu se închide numai prin laturi, ci şi — pe o anumită porţiune — prin dielectric, direct între două borne. În acest caz, tensiunea dintre aceste borne nu mai poate fi explicitată în funcţie de curenţi şi rămîne în ecuaţia (36.6) neînlocuită cu relaţia (36.7). Ecuaţia finală (36.8), respectiv relaţiile (36.10), va cuprinde în membrul drept, alături de căderile de tensiune din laturile ochiului, şi tensiunea dintre bornele prin care se închide acest ochi.

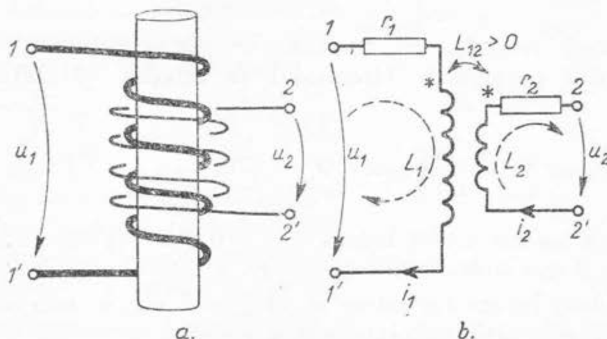


Fig. 36.5

e) Cea mai bună verificare a scrierii şi rezolvării corecte a ecuaţiilor o constituie verificarea bilanţului puterilor (v. cap. 37).

Aplicaţie: Ecuaţiile transformatorului. Considerăm un ansamblu de două bobine cuplate, constituind un transformator electric (fără miez de fier, pentru ca inductivităţile să fie constante-v. fig. 36·5, *a*). Schema echivalentă e desenată în figura 36.5, *b*; în această schemă, r_1 şi r_2 sînt rezistenţele conductoarelor înfăşurărilor, L_1 şi L_2 sînt inductivităţile acestor

înfășurări, iar L_{12}, inductivitatea mutuală. Bornele polarizate au fost astfel alese, încît, în raport cu ele, $L_{12} > 0$ (în cazul cînd curenții ar intra prin aceste borne, ar da fluxuri în același sens prin miez — cum rezultă din figura 36.5, *a*). Alegem sensurile de referință ale tensiunilor la borne și ale curenților după regula de la receptoare la prima bobină și după regula de la generatoare la a doua — transformatorul constituind o celulă intermediară într-un lanț de transmisiune a energiei electromagnetice. Alegem sensurile de referință pe cele două ochiuri închise cu liniile tensiunilor la borne. Ecuațiile de ochiuri (36.9) sînt, în acest caz (cu $e_1 = e_2 = 0$, deoarece nu avem generatoare):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= r_1 i_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - u_1 \\ 0 &= r_2 i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - L_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + u_2 \end{aligned}\right\} (L_{12} = L_{21})$$

(semnul minus din fața lui L_{12} rezultă din regula indicată la punctul *b* de mai sus), sau:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= r_1 i_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ -u_2 &= r_2 i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - L_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \qquad (36.11)$$

pentru verificare înmulțim prima ecuație cu i_1, a doua cu i_2 și adunăm ecuațiile; se obține relația:

$$u_1 i_1 - u_2 i_2 = r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg[\overbrace{\frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + (-L_{12})\, i_1 i_2}^{W^{(m)}}\Bigg]. \qquad (36.12)$$

Diferența dintre puterea $u_1 i_1$ primită pe la borne de prima bobină (deoarece am folosit convenția de la receptoare) și puterea $u_2 i_2$ cedată pe la borne (deoarece am folosit convenția de la generatoare) de a doua bobină este disipată în parte în rezistențele înfășurărilor $(r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2)$ și acumulată în parte în cîmpul magnetic al bobinelor, a cărui energie e $W^{(m)}$ (v. rel. 31.17). Semnul (—) din fața inductivității mutuale L_{12} rezultă din faptul că sensul curentului i_2 iese din borna polarizată respectivă, în loc să intre ca i_1: valoarea inductivității mutuale în raport cu sensurile curenților este $(-L_{12})$.

36.2. Forma complexă a teoremelor lui Kirchhoff

Pentru circuite liniare în regim permanent sinusoidal de pulsație ω se pot reprezenta în complex simplificat relațiile (36.5), (36.6) și (36.10), folosind notațiile:

$$\begin{aligned} i_k &= I_k \sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma_k) \rightleftarrows \underline{I}_k = I_k e^{j\gamma_k} \\ u_{b_m} &= U_{b_m}\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta_m) \rightleftarrows \underline{U}_{b_m} = U_{b_m} e^{j\beta_m} \\ e_m &= E_m \sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_m) \rightleftarrows \underline{E}_m = E_m e^{j\alpha_m} \end{aligned} \qquad (36.13)$$

și regulile de transpunere a operațiilor elementare (34.81...84).

36.2.1. **Forma complexă a primei teoreme a lui Kirchhoff.** Reprezentînd în complex, cu notațiile (36.13), ecuația (36.5), se obține expresia:

$$\boxed{\sum_{k\in(b)} \underline{I}_k = 0}\,, \qquad (36.14)$$

care se enunţă : *Suma algebrică a imaginilor în complex ale curenţilor din laturile care se reunesc într-un nod este nulă.* Convenţiile privitoare la semn sînt aceleaşi ca la valori instantanee. Deoarece modulul unei sume nu este egal cu suma modulilor termenilor, o relaţie de forma (36.14) nu se poate scrie pentru valorile efective (reale) :

$$\sum_{k\in(b)} I_k \neq 0$$

36.2.2. **Forma complexă a teoremei a doua a lui Kirchhoff.** Reprezentînd în complex, cu notaţiile (36.13), ecuaţia (36.6), se obţine enunţul cel mai general al teoremei :

$$\sum_{m\in(p)} \underline{U}_{b_m} = 0. \qquad (36.15)$$

Suma algebrică a imaginilor în complex ale tensiunilor la bornele laturilor care alcătuiesc un ochi este nulă. Convenţiile privitoare la semn sînt aceleaşi ca la valori instantanee. Şi în acest caz, relaţia nu e valabilă între valori efective :

$$\sum_{m\in(p)} U_{b_m} \neq 0.$$

Reprezentînd în complex ecuaţia (36.10), cu notaţiile (36.13), se obţine relaţia :

$$\sum_{m\in(p)} \underline{E}_m = \sum_{m\in(p)} \left[R_m \underline{I}_m + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_m} \underline{I}_m + \sum_{s=1}^{L} \mathrm{j}\,\omega L_{ms} \underline{I}_s \right]. \qquad (36.16)$$

Dar

$$\sum_{s=1}^{L} \mathrm{j}\,\omega L_{ms} \underline{I}_s = \mathrm{j}\,\omega L_m \underline{I}_m + \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq m)}}^{L} \mathrm{j}\,\omega L_{ms} \underline{I}_s$$

şi relaţia (36.16) se scrie :

$$\sum_{m\in(p)} \underline{E}_m = \sum_{m\in(p)} \left[\left(R_m + \mathrm{j}\,\omega L_m + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_m} \right) \underline{I}_m + \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq m)}}^{L} \mathrm{j}\,\omega L_{ms} \underline{I}_s \right]. \qquad (36.17)$$

Suma algebrică a imaginilor în complex ale tensiunilor electromotoare ale generatoarelor e egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune complexe din acele laturi. Căderile de tensiune pot fi rezistive $(R_m \underline{I}_m)$, inductive $(\mathrm{j}\,\omega L_m \underline{I}_m)$, capacitive $\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_m} \underline{I}_m\right)$ sau induse mutual $(\mathrm{j}\,\omega L_{ms} \underline{I}_s)$ de alţi curenţi. Convenţiile privitoare la semn sînt aceleaşi ca la valori instantanee.

Teorema a doua a lui Kirchhoff se poate scrie strîns, introducînd impedanţa proprie a laturii :

$$\underline{Z}_m = \underline{Z}_{mm} = R_m + \mathrm{j}\,\omega L_m + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_m} \qquad (36.18)$$

şi impedanţa mutuală dintre latura s şi latura m :

$$\underline{Z}_{ms} = \mathrm{j}\,\omega L_{ms}. \qquad (36.19)$$

Cu aceste notații relația (36.18) se scrie :

$$\sum_{m\in(p)} \underline{E}_m = \sum_{m\in(p)} \left(\underline{Z}_m \underline{I}_m + \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq m)}}^{L} \underline{Z}_{ms} \underline{I}_s \right) \tag{36.20}$$

sau mai strîns :

$$\boxed{\sum_{m\in(p)} \underline{E}_m = \sum_{m\in(p)} \sum_{s=1}^{L} \underline{Z}_{ms} \underline{I}_s} \,. \tag{36.21}$$

Observații: *a)* Prima sumă relativă la ochiul (p) se face asupra tuturor indicilor m ai laturilor care aparțin ochiului (p). A doua sumă, în s, se face asupra tuturor laturilor rețelei (inclusiv $s = m$). Dacă o latură s nu e cuplată inductiv cu vreuna din laturile ochiului (p), curentul respectiv nu apare în ecuația acestui ochi, deoarece $\underline{Z}_{ms} = 0$.

b) Dacă se scrie explicit această relație, se observă că fiecare dintre impedanțele mutuale ale laturilor ochiului (p) cu laturi exterioare ochiului (p) apare o singură dată, în timp ce o impedanță mutuală Z_{ms} între laturi m și s, care aparțin ambele ochiului (p), apare de două ori : o dată în termenul $\underline{Z}_{ms}\underline{I}_s$ și a doua oară în termenul $\underline{Z}_{sm}\underline{I}_m$.

c) Comparînd relația (36.20) cu teorema a doua a lui Kirchhoff din curent continuu $\Sigma E_m = \Sigma R_m I_m$, se constată că singura deosebire de ordin formal între aceste relații decurge din existența, în curent alternativ, a impedanțelor mutuale $\underline{Z}_{ms}$.

36.2.3. **Rezolvarea rețelelor, în complex, cu teoremele lui Kirchhoff.** Metoda generală de rezolvare a rețelelor liniare de curent alternativ sinusoidal, cu reprezentare în complex, consistă în utilizarea sistemului de L ecuații Kirchhoff independente :

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{k\in(b)} \underline{I}_k = 0 && b = 1,2,\ldots,N-S = L-O \\ &\sum_{m\in(p)} \left[\sum_{s=1}^{L} \underline{Z}_{ms}\underline{I}_s\right] = \sum_{m\in(p)} \underline{E}_m && p = 1,2,\ldots,O \end{aligned}} \tag{36.22}$$

În rețelele disipative (cum sînt rețelele electrice obișnuite, în care totdeauna $R_m > 0$), acest sistem are o soluție unică, adică există un singur sistem de curenți complecși $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \ldots, \underline{I}_L$ care îl satisfac (la t.e.m. date).

În adevăr, din teoria sistemelor de ecuații algebrice de gradul I, se știe că soluția unui sistem neomogen de L ecuații cu L necunoscute e unică, dacă sistemul omogen corespunzător nu are decît soluția identic nulă ; în caz contrar, o soluție a sistemului omogen poate fi suprapusă cu o soluție a sistemului neomogen și s-ar obține o a doua soluție a sistemului neomogen. În cazul sistemului (36.22), sistemul omogen e acela obținut cu $\underline{E}_m = 0$ $(m = 1,2,\ldots, L)$ și corespunde cazului fizic al unei rețele fără surse. Dar o rețea liniară disipativă fără surse nu poate avea curenți de regim permanent, din cauza dezvoltării ireversibile de energie în rezistențele laturilor (prin efect Joule-Lenz), care cere un aport mediu constant de energie din exterior.

În reţele nedisipative (pur reactive, fără rezistenţe), soluţia sistemului (36.22) poate să nu fie unică. Acest rezultat se explică prin faptul că în astfel de reţele regimul liber nu e amortizat, regimul tranzitoriu nu se stinge niciodată şi regimul permanent consistă în suprapunerea regimului forţat (hotărît de sursele sinusoidale date) cu regimul liber, periodic, determinat de condiţiile iniţiale şi de frecvenţele proprii ale reţelei. În acest caz, sistemul de curenţi care circulă la un moment dat prin laturile reţelei, la t.e.m. date depinde de condiţiile iniţiale: de exemplu, de ordinea închiderii întreruptoarelor de alimentare.

La aplicarea ecuaţiilor (36.22) se urmează aceleaşi etape ca şi în cazul teoremelor scrise cu valori instantanee (par. 36.14), cu observaţia că înainte de a scrie ecuaţiile e necesar să se calculeze imaginile în complex ale tensiunilor electromotoare date — pornind de la o singură formă normală (în sinus sau în cosinus) a valorilor lor instantanee. După rezolvarea ecuaţiilor în complex, trecerea inversă la valorile instantanee ale curenţilor se face cu aceeaşi formă normală.

Verificarea calculului se face fie scriind ecuaţii suplimentare pe ochiuri neutilizate iniţial, ecuaţii care trebuie să fie identic satisfăcute cu soluţiile complexe obţinute, fie — mai complet — verificînd bilanţul puterilor complexe (v. par. 37 şi aplicaţia 37.3.3.).

Dacă în problema dată se cere o tensiune u, cu imaginea $\underline{U}$, între două noduri oarecare (b) şi (d) se scrie ecuaţia a doua a lui Kirchhoff pe un ochi constituit din laturi ale reţelei şi închis prin linia acestei tensiuni (v. aplicaţia 36.3.3.).

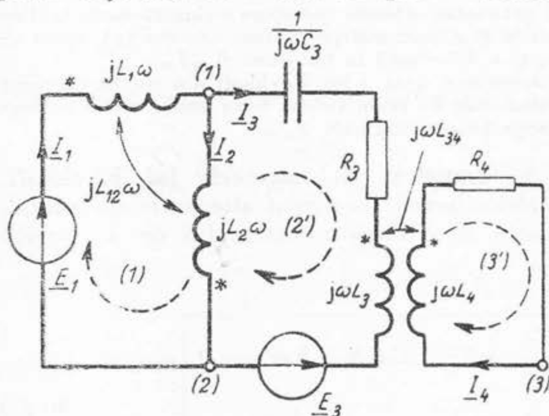


Fig. 36.6

36.3. Aplicaţii

36.3.1. Scrierea ecuaţiilor literale pentru reţeaua din figura 36.6. Reţeaua are $L=4$ laturi, $N=3$ noduri, $S=2$ subreţele conexe şi $O = L - N + S = 3$ ochiuri independente. Vom avea $N - S = 1$ ecuaţii de noduri (de ex. pentru nodul (1) şi $O = 3$ ecuaţii de ochiuri pentru ochiurile (1'), (2'), (3') alese.

Alegem sensurile de referinţă pentru curenţii de laturi I_1, I_2, I_3 I_4 şi sensurile de scriere pe ochiuri. Ecuaţiile sînt

$$\begin{cases} (1) \quad \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_1 = 0 \\ (1') \quad \underline{E}_1 = \mathrm{j}\,\omega L_1\underline{I}_1 - \mathrm{j}\,\omega L_{12}\underline{I}_2 + \mathrm{j}\,\omega L_2\underline{I}_2 - \mathrm{j}\,\omega L_{21}\underline{I}_1 \\ (2') \quad \underline{E}_3 = \left(R_3 + \mathrm{j}\,\omega L_3 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}\right)\underline{I}_3 - \mathrm{j}\,\omega L_{34}\underline{I}_4 - \mathrm{j}\,\omega L_2\underline{I}_2 + \mathrm{j}\,\omega L_{21}\underline{I}_1 \\ (3') \quad 0 = (R_4 + \mathrm{j}\,\omega L_4)\underline{I}_4 - \mathrm{j}\,\omega L_{43}\underline{I}_3. \end{cases} \tag{36.23}$$

La rezolvarea acestui sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute e preferabil să eliminăm curentul $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ (conform cu (1)) din ecuaţiile de ochiuri (1'), (2'), (3'), pentru a obţine un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute — la care se poate aplica regula lui Cramer, fără a fi nevoie să se opereze cu determinanţi de ordin mai mare decît trei.

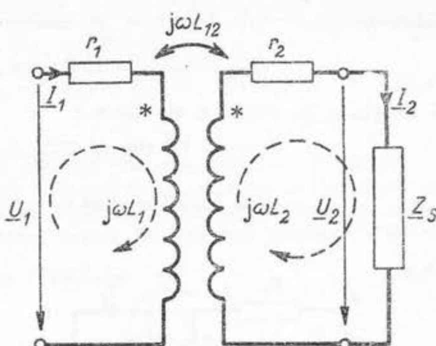


Fig. 36.7

36.3.2. **Impedanţa echivalentă a transformatorului în sarcină** (fig. 36.7). În acest caz,

$N = 2,\ L = 2,\ S = 2,$ şi $O = L - N + S = 2$

ecuaţii independente de ochiuri.

Scriem ecuaţiile cu ochiurile închise pe liniile tensiunilor la borne:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega L_{12}\underline{I}_2 - \underline{U}_1 \\ 0 &= (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 - j\omega L_{21}\underline{I}_1 + \underline{U}_2 \end{aligned}\right\}. \quad (36.24)$$

Aceste ecuaţii sînt imaginile în complex ale ecuaţiilor (36.11). Ele se scriu sub forma:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1\underline{I}_1 - \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ -\underline{U}_2 &= \underline{Z}_2\underline{I}_2 - \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 \end{aligned}\right\}, \quad (36.25)$$

în care $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = j\omega L_{12}$ e impedanţa mutuală, $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ e impedanţa proprie a primarului, iar $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$ e impedanţa proprie a secundarului.

Dacă valoarea algebrică a inductivităţii mutuale L_{12} ar fi fost definită în raport cu sensurile de referinţă luate pentru curenţi, semnul din faţa lui $\underline{Z}_{12}$ ar fi fost (+), dar acea valoare a inductivităţii mutuale ar fi fost negativă ($L_{12} < 0$) pentru înfăşurări realizate ca în figura 36.5, *a* (cu tensiuni u_1 şi u_2 practic în fază).

Dacă la bornele secundare ale transformatorului e conectată o sarcină de impedanţă echivalentă $\underline{Z}_s$,

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_s\underline{I}_2 \quad (36.26)$$

şi ecuaţiile transformatorului devin:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1\underline{I}_1 - \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ 0 &= (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s)\underline{I}_2 - \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 \end{aligned}\right\}. \quad (36.27)$$

Calculăm impedanţa echivalentă de intrare a transformatorului:

$$\underline{Z}_{e_1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}. \quad (36.28)$$

Din a doua ecuaţie (36.27) se obţine:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s}\underline{I}_1 \quad (36.29)$$

şi introducînd această valoare în prima ecuaţie (30.27), se obţine:

$$\underline{Z}_{e_1} = \underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s} = \underline{Z}_1 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s}. \quad (36.30)$$

36.3.3. **Rezolvarea numerică a unei reţele.** Datorită caracterului complex al ecuaţiilor, rezolvarea lor literală conduce la calcule extrem de laborioase. De aceea, în aplicaţii se preferă scrierea de la început a ecuaţiilor sub formă numerică şi rezolvarea lor sub acestă formă. Ca exemplu, studiem reţeaua din figura 36.8,*a*, în care parametrii de circuit şi t.e.m. ale generatoarelor sînt:

$$\left.\begin{aligned} &R_1 = R_2 = 20\Omega;\ L_1 = 0{,}0318\ \text{H};\ L_2 = L_4 = 0{,}0636\ \text{H}; \\ &L_{12} = +\ 0{,}0318\ \text{H};\ C_3 = 159\ \mu\text{F}; \\ &e_1 = 10\sqrt{2}\sin\omega t;\ e_2 = 50\sqrt{2}\cos(\omega t - \pi);\ f = \frac{\omega}{2\pi} = 50\ \text{Hz}. \end{aligned}\right\} \quad (36.31)$$

Calculăm reactanțele bobinelor și condensatoarelor:

$$\omega L_1 = \omega L_{12} = 10\Omega;\ \omega L_2 = \omega L_4 = 20\Omega;\ \frac{1}{\omega C_3} = -20\Omega \tag{36.32}$$

și imaginile în complex ale t.e.m.:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= 10\sqrt{2}\sin\omega t \rightleftarrows \underline{E}_1 = 10e^{j0} = 10 \\ e_2 &= 50\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \rightleftarrows \underline{E}_2 = 50e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j50. \end{aligned}\right\}. \tag{36.33}$$

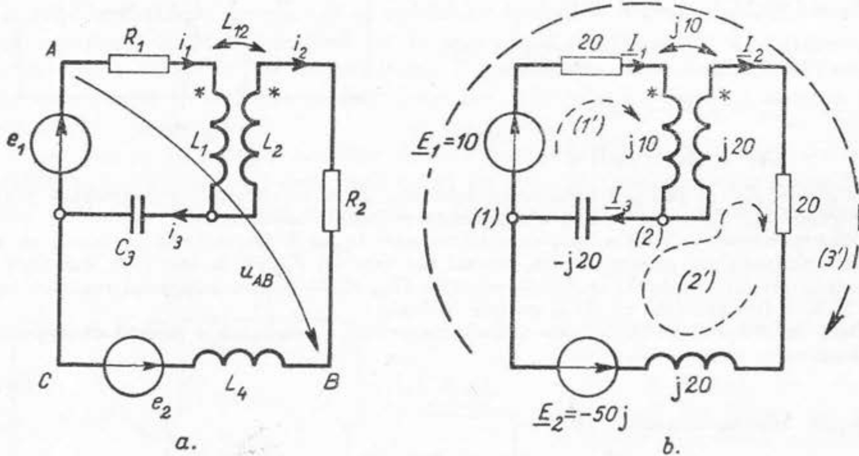


Fig. 36.8

Pentru scrierea directă a ecuațiilor numerice e util să notăm schema cu valorile complexe ale impedanțelor și t.e.m. (fig. 36·8, *b*). Alegem sensurile de referință ale curenților $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ și ochiurile independente (1′) și (2′), știind că $O = L - N + S = 3-2+1 = 2$. Substituind direct pe $\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2$ (scos din ecuația nodului (1)) ecuațiile de ochiuri în complex sînt:

$$10 = (20 + j10)\underline{I}_1 - j10\underline{I}_2 - j20(\underline{I}_1 - \underline{I}_2)$$

$$-(-50\,j) = -(-j\,20)(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) + (20 + j\,20 + j\,20)\,\underline{I}_2 - j\,10\,\underline{I}_1$$

sau

$$\left.\begin{aligned} 10 &= (20 - j\,10)\underline{I}_1 + j\,10\underline{I}_2 \\ j50 &= j\,10\underline{I}_1 + (20 + j\,20)\underline{I}_2 \end{aligned}\right\} \tag{36.34}$$

cu soluțiile:

$$\underline{I}_1 = 1;\ \underline{I}_2 = 1 + j = \sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}},\ \underline{I}_3 = I_1 - I_2 = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}. \tag{36.35}$$

Valorile instantanee ale curenților sînt (cu 34·78):

$$\begin{aligned} i_1 &= \mathrm{Im}\{\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\} = \sqrt{2}\sin(\omega t) \\ i_2 &= \mathrm{Im}\{\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\} = 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \\ i_3 &= \mathrm{Im}\{e^{-j\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\} = \sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{36.36}$$

Observații: *a)* Pentru a verifica rezultatele, scriem ecuația ochiului exterior (3′):

$$10-(-50j)=(20+j\,10)\underline{I}_1-j\,10\underline{I}_2+(20+j\,40)\underline{I}_2-j\,10\underline{I}_1$$

$$10+50j=20\underline{I}_1+(20+j\,30)\underline{I}_2=20(1)+(20+j\,30)(1+j) \qquad (36.37)$$

care cu relația (36.35) e satisfăcută identic.

b) O verificare mai completă se face cu bilanțul puterilor complexe (v. 37.3).

c) După determinarea curenților putem afla oricare dintre căderile de tensiune din circuit. Să presupunem că se cere tensiunea u_{AB} (fig. 36·8. *a*). Scriem atunci teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul *ABC*, închis prin laturi și prin linia acestei tensiuni la borne:

$$\underline{E}_1-\underline{E}_2=\underline{U}_{AB}+j\omega L_4\underline{I}_2, \qquad (36.38)$$

de unde:

$$\underline{U}_{AB}=\underline{E}_1-\underline{E}_2-j\omega L_4\underline{I}_2=10-(-j\,50)-j\,20(1+j)=30\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}},$$

iar

$$u_{AB}=\operatorname{Im}\left\{30\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\right\}=60\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right). \qquad (36.39)$$

37. CONSERVAREA PUTERILOR ÎN REȚELELE DE CURENT ALTERNATIV

Teoremele conservării puterilor se exprimă prin relații care sînt consecințe analitice ale teoremelor lui Kirchhoff fără alte ipoteze. Aceste relații se interpretează pe baza legii transformării de energie în conductoare (rel. 31.19 și 31.20), a teoremei energiei electrice (rel. 31.16), a teoremei energiei magnetice (rel. 31.17), a teoremei transferului de putere la borne (rel. 31.21).

37.1. Teorema conservării puterilor instantanee

37.1.1. Forma generală a teoremei. Fie o rețea electrică, constituită exclusiv din elemente dipolare de circuit, și ale cărei laturi nu sînt cuplate magnetic cu exteriorul. Rețeaua nu este însă izolată și presupunem, pentru generalitate, că fiecare nod $(c)=1, 2,\ldots, N$ constituie cîte o bornă de acces, în el fiind injectat din exterior[1] curentul instantaneu $i_c^{(ex)}$. Conform teoremei transferului de putere la borne (rel. 31.21), rețeaua primește din exterior puterea instantanee:

$$p_b=\sum_{c=1}^{N}v_c i_c^{(ex)} \qquad (37.1)$$

[1] Faptul că un nod (a) nu e conectat în exterior, se ia în considerare punînd $i_a^{(ex)}=0$.

unde v_c sînt potenţialele nodurilor ei faţă de un punct arbitrar[1] (de obicei, ultimul nod — v. fig. 37.1).
Din teorema întîia a lui Kirchhoff, scrisă pentru nodul (c), rezultă :

$$i_c^{(ex)} = \sum_{m\in(c)} i_m, \tag{37.2}$$

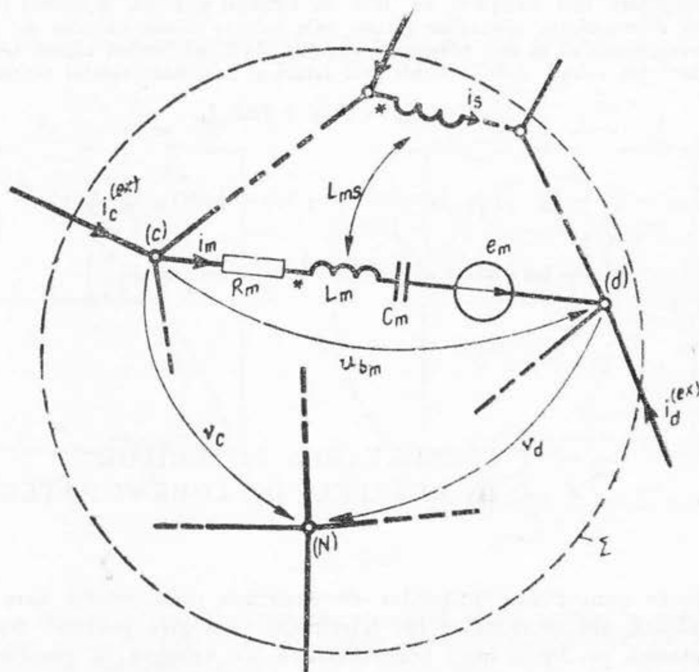


Fig. 37.1

suma algebrică din membrul al doilea fiind luată numai asupra laturilor interioare ale reţelei conectate la nod. Înlocuind relaţia (37.2) în relaţia (37.1) şi ordonînd suma dublă după indicii $m = 1, 2, ..., L$ ai curenţilor laturilor, se obţine o sumă simplă în m, al cărei fiecare termen conţine curentul i_m, dat factor comun pe lîngă toate potenţialele nodurilor din care „iese" acest curent. Deoarece o latură are numai două capete, există numai două astfel de noduri, de exemplu, (c) şi (d), şi anume unul (c), din care curentul iese (în care caz potenţialul v_c înmulţeşte curentul i_m), şi unul (d), în care curentul intră (în care caz potenţialul v_d înmulţeşte curentul $- i_m$). Rezultă deci egalitatea :

$$p_b = \sum_{c=1}^{N} \sum_{m\in(c)} v_c i_m = \sum_{m=1}^{L} i_m(v_c - v_d). \tag{37.3}$$

[1] Aceste potenţiale se calculează (ca şi tensiunile la borne u_b) pe curbe, ale căror puncte sînt depărtate de regiunile de flux magnetic intens din bobine şi generatoare — ceea ce e totdeauna posibil, dacă reţeaua nu e cuplată inductiv cu exteriorul. De asemenea, curba închisă, determinată de linia tensiunii la borne a unei laturi şi liniile de calcul al potenţialelor capetelor laturii, nu trebuie să înlănţuie fluxuri magnetice.

Diferența de potențiale în această ordine e însă chiar tensiunea la bornele laturii, luată după regula de la receptoare (v. fig. 37.1):

$$u_{b_m} = v_c - v_d. \tag{37.4}$$

Astfel se obține *forma generală a teoremei conservării puterilor* instantanee:

$$p_b = \sum_{c=1}^{N} v_c i_c^{(ex)} = \sum_{m=1}^{L} u_{b_m} i_m \tag{37.5}$$

Puterea primită pe la bornele de acces de o rețea necuplată inductiv cu exteriorul e egală cu suma puterilor instantanee, primite de laturi pe la borne.

37.1.2. **Conservarea puterilor instantanee în rețele liniare.** În acest caz, tensiunea la borne se exprimă cu relațiile (36.7) și (36.9) sub forma:

$$u_{b_m} = u_{R_m} + u_{C_m} + \frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = R_m i_m + \frac{q_m}{C_m} + \sum_{s=1}^{L} L_{ms}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} - e_m. \tag{37.6}$$

Înlocuim această expresie în relația (37.5) și formăm derivate în raport cu timpul, ținînd seama că R_m, C_m, L_{ms} sînt constante, iar $i_m = \frac{\mathrm{d}q_m}{\mathrm{d}t}$. Se obține relația:

$$\sum_{c=1}^{N} v_c i_c^{(ex)} + \sum_{m=1}^{L} e_m i_m = \sum_{m=1}^{L} R_m i_m^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{m=1}^{L}\frac{q_m^2}{2C_m}\right] + \sum_{m=1}^{L}\sum_{s=1}^{L} L_{ms} i_m \frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}. \tag{37.7}$$

Suma dublă se poate descompune în doi termeni egali, iar în al doilea dintre aceștia se pot permuta indicii muți între ei (notarea indicilor și ordinea de sumare nu prezintă importanță la calculul unei sume multiple) și se poate înlocui $L_{sm} = L_{ms}$:

$$\sum_{m=1}^{L}\sum_{s=1}^{L} L_{ms} i_m \frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{L}\sum_{s=1}^{L} L_{ms} i_m \frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{L}\sum_{m=1}^{L} L_{sm} i_s \frac{\mathrm{d}i_m}{\mathrm{d}t} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{L}\sum_{s=1}^{L} L_{ms}\left(i_m \frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t} + i_s \frac{\mathrm{d}i_m}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{m=1}^{L}\sum_{s=1}^{L}\frac{L_{ms} i_m i_s}{2}\right]. \tag{37.8}$$

Cu aceasta, relația (37.7) ia forma:

$$\sum_{c=1}^{N} v_c i_c^{(ex)} + \sum_{m=1}^{L} e_m i_m = \sum_{m=1}^{L} R_m i_m^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{m=1}^{L}\frac{q_m^2}{2C_m} + \sum_{s=1}^{L}\sum_{m=1}^{L}\frac{L_{ms} i_m i_s}{2}\right]. \tag{37.9}$$

Interpretarea termenilor acestei relații rezultă imediat cu relațiile (37.1), (31.20), (31.19), (31.16) și (31.17) și se poate scrie:

$$p_b + p_g = p_R + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[W^{(m)} + W^{(e)}]^{1}. \tag{37.10}$$

1 La energii păstrăm simbolurile majuscule chiar pentru valori instantanee.

Relaţia (37.9) cu interpretarea relaţiei (37.10) reprezintă expresia *teoremei conservării puterilor instantanee în reţele liniare*:

Suma dintre puterea primită instantaneu pe la bornele reţelei p_b (*v*.37.1) şi puterea debitată instantaneu de generatoare

$$p_g = \sum_{m=1}^{L} e_m i_m \tag{37.11}$$

este egală cu suma dintre puterea disipată instantaneu prin efect Joule-Lenz

$$p_R = \sum_{m=1}^{L} R_m i_m^2 \tag{37.12}$$

şi viteza de variaţie a energiei electromagnetice instantanee, acumulată în cîmpul magnetic al bobinelor

$$W^{(m)} = \sum_{m=1}^{L}\sum_{s=1}^{L} \frac{L_{ms} i_m i_s}{2} = \sum_{m=1}^{L} \frac{L_m i_m^2}{2} + \sum_{m<s}\sum L_{ms} i_m i_s{}^{1} \tag{37.13}$$

şi în cîmpul electric al condensatoarelor reţelei

$$W^{(e)} = \sum_{m=1}^{L} \frac{q_m^2}{2C_m} = \sum_{m=1}^{L} \frac{C_m u_{Cm}^2}{2}. \tag{37.14}$$

Această teoremă generalizează bilanţul puterilor instantanee (33.114) al unei laturi de circuit.

37.1.3. **Conservarea puterilor instantanee la o reţea izolată.** În cazul unei reţele fără borne de acces, şi deci izolată electric de exterior, puterea $p_b = 0$ şi cele două expresii (37.5) şi (37.10) ale teoremei capătă formele:

$$\boxed{\sum_{m=1}^{L} u_{b_m} i_m = 0} \tag{37.15}$$

$$p_g = p_R + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[W^{(m)} + W^{(e)}]. \tag{37.16}$$

37.2. Teoremele conservării puterilor complexe, active şi reactive

37.2.1. **Puterea complexă, puterea activă şi puterea reactivă.** În regim permanent sinusoidal, curenţii şi tensiunile sînt de forma:

$$i_m = I_m \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_m) \rightleftarrows \underline{I}_m = I_m e^{j\gamma_m} \tag{37.17}$$

$$i_c^{(ex)} = I_c^{(ex)} \sqrt{2} \sin(\omega t + \delta_c) \rightleftarrows \underline{I}_c = I_c e^{j\delta_c} \tag{37.18}$$

$$v_c = V_c \sqrt{2} \sin(\omega t + \varepsilon_c) \rightleftarrows \underline{V}_c = V_c e^{j\varepsilon_c} \tag{37.19}$$

$$u_{b_m} = U_{b_m} \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta_m) \rightleftarrows \underline{U}_{b_m} = U_{b_m} e^{j\beta_m} \tag{37.20}$$

$$e_m = E_m \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_m) \rightleftarrows \underline{E}_m = E_m e^{j\alpha_m} \tag{37.21}$$

[1] Notaţia $m < s$ sub semnul de sumă dublă precizează că sumarea se va face asupra tuturor perechilor de valori permise pentru indicii distincţi, $m = 1, 2, ..., L-1$ şi $s = 2, 3, ..., L$, astfel că nici o pereche nu se repetă.

Așa cum am mai arătat, puterile instantanee, care sînt produse de mărimi sinusoidale, nu sînt ele însele sinusoidale și nu se pot reprezenta în complex. De aceea, nici formele instantanee ale teoremei conservării puterilor (37.5), (37.9), (37.10), (37.15) (37.16) — care exprimă însumarea, amplificarea și derivarea unor mărimi nesinusoidale — nu pot fi reprezentate în complex, așa cum au putut fi reprezentate teoremele lui Kirchhoff.

Pornind însă de la forma complexă a teoremelor lui Kirchhoff, operînd cu puteri complexe (de tipul celor definite în par. 34.33) și urmărind pas cu pas demonstrația din paragraful precedent, se poate demonstra o teoremă a conservării puterilor complexe.

Se numește *putere complexă primită pe la borne* de o rețea fără cuplaje inductive cu exteriorul, mărimea definită de expresia:

$$\boxed{\underline{S}_b = \sum_{c=1}^{N} \underline{V}_c \underline{I}_c^{(ex)*}} = \sum_{c=1}^{N} V_c I_c^{(ex)} e^{j(\varepsilon_c - \delta_c)} = P_b + jQ_b. \qquad (37.22)$$

Definiția aceasta generalizează noțiunea de putere complexă, definită în paragraful 34.33 pentru un dipol. Partea reală a acestei mărimi e egală cu *puterea activă primită pe la borne*, definită conform cu relația (33.103), de valoare medie, pe un număr întreg de perioade a puterii instantanee primită pe la borne (37.1):

$$\boxed{P_b = \widetilde{p}_b = \frac{1}{T}\int_0^T p_b \mathrm{d}t} = \sum_{c=1}^{N} \widetilde{v_c i_c^{(ex)}}. \qquad (37.23)$$

Folosind teorema valorii medii a unui produs (33.29′), rezultă:

$$P_b = \sum_{c=1}^{N} V_c I_c^{(ex)} \cos(\varepsilon_c - \delta_c) = \mathrm{Re}\{\underline{S}_b\}. \qquad (37.23')$$

În analogie cu relația (33.110), se numește *putere reactivă primită pe la borne* mărimea definită de expresia:

$$\boxed{Q_b = \sum_{c=1}^{N} V_c I_c^{(ex)} \sin(\varepsilon_c - \delta_c)} = \mathrm{Im}\{\underline{S}_b\}, \qquad (37.24)$$

egală cu partea imaginară a puterii complexe (37.22).

Se numește *putere aparentă la borne* mărimea pozitivă definită de modulul puterii complexe:

$$S_b = |\underline{S}_b| = \left|\sum_{c=1}^{N} \underline{V}_c \underline{I}_c^{(ex)*}\right| = \sqrt{P_b^2 + Q_b^2} > 0. \qquad (37.25)$$

Această mărime este definită prin analogie cu puterea aparentă a unui dipol, (33.106), care era egală cu modulul puterii complexe respective, (34.97), și nu prezintă utilitate practică decît în cazul particular în care toate produsele din suma (37.22) sînt egale (de ex., în regim trifazat echilibrat — v. cap. 38).

37.2.2. **Conservarea puterilor complexe.** Considerăm imaginea în complex a relaţiei (37.2) şi luăm conjugata complexă a expresiei obţinute (termen cu termen) :

$$\underline{I}_c^{(ex)*} = \sum_{m \in (c)} \underline{I}_m^* . \qquad (37.26)$$

Introducînd această expresie în relaţia (37.22), transformăm suma dublă astfel obţinută în acelaşi mod cum am trecut de la relaţia (37.1) cu relaţia (37.2) la relaţia (37.5), folosind reprezentarea în complex a relaţiei (37.4) :

$$\underline{U}_{b_m} = \underline{V}_c - \underline{V}_d \qquad (37.27)$$

Se obţine *forma generală a teoremei conservării puterilor complexe:*

$$\boxed{\underline{S}_b = \sum_{c=1}^{N} \underline{V}_c \underline{I}_c^{(ex)*} = \sum_{m=1}^{L} \underline{U}_{b_m} \underline{I}_m} \qquad (37.28)$$

Puterea complexă primită pe la bornele de acces de o reţea necuplată inductiv cu exteriorul e egală cu suma puterilor complexe primite de laturi pe la borne.

Ţinînd seama de reprezentarea în complex a relaţiei (37.6),

$$\underline{U}_{b_m} = R_m \underline{I}_m + \frac{\underline{I}_m}{\mathrm{j}\,\omega C_m} + \sum_{s=1}^{L} \mathrm{j}\,\omega L_{ms} \underline{I}_s - \underline{E}_m. \qquad (37.29)$$

şi înlocuind tensiunea la borne în relaţia (37·27), se obţine egalitatea:

$$\sum_{c=1}^{N} \underline{V}_c \underline{I}_c^{(ex)*} + \sum_{m=1}^{L} \underline{E}_m \underline{I}_m^* = \sum_{m=1}^{L} R_m I_m^2 + \mathrm{j}\left[\sum_{m=1}^{L}\sum_{s=1}^{L} \omega L_{ms} \underline{I}_m^* \underline{I}_s - \sum_{m=1}^{L} \frac{I_m^2}{\omega C_m}\right], \qquad (37.30)$$

în care

$$I_m^2 = |\,\underline{I}_m\,|^2 = \underline{I}_m \underline{I}_m^* .$$

Primul termen din paranteza dreaptă se transformă separînd din suma dublă termenii de indici egali ($m = s$) şi observînd că termenii rămaşi (cu $m \neq s$) pot fi grupaţi doi cîte doi termeni cu aceeaşi pereche de indici, iar $L_{mm} = L_m$ şi $L_{ms} = L_{sm}$. Se obţine :

$$\sum_{m=1}^{L}\sum_{s=1}^{L} \omega L_{ms} \underline{I}_s \underline{I}_m^* = \sum_{m=1}^{L} \omega L_m I_m^2 + \sum\sum_{m<s} \omega L_{ms} (\underline{I}_s \underline{I}_m^* + \underline{I}_s^* \underline{I}_m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{L} \omega L_m I_m^2 + \sum\sum_{m<s} 2\,\omega L_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s), \qquad (37.31)$$

deoarece

$$\underline{I}_s \underline{I}_m^* + \underline{I}_s^* \underline{I}_m = I_s I_m (\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\gamma_s - \gamma_m)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\gamma_s - \gamma_m)}) = 2 I_s I_m \cos(\gamma_s - \gamma_m) \qquad (37.32)$$

Înlocuind relaţia (37·31) în relaţia (37·30) şi observînd că :

$$X_m = \omega L_m - \frac{1}{\omega C_m}; \quad X_{ms} = \omega L_{ms} \qquad (37.33)$$

sînt reactanța proprie a laturii m și reactanța mutuală dintre latura m și latura s (în raport cu sensurile de referință pentru care a fost definit $L_{ms} \gtrless 0$), rezultă *forma explicită a teoremei conservării puterilor complexe*:

$$\sum_{c=1}^{N} \underline{V}_c \underline{I}_c^{(ex)*} + \sum_{m=1}^{L} \underline{E}_m \underline{I}_m^* = \sum_{m=1}^{L} R_m I_m^2 + \mathrm{j}\left[\sum_{m=1}^{L} X_m I_m^2 + \sum\sum_{m<s} 2X_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s)\right] \tag{37.34}$$

care se scrie scurt:

$$\boxed{\underline{S}_b + \underline{S}_g = P_R + \mathrm{j}Q_X} \tag{37.35}$$

Suma dintre puterea complexă primită pe la borne $\underline{S}_b$ (v. 37.22) și puterea complexă debitată de generatoarele din rețea

$$\underline{S}_g = \sum_{m=1}^{L} \underline{E}_m \underline{I}_m^* \tag{37.36}$$

are ca parte reală puterea activă P_R, disipată în rezistențele laturilor, iar ca parte imaginară, puterea reactivă Q_X primită de bobinele și condensatoarele rețelei.

37.2.3. Teorema conservării puterilor active. Puterile active sînt valori medii ale puterilor instantanee, egale cu partea reală a puterilor complexe corespunzătoare. De aceea, separînd partea reală a relației (37.28), se obține forma generală a teoremei conservării puterilor active:

$$P_b = \sum_{c=1} V_c I_c^{(ex)} \cos(\varepsilon_c - \delta_c) = \sum_{m=1}^{L} U_{b_m} I_m \cos(\beta_m - \gamma_m). \tag{37.37}$$

Puterea activă primită pe la bornele de acces de o rețea necuplată inductiv cu exteriorul e egală cu suma puterilor active, primite de laturi pe la borne.

Această formă generală poate fi explicitată, înlocuind tensiunea la borne, în funcție de parametrii și curenții laturilor.

Rezultatul se scrie direct, luînd partea reală a relației (37.34):

$$\sum_{c=1}^{N} V_c I_c^{(ex)} \cos(\varepsilon_c - \delta_c) + \sum_{m=1}^{L} E_m I_m \cos(\alpha_m - \gamma_m) = \sum_{m=1}^{L} R_m I_m^2 \geqslant 0, \tag{37.38}$$

care se scrie strîns:

$$P_b + P_g = P_R \geqslant 0. \tag{37.39}$$

Suma dintre puterea activă primită pe la borne P_b (v. 37.23) și puterea activă debitată de generatoare

$$P_g = \sum_{m=1}^{L} E_m I_m \cos(\alpha_m - \gamma_m) \gtrless 0 \tag{37.40}$$

e egală cu puterea activă disipată în laturile rețelei:

$$P_R = \sum_{m=1}^{L} R_m I_m^2 \geqslant 0. \tag{37.41}$$

Relația (37.39) se mai poate obține și luînd valoarea medie pe o perioadă a expresiei (37.10).

În adevăr, puterile active sînt valori medii ale puterilor instantanee, valoarea medie a produsului a două mărimi sinusoidale e egală cu produsul dintre valorile lor efective şi cosinusul defazajului lor (v. rel. 33.29′), iar valoarea medie a derivatei unei funcţiuni periodice f(t) e nulă :

$$\widetilde{\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\,(\mathrm{f}(T)-\mathrm{f}(0)) = 0, \tag{37.42}$$

deoarece în virtutea periodicităţii $\mathrm{f}(T) = \mathrm{f}(0)$.

Relaţia (37.39) oglindeşte faptul că, în regim permanent, energia medie a cîmpului electromagnetic e constantă, iar cîmpul nu participă în medie la bilanţul puterilor, ci numai îl mijloceşte : transmite energia de la borne şi de la generatoare la conductoarele reţelei, în care energia se disipă prin efect Joule-Lenz.

37.2.4. **Teorema conservării puterilor reactive.** Separînd partea imaginară a relaţiei (37.28), se obţine forma generală a teoremei conservării puterilor reactive :

$$Q_b = \sum_{c=1}^{N} V_c I_c^{(ex)} \sin(\varepsilon_c - \delta_c) = \sum_{m=1}^{N} U_{b_m} I_m \sin(\beta_m - \gamma_m) \tag{37.43}$$

Puterea reactivă primită pe la bornele de acces de o reţea necuplată inductiv cu exteriorul e egală cu suma puterilor reactive primite de laturi pe la borne.

Această formă generală poate fi explicitată, înlocuind tensiunea la borne în funcţie de parametrii şi curenţii laturilor. Rezultatul se scrie direct, luînd partea imaginară a relaţiei (37.34) :

$$\sum_{c=1}^{N} V_c I_c^{(ex)} \sin(\varepsilon_c - \delta_c) + \sum_{m=1}^{L} E_m I_m \sin(\alpha_m - \gamma_m) =$$
$$= \sum_{m=1}^{L} X_m I_m^2 + \sum\sum_{m<s} 2\,X_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s), \tag{37.44}$$

care se scrie strîns :

$$Q_b + Q_g = Q_X. \tag{37.45}$$

Suma dintre puterea reactivă primită pe la borne Q_b (v. 37.24) şi puterea reactivă produsă de generatoare :

$$Q_g = \sum_{m=1}^{L} E_m I_m \sin(\alpha_m - \gamma_m) \tag{37.46}$$

e egală cu puterea reactivă primită de bobinele şi condensatoarele reţelei :

$$Q_X = \sum_{m=1}^{L} X_m I_m^2 + \sum\sum_{m<s} 2 X_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s). \tag{37.47}$$

Expresia (37.47) a puterii reactive primite de bobinele şi condensatoarele reţelei se transformă, înlocuind reactanţele proprii şi mutuale cu (37.33) :

$$Q_X = \sum_{m=1}^{L} \omega L_m I_m^2 - \sum_{m=1}^{L} \frac{I_m^2}{\omega C_m} + \sum\sum_{m<s} 2\,\omega L_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s). \tag{37.48}$$

Se observă că în afară de puterile reactive corespunzătoare inductivităților proprii ale laturilor (v. și rel. 34.26):

$$Q_{Lm} = \omega L_m I_m^2 \geqslant 0 \qquad (37.49)$$

și capacităților (v. și rel. 34.29):

$$Q_{C_m} = -\frac{I_m^2}{\omega C_m} \leqslant 0 \qquad (37.50)$$

expresia de mai sus conține pentru fiecare inductivitate mutuală L_{ms} o putere reactivă:

$$Q_{Lms} = 2\omega L_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s) \gtrless 0. \qquad (37.51)$$

Puterea reactivă (37.48) primită de bobinele și condensatoarele unei rețele mai poate fi exprimată în funcție de energia magnetică medie și energia electrică medie. În adevăr, luînd media pe o perioadă a energiei magnetice (37.13), și ținînd seama că media pătratului unei mărimi sinusoidale e egală cu pătratul valorii ei efective, iar media produsului a două mărimi sinusoidale e egală cu produsul valorilor lor efective prin cosinusul defazajului lor, se obține:

$$\widetilde{W}^{(m)} = \sum_{m=1}^{L} \frac{L_m}{2} \widetilde{i_m^2} + \sum\sum_{m<s} L_{ms} \widetilde{i_m i_s} = \sum_{m=1}^{L} \frac{L_m I_m^2}{2} + \sum\sum_{m<s} L_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s). \qquad (37.52)$$

De asemenea, luînd media pe o perioadă a energiei electrice, (37.14) se obține:

$$\widetilde{W}^{(e)} = \sum_{m=1}^{L} \frac{C_m \widetilde{u_{Cm}^2}}{2} = \sum_{m=1}^{L} \frac{C_m U_{Cm}^2}{2} = \sum_{m=1}^{L} \frac{I_m^2}{2\omega^2 C_m} \qquad (37.53)$$

știind că tensiunea condensatorului e egală cu produsul dintre curent și impedanța acestuia:

$$U_{C_m} = I_m \frac{1}{\omega C_m}$$

Cu relațiile (37.52) și (37.53) se obține din relația (37.48) cea mai generală expresie a puterii reactive primite de un receptor pasiv:

$$\boxed{Q_X = 2\omega[\widetilde{W}^{(m)} - \widetilde{W}^{(e)}]}, \qquad (37.54)$$

adică exact expresia (33.123), găsită pentru o latură de circuit. Am numit această expresie „cea mai generală", deoarece se poate defini și pentru un cîmp electromagnetic sinusoidal oarecare și nu numai pentru o rețea cu parametri concentrați.

Folosind această expresie, teorema conservării puterilor complexe, relația (37.35), se scrie:

$$\underline{S}_b + \underline{S}_g = P_R + \mathrm{j}\, 2\omega\, [\widetilde{W}^{(m)} - \widetilde{W}^{(e)}]. \qquad (37.55)$$

Analogia parțială a expresiilor (37.10) și (37.55) nu trebuie să inducă în eroare în ceea ce privește legătura dintre ele: ecuația în complex (37.55) nu este imaginea ecuației instantanee (37.10), termenii acesteia din urmă nefiind mărimi sinusoidale. De aceea, diferența de semn la parantezele din membrul drept nu are nimic paradoxal.

37.2.5. Conservarea puterilor în rețele izolate. În cazul rețelelor izolate, nu există conductoare de legătură cu exteriorul și teoremele de conservare

a puterilor se obţin din cele enunţate pentru reţele neizolate, punînd $I_c^{(ex)} = 0$. Se obţin astfel:

Teorema conservării puterilor complexe (v. rel. 37.28):

$$\sum_{m=1}^{L} \underline{U}_{b_m} \underline{I}_m^* = 0 \tag{37.56}$$

sau, explicit, (v. rel. 37.34):

$$\sum_{m=1}^{L} \underline{E}_m \underline{I}_m^* = \sum R_m I_m^2 + \mathrm{j}\left[\sum_{m=1}^{L} X_m I_m^2 + \sum\sum_{m<s} 2X_m I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s)\right]. \tag{37.57}$$

Teorema conservării puterilor active (v. rel. 37.37):

$$\sum_{m=1}^{L} U_{b_m} I_m \cos(\beta_m - \gamma_m) = 0 \tag{37.58}$$

sau, explicit, (v. rel. 37.38):

$$\sum_{m=1}^{L} E_m I_m \cos(\alpha_m - \gamma_m) = \sum_{m=1}^{L} R_m I_m^2. \tag{37.59}$$

Teorema conservării puterilor reactive (v. rel. 37.43):

$$\sum_{m=1}^{L} U_{b_m} I_m \sin(\beta_m - \gamma_m) = 0 \tag{37.60}$$

sau, explicit, (v. rel. 37.44):

$$\sum_{m=1}^{L} E_m I_m \sin(\alpha_m - \gamma_m) = \sum_{m=1}^{L} X_m I_m^2 + \sum\sum_{m<s} 2X_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s). \tag{37.61}$$

37.2.6. **Conservarea puterilor în reţele pasive.** În reţele pasive, $E_m = 0$ $(m = 1, 2, \ldots, L)$ şi teoremele de conservare capătă formele particulare următoare:

Teorema conservării puterilor complexe (v. rel. 37.34):

$$\sum_{c=1}^{N} \underline{V}_c \underline{I}_c^{(ex)*} = \sum_{m=1}^{L} R_m I_m^2 + \mathrm{j}\left[\sum_{m=1}^{L} X_m I_m^2 + \sum\sum_{m<s} 2X_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s)\right]. \tag{37.62}$$

Teorema conservării puterilor active (v. rel. 37.38):

$$\sum_{c=1}^{N} V_c I_c^{(ex)} \cos(\varepsilon_c - \delta_c) = \sum_{m=1}^{L} R_m I_m^2. \tag{37.63}$$

Teorema conservării puterilor reactive (v. rel. 37.44):

$$\sum_{c=1}^{N} V_c I_c^{(ex)} \sin(\varepsilon_c - \delta_c) = \sum_{m=1}^{L} X_m I_m^2 + \sum\sum_{m<s} 2X_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s) \tag{37.64}$$

37.2.7. **Observații privitoare la teoremele de conservare a puterilor.** *a)* Teorema conservării puterilor se utilizează nu numai pentru determinarea regimului de puteri al unei rețele date, ci și pentru calculul însuși al rețelei (v. metoda separării puterilor, par. 37.3.2) și mai ales pentru verificarea calculului făcut cu alte metode, prin verificarea bilanțului puterilor (v. par. 37.3.1).

b) Calculul puterilor active, respectiv reactive, primite pe la borne sau date de generatoare, se face mai ușor, luînd partea reală, respectiv imaginară, a puterilor complexe (37.22) sau (37.34), decît utilizînd expresiile (37.23′) sau (37.38), respectiv (37.24) sau (37.44).

c) În toate expresiile teoremelor de conservare a puterilor dezvoltate în paragrafele precedente *s-au considerat toate tensiunile la borne u_{b_m} (sau $\underline{U}_{b_m}$) cu sensul de referință după regula de la receptoare, toate t.e.m. ale generatoarelor e_m (sau $\underline{E}_m$), cu sensul de referință același cu al curentului i_m (sau $\underline{I}_m$) și toate inductivitățile mutuale (sau impedanțele mutuale) L_{ms} (sau $\underline{Z}_{ms} = j\omega L_{ms}$) raportate la sensurile de referință ale curenților i_m și i_s.* Orice schimbare a vreunuia dintre aceste sensuri de referință atrage o schimbare de semn a termenului din expresia mărimii care conține mărimea afectată.

d) Bilanțul de puteri se face numai pe întreaga rețea. Sumele care intervin trebuie efectuate asupra tuturor laturilor, respectiv nodurilor.

e) În sumele care intervin în expresiile teoremelor de conservare, fiecare termen are o semnificație fizică bine precizată, reprezentînd puterea primită sau produsă de un anumit element al rețelei. De exemplu, $\underline{E}_m\underline{I}_m^*$ e puterea complexă produsă de generatorul din latura m, $R_m i_m^2$ e puterea instantanee disipată în rezistența laturii m, $2\omega L_{ms} I_m I_s \cos(\gamma_m - \gamma_s)$ e puterea reactivă primită de perechea de bobine din laturile m și s și asociată inductivității lor mutuale. *Numai termenii sumei care exprimă puterile la borne — instantanee $p_b = \sum_{c=1}^{N} v_c i_c^{(ex)}$, complexă $\underline{S}_b$ (v. 37.22), activă P_b (v. 37.23′) sau reactivă Q_b (v. 37.24) — nu au, fiecare în parte, semnificație fizică.* În adevăr, valoarea numerică a fiecăruia dintre acești termeni depinde de valoarea potențialului, adică de alegerea arbitrară a punctului de potențial nul. Un asemenea termen nu reprezintă deci o putere care se transmite pe la o anumită bornă : oricare dintre acești termeni poate fi făcut nul, alegînd borna respectivă ca origine a potențialelor. Puterea la borne, adică suma tuturor acestor termeni, nu depinde însă de alegerea originii potențialului : schimbarea acestei origini adaugă la toate potențialele o constantă, care iese în factor pe lîngă suma — nulă — a tuturor curenților injectați din exterior.

$$\sum v'_c i_c^{(ex)} = \sum (v_c + v_0)\, i_c^{(ex)} = \sum v_c i_c^{(ex)} + v_0 \underbrace{\sum i_c^{(ex)}}_{0} = \sum v_c i_c^{(ex)}. \qquad (37.65)$$

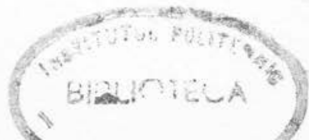
Aici, $\sum_{c=1}^{N} i_c^{(ex)} = i_\Sigma = 0$, conform teoremei continuității, aplicată unei suprafețe închise Σ, care conține întreaga rețea și e înțepată numai de conductoarele de legături la borne (v. fig. 37.1). Această putere la borne (fluxul vectorului Poynting) se transmite strict localizat prin punctele din dielectric ale suprafeței Σ. *Nu există nici un criteriu fizic care să permită să se asocieze univoc fiecărei borne cîte o parte din această putere.*

f) Măsurarea puterilor active transmise pe la borne se face cu aparate numite wattmetre, fiecare wattmetru avînd o indicație proporțională cu media produsului dintre tensiunea aplicată lui și curentul trecut prin el. Un wattmetru poate măsura deci un termen de forma $\widetilde{v_c i_c^{(ex)}} = V_c I_c^{(ex)} \cos(\varepsilon_c - \delta_c)$. Puterea activă totală (37.23′) se poate măsura deci cu N wattmetre, dacă punctul de referință al potențialelor e lăsat oarecare — și numai cu N—1 wattmetre, dacă se ia ca referință nodul N (în acest caz, suma rămînînd cu N—1 termeni).

g) Puterile aparente (egale cu modulele puterilor complexe) nu au proprietatea de conservare. Pentru puterile aparente nu se poate formula o relație de tipul relației (37.56), adică :

$$\sum_{m=1}^{L} U_{b_m} I_m \neq 0, \qquad (37.66)$$

pentru o rețea izolată.



37.3. Aplicaţii la teoremele de conservare a puterilor

37.3.1. Verificarea bilanţului puterilor la rezolvarea reţelelor. După ce s-a efectuat calculul curenţilor unei reţele, o foarte bună verificare consistă în verificarea egalităţilor care exprimă conservarea puterilor.

Exemplu : Considerăm reţeaua din figura 36.8, pentru care, în paragraful 36.3.3, s-au determinat curenţii cu ajutorul formei complexe a teoremelor lui Kirchhoff. Dacă se cunosc expresiile în complex ale curenţilor, cea mai rapidă verificare consistă în aplicarea relaţiei (37.57) :

$$\underline{E}_1\underline{I}_1^* + \underline{E}_2\underline{I}_2^* = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + \mathrm{j}[\omega L_1I_1^2 + \omega L_2I_2^2 - \frac{1}{\omega C_3}I_3^2 + \omega L_4I_2^2 + $$
$$+ 2\omega(-L_{12})I_1I_2\cos(\gamma_1-\gamma_2)]. \tag{37.67}$$

Am scris $-L_{12}$, deoarece L_{12} e definit în raport cu sensurile indicate de bornele polarizate cu care curentul $\underline{I}_1$ coincide, dar $\underline{I}_2$ nu coincide. Înlocuind valorile numerice şi observînd că bilanţul puterilor complexe devine :

$$10.1 + (-\mathrm{j}\,50)(1-\mathrm{j}) = 20.1^2 + 20(\sqrt{2})^2 + \mathrm{j}\Big[10.1^2 + 20(\sqrt{2})^2 - 20.1^2 + 20(\sqrt{2})^2 +$$
$$+ 2(-10).\,1.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\Big] \tag{37.68}$$
$$60 + \mathrm{j}\,50 = 60 + \mathrm{j}\,50.$$

Bilanţul puterilor active ($P_g = P_R = 60$ W) şi al celor reactive ($Q_g = Q_X = 50$ var) este verificat.

37.3.2. Metoda separării puterilor. Egalităţile care exprimă conservarea puterilor active, respectiv reactive, pot fi utilizate pentru rezolvarea reţelelor — scriindu-le pentru diferite porţiuni de reţea, considerate ca reţele neizolate, sau pentru întreaga reţea izolată, în numărul necesar corespunzător numărului necunoscutelor. Se obţine astfel un sistem de ecuaţii, a cărui rezolvare permite determinarea valorilor efective şi a defazajelor necunoscute. Această metodă de rezolvare se mai numeşte *metoda separării puterilor* şi este indicată în special pentru reţele lipsite de inductivităţi mutuale şi atunci cînd laturile receptoare nu sînt caracterizate prin impedanţele lor complexe, ci prin puterea activă nominală, factorul de putere şi tensiunea nominală. Metoda se utilizează şi în studiul reţelelor trifazate echilibrate (v. par. 39).

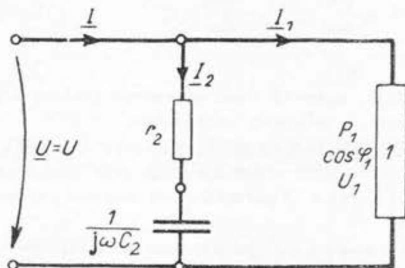


Fig. 37.2.

Exemplu : Considerăm un receptor liniar inductiv 1, care absoarbe puterea activă $P_1 = 2{,}4$ kw, sub tensiunea la borne $U_1 = 120$ V, cu factorul de putere $\cos\varphi_1 = 0{,}5$ (fig. 37.2), şi în paralel cu el un circuit serie (r, C), cu $r_2 = 3\,\Omega$ şi $\frac{1}{\omega C_2} = 3\ \Omega$. Calculăm curentul total absorbit I (valoarea efectivă) şi defazajul φ al acestui curent faţă de tensiunea aplicată la borne $U = U_1 = 120$ V.

Receptorul consumă putere activă şi putere reactivă (inductivă) :

$$P_1 = 2\,400\ \mathrm{W};\quad Q_1 = P_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \sqrt{3}\,P_1 = \sqrt{3}.\,2\,400\ \mathrm{var} > 0.$$

Latura (r, C) consumă puterea activă P_2 şi puterea reactivă Q_2, determinabile prin aplicarea bilanţului puterilor pentru această latură :

$$P_2 = r_2I_2^2 = U_2I_2\cos\varphi_2 = U\,I_2\cos\varphi_2$$
$$Q_2 = -\frac{1}{\omega C_2}I_2^2 = U_2I_2\sin\varphi_2 = U\,I_2\sin\varphi_2, \tag{37.69}$$

de unde rezultă :

$$\left(r_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C_2^2}\right) I_2^2 = U^2$$

adică :

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{r_2^2 + 1/\omega^2 C^2}} = \frac{120}{\sqrt{9+9}} = 20\sqrt{2}\ \text{A}.$$

Deci :

$$P_2 = r_2 I_2^2 = 3(20\sqrt{2})^2 = 2400\ \text{W}$$

$$Q_2 = -I_2^2/\omega C_2 = -3(20\sqrt{2})^2 = -2\,400\ \text{var} < 0.$$

Conservarea puterilor active și reactive pentru întregul circuit se scrie :

$$P = U\ I\ \cos\varphi = P_1 + P_2 = 4800\ \text{W}$$

$$Q = U\ I\ \sin\varphi = Q_1 + Q_2 = 1752\ \text{var} > 0. \qquad (37.70)$$

Înlocuind valorile numerice date pentru mărimile din membrul drept și ținînd seama că $U = 120$ V, se obțin componentele activă și reactivă ale curentului :

$$I\cos\varphi = 40; \qquad I\sin\varphi = 14{,}6 > 0,$$

adică :

$$I = \sqrt{40^2 + 14{,}6^2} \approx 13{,}5\ \text{A}$$

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{14{,}6}{40} \approx 0{,}365; \qquad \varphi \approx 20°.$$

37.3.3. **Ameliorarea factorului de putere** (v. și par. 33.4.5). Un receptor M, cu $P = 100$ kW, funcționează de la $\cos\varphi = 0{,}6$ (inductiv), sub o tensiune $U = 500$ V, 50 Hz. Se cere să se determine capacitatea echivalentă C_e a bateriei de condensatoare, care trebuie conectată în paralel cu receptorul, pentru ca factorul de putere al ansamblului să devină $\cos\varphi_b = 0{,}9$ (v. fig. 37.3). Puterea reactivă absorbită de bateria de condensatoare este negativă și are expresia (v. rel. 34.29) :

$$Q_C = -\omega C_e U^2. \qquad (37.71)$$

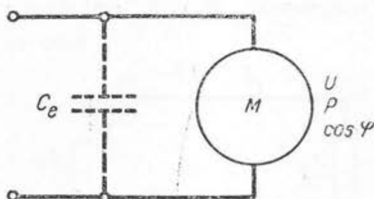


Fig. 37.3.

Puterea reactivă absorbită de receptorul inductiv este pozitivă și are expresia (v. rel. 33.111) :

$$Q = P\,\text{tg}\,\varphi. \qquad (37.72)$$

Deoarece puterile reactive se conservă, puterea reactivă primită pe la borne va fi suma expresiilor de mai sus :

$$Q_b = Q_c + Q = P\,\text{tg}\,\varphi - U^2\omega C_e, \qquad (37.73)$$

cu $\text{tg}\,\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \approx 1{,}33$. Puterea Q poate fi făcută oricît de mică în valoare absolută, alegînd în mod adecvat capacitatea C_e. Factorul de putere la borne $\cos\varphi_b$ este, în acest caz, impus și permite să se determine raportul :

$$\text{tg}\varphi_b = \frac{P_b}{Q_b} = \frac{P}{Q_b} = \frac{\sin\varphi_b}{\cos\varphi_b} \approx 0{,}488, \qquad (37.74)$$

în care am pus $P_b = P$, deoarece bateria de condensatoare nu absoarbe putere activă.

Din relațiile (37.74) și (37.73) rezultă :

$$Q_b = P \operatorname{tg} \varphi - U^2 \omega C_e = P \operatorname{tg} \varphi_b,$$

iar

$$C_e = \frac{P}{\omega U^2} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_b). \tag{37.75}$$

Înlocuind valorile numerice, se obține $C_e = 1850\ \mu F$.

37.4. Transferul maxim de putere pe la borne

Considerăm un generator de tensiune electromotoare dată $\underline{E}_g$ și avînd impedanța interioară $\underline{Z}_g = R_g + j X_g = Z_g e^{j\varphi_g}$ de asemenea dată (fig. 37.4). Se pune problema de a determina impedanța de sarcină $\underline{Z}_s$, care trebuie conectată la bornele generatorului, pentru ca acesta să transfere sarcinii o putere activă maximă.

Realizarea condițiilor care asigură acest transfer maxim de putere se mai numește *adaptarea sarcinii la generator* (din acest punct de vedere [1].

În analiza condițiilor de adaptare interesează în practică două situații : cazul general, cînd se poate varia atît modulul cît și argumentul impedanței de sarcină, și cazul particular, cînd se poate varia numai modulul impedanței de sarcină.

37.4.1. **Transferul maxim de putere la sarcină oarecare.** Exprimăm puterea P transferată impedanței de sarcină $\underline{Z}_s = R_s + jX_s = Z_s e^{j\varphi_s}$, în funcție de mărimile $\underline{E}_g$, $\underline{Z}_g$ și $\underline{Z}_s$:

$$P = R_s I^2 = R_s \frac{E_g^2}{|\underline{Z}_s + \underline{Z}_g|^2} = E_g^2 \frac{R_s}{(R_s + R)^2 + (X_s + X_g)^2}. \tag{37.76}$$

Deoarece E_g, R_g și X_g sînt date, variabilele independente în raport cu care se caută maximum sînt R_s și X_s, iar condițiile de maxim se pot obține anulînd derivatele parțiale ale funcțiunii $P = f(R_s, X_s)$. Le vom obține mai simplu prin raționamentul următor : Dacă R_s e menținut constant și X_s variază, maximul lui P se obține pentru minimul numitorului, adică pentru minimul expresiei $(X_s + X_g)^2 \geqslant 0$, care se obține la anularea acestei expresii, adică pentru valoarea :

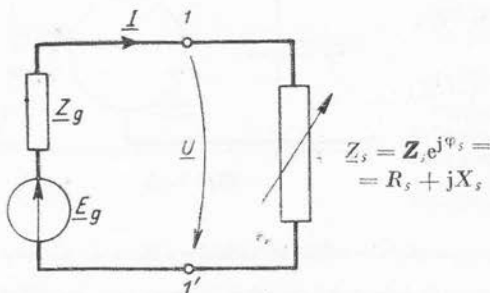


Fig. 37.4.

$$\boxed{X_s = -X_g} \tag{37.77}$$

[1] Există și alte criterii de adaptare — de exemplu din punctul de vedere al anulării undei reflectate la joncțiunea a două linii lungi (v. cap. 54) — care conduc în cazul general la alte condiții decît cele stabilite aici.

a reactanței de sarcină. În acest caz, puterea transferată sarcinii are expresia :

$$P\Big|_{X_s+X_g=0} = E_g^2\frac{R}{(R_s+R_g)^2} = E_g^2\frac{1}{R_s+\dfrac{R_g^2}{R_s}+2R_g}. \qquad (37.78)$$

Cînd R_s variază, această expresie e maximă cînd numitorul e minim, adică pentru $R_s+R_g^2/R_s$ minim. Suma a doi termeni al căror produs ($R_s \cdot R_g^2/R_s=R_g^2$) e constant e minimă cînd termenii sînt egali, adică pentru valoarea :

$$\boxed{R_s = R_g} \qquad (37.79)$$

a rezistenței de sarcină. Relațiile (37.78) și (37.79) reprezintă condițiile căutate. Deoarece $\underline{Z}_s = R_s + \mathrm{j}\,X_s$ și $\underline{Z}_g = R_g + \mathrm{j}\,X_g$, aceste condiții sînt echivalente cu relațiile :

$$\boxed{\underline{Z}_s = \underline{Z}_g^*} \qquad (37.80)$$

sau

$$Z_s = Z_g \quad \text{și} \quad \varphi_s = -\varphi_g. \qquad (37.81)$$

Puterea activă transmisă pe la borne de un generator liniar dat unui dipol receptor este maximă atunci cînd impedanța complexă echivalentă a receptorului e conjugata complexă a impedanței interioare complexe a generatorului (teorema transferului maxim de putere).

Trebuie observat că în condițiile de adaptare (37.80), puterea activă transmisă la borne este (cu 37.78 și 37.79) :

$$P_{max} = \frac{E_g^2}{4\,R_g}, \qquad (37.83)$$

în timp ce puterea activă produsă de generator este :

$$P_g\Big|_{P=P_{max}} = (R_g + R_s)I^2 = 2\,P_{max} = \frac{E_g^2}{2R_g}. \qquad (37.84)$$

Randamentul electric al transferului de putere fiind :

$$\eta = \frac{P}{P_g} = \frac{R_s I^2}{(R_s+R_g)I^2} = \frac{R_s}{R_s+R_g} \qquad (37.85)$$

are în condițiile maximului de putere la borne valoarea :

$$\eta\Big|_{P=P_{max}} = \eta\Big|_{R=R_g} = 0{,}5.$$

Această valoare e mult prea scăzută pentru necesitățile transmisiunii de energie. De aceea, în electroenergetică, unde se cer randamente cît mai mari, se lucrează cu $R_g \ll R_s$, departe de condiția de adaptare (37.80). În electrocomunicații, unde aspectul energetic e secundar, interesează adesea să se

„scoată" maximul de putere activă dintr-un generator dat şi, în acest caz, se caută satisfacerea condiţiei de adaptare.

Expresia (37.83) arată că puterea maximă pe care o poate debita un generator tinde către infinit, dacă impedanţa interioară tinde către zero. În aceleaşi condiţii, tensiunea la borne $U = \underline{E}_g - \underline{Z}_g \underline{I}$ tinde către $\underline{E}$. De aceea, un generator capabil să menţină o tensiune invariabilă la borne se mai numeşte generator de putere infinită.

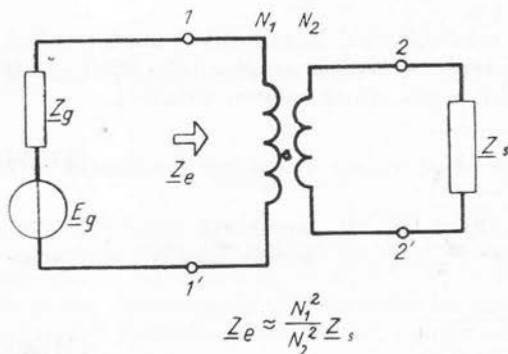


Fig. 37.5.

37.4.2. Transferul maxim de putere la sarcină cu defazaj invariabil. Practic este greu să se modifice după voie impedanţa complexă a unui receptor dat, pentru a obţine adaptarea. Se poate însă intercala între generator şi sarcină un transformator (fig. 37.5), astfel că impedanţa echivalentă prezentată generatorului nu mai este $\underline{Z}_s$, ci

$$\underline{Z}_{e_1} = \underline{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s} \tag{37.86}$$

(v. rel. 36.30), unde $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ e impedanţa proprie a înfăşurării primare cu N_1 spire, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$ e impedanţa proprie a înfăşurării secundare cu N_2 spire, iar $M = |L_{12}|$ e inductivitatea mutuală a înfăşurărilor (în modul). Se numeşte transformator ideal un transformator care are: *a)* rezistenţele înfăşurărilor neglijabile, $R_1 \approx 0$, $R_2 \approx 0$; *b)* dispersiunea magnetică neglijabilă, astfel că $M^2 = L_1 L_2$ (v. rel. 27.6, vol. I) şi $\sqrt{L_1/L_2} = N_1/N_2$ (raportul de transformare); *c)* reactanţa secundară foarte mare faţă de impedanţa de sarcină $\omega L_2 \gg Z_s = |\underline{Z}_s|$.

Ţinînd seama de aceste condiţii, impedanţa de intrare a transformatorului ideal devine:

$$\underline{Z}_{e_1} \approx j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + \underline{Z}_s} = \frac{j\omega L_1 \underline{Z}_s + \omega^2 (M^2 - L^2)}{j\omega L_2 + \underline{Z}_s} \approx \frac{j\omega L_1 \underline{Z}_s}{j\omega L_2 + \underline{Z}_s} \approx$$

$$\approx \frac{j\omega L_1 \underline{Z}_s}{j\omega L_2} = \frac{L_1}{L_2}\underline{Z}_s$$

sau

$$\boxed{\underline{Z}_{e_1} \approx \frac{N_1^2}{N_2^2}\underline{Z}_s}. \tag{37.87}$$

Cu ajutorul unui transformator ideal se poate deci obţine o multiplicare a modulului impedanţei de sarcină cu un factor egal cu pătratul raportului de transformare. Pe această cale se poate deci modifica numai modulul impedanţei de sarcină a unui generator. De aceea interesează condiţiile de adaptare la defazaj invariabil ale acestei impedanţe.

Puterea (37.76) se poate scrie, punînd în evidenţă variabila $Z_s = |\underline{Z}_s|$:

$$P = R_s \frac{E_g^2}{|\underline{Z}_s + \underline{Z}_g|^2} = E_g^2 \frac{Z_s \cos \varphi_s}{Z_s^2 + Z_g^2 + 2 Z_s Z_g \cos(\varphi_s - \varphi_g)} \tag{37.88}$$

sau

$$P = E_g^2 \frac{\cos \varphi_s}{Z_s + \frac{Z_g^2}{Z_s} + 2Z_g \cos(\varphi_s - \varphi_g)}. \tag{37.89}$$

La Z_s variabil, această expresie e maximă cînd numitorul e minim, adică atunci cînd $Z_s + Z_g^2/Z_s$ e minim, ceea ce are loc pentru :

$$\boxed{Z_s = Z_g}. \tag{37.90}$$

Aceasta e condiţia de adaptare a sarcinii cu defazaj constant.

38. METODE ŞI TEOREME PENTRU REZOLVAREA CIRCUITELOR DE CURENT ALTERNATIV

În afară de teoremele lui Kirchhoff pot fi utilizate la rezolvarea reţelelor de curent alternativ numeroase alte metode, care sînt consecinţe ale acestor teoreme.

Dacă se utilizează metoda reprezentării în complex, se observă *analogia care există între relaţiile care exprimă legea lui Ohm şi teoremele lui Kirchhoff în curent continuu, respectiv în curent alternativ.* De aceea se vor putea transpune în curent alternativ metodele şi teoremele utilizate pentru rezolvarea circuitelor de curent continuu (v. şi par. 13, vol. I), pe baza analogiei :

$$\begin{matrix} E & I & R & V & U & G \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \underline{E} & \underline{I} & \underline{Z} & \underline{V} & \underline{U} & \underline{Y} \end{matrix} \tag{38.1}$$

Aşa cum am mai precizat, *analogia completă este posibilă numai în cazul în care nu există cuplaje inductive (adică impedanţe mutuale) între laturile reţelei.* Din orice teoremă demonstrată în complex, în curent alternativ se obţine deci o teoremă valabilă în curent continuu, anulînd impedanţele mutuale şi înlocuind mărimile complexe din curent alternativ cu mărimile din curent continuu care le corespund prin relaţia (38.1).

38.1. Metoda suprapunerii efectelor

38.1.1. **Teorema superpoziţiei.** Conform acestei teoreme, *curentul electric din orice latură a unei reţele de curent alternativ, în care există mai multe generatoare, este suma algebrică a curenţilor produşi de fiecare t.e.m. în parte, dacă ar acţiona singură în reţea* (celelalte surse fiind presupuse cu t.e.m. nule, dar cu impedanţe interioare neschimbate).

Din caracterul liniar al ecuaţiilor teoremelor lui Kirchhoff rezultă că fiecare curent este o funcţie liniară şi omogenă de t.e.m. exterioare din reţea. În adevăr, rezolvînd ecuaţiile date de cele două teoreme ale lui Kirchhoff prin regula lui Cramer, curentul din latura s va rezulta sub forma :

$$\underline{I}_s = \sum_{m=1}^{L} \underline{Y}_{sm} \underline{E}_m, \tag{38.2}$$

în care coeficienţii $\underline{Y}_{sm}$ sînt mărimi complexe, numite admitanţe de transfer între laturile s şi m (care îndeplinesc relaţia de reciprocitate $\underline{Y}_{sm} = \underline{Y}_{ms}$, cum se va arăta în par. 38. 3.5.). Relaţia (38.2) se poate exprima şi astfel :

$$\underline{I}_s = \sum_{m=1}^{L} \underline{I}_{sm}, \tag{38.3}$$

în care $\underline{I}_{sm} = \underline{Y}_{sm} \underline{E}_m$ este curentul produs de t.e.m. $\underline{E}_s$ în latura s, celelalte t.e.m. fiind nule.

Metoda suprapunerii efectelor este o metodă generală de rezolvare, care consistă în determinarea curenţilor pe baza teoremei superpoziţiei, folosind relaţia (38.3).

38.1.2. **Aplicaţie.** Calculăm curentul $\underline{I}_3$ din figura 38.1, *a* cu ajutorul teoremei superpoziţiei. Vom avea :

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} + \underline{I}_{32}, \tag{38.4}$$

unde $\underline{I}_{31}$ e curentul produs în latura 3 în condiţiile în care numai t.e.m. $\underline{E}_1 \neq 0$ (v. fig. 38.1, *b*), iar $\underline{I}_{32}$ e curentul produs în latura 3 în condiţiile în care numai t.e.m. $\underline{E}_2$ $0 \neq$ (v. fig. 38.1, *c*). Astfel, cu $\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}\,\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = R_2$, $\underline{Z}_3 = \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega C_3}$, avem :

$$\underline{I}_{31} = \underline{I}_{11} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1 + \dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}$$

$$\underline{I}_{32} = \underline{I}_{22} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2 + \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}} \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{E}_2\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1},$$

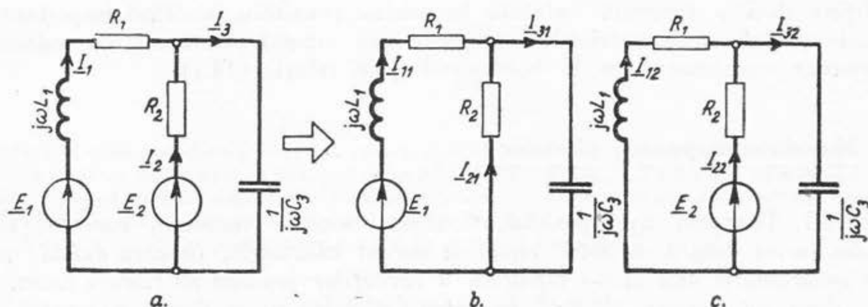


Fig. 38.1.

adică :

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} + \underline{I}_{32} = \frac{\underline{E}_1\underline{Z}_2 + \underline{E}_2\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}. \tag{38.5}$$

Înlocuind valorile impedanţelor, se obţine :

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_1 R_2 + \underline{E}_2(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)}{R_1R_2 + \frac{L_1}{C_3} + \mathrm{j}\left(\omega L_1 R_2 - \frac{R_1 + R_2}{\omega C_3}\right)}.$$

Se verifică uşor că dacă $\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1$, $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2$, $\underline{Y}_3 = 1/\underline{Z}_3$ sînt admitanţele celor trei ramuri, expresia generală a curentului $\underline{I}_3$ se mai poate scrie :

$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \frac{\underline{E}_1\underline{Y}_1 + \underline{E}_2\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \tag{38.5'}$$

Dacă efectuînd calculele numerice, se obţine $\underline{I}_3 = I_3 e^{j\gamma_3}$, valoarea instantanee a curentului este $i_3 = I_3 \sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma_3)$.

38.2. Metode de transfigurare

Se numeşte *transfigurare* operaţia prin care o porţiune de reţea se consideră înlocuită cu o alta, de structură în general mai simplă, astfel încît schimbarea să nu aducă nici o modificare în repartiţia curenţilor şi tensiunilor din restul reţelei. Noua porţiune de reţea cu care se consideră înlocuită porţiunea de reţea dată se mai numeşte echivalentă acesteia. Două reţele sau două circuite care se pot înlocui reciproc prin transfigurare se numesc *reţele echivalente* sau *circuite echivalente*, iar reprezentările lor în desen, *scheme echivalente*. În cele ce urmează, vom considera transfigurări şi scheme echivalente valabile în regim permanent sinusoidal. De la începutul studiului circuitelor de curent alternativ am considerat numeroase astfel de scheme echivalente — alcătuite din elemente ideale de circuit — pentru diferite circuite reale.

Metodele de transfigurare folosesc operaţii de transfigurare succesive, pentru a reduce reţele cu structură mai complicată la reţele cu structură mai simplă, ceea ce permite determinarea unor curenţi sau tensiuni din reţea, fără să se rezolve un sistem de ecuaţii liniare cu multe ecuaţii şi multe necunoscute, aşa cum ar cere aplicarea teoremelor lui Kirchhoff. Totodată, prin transfigurare, se pot analiza proprietăţile unor circuite pe baza proprietăţilor schemelor lor echivalente. Există numeroase teoreme care permit efectuarea de transfigurări şi, în primul rînd, teoremele impedanţelor echivalente (v. par. 35.2), cu ajutorul cărora se înlocuieşte un sistem de dipoli în serie sau în paralel cu un singur dipol. În acest capitol vom prezenta diferite alte asemenea teoreme.

Se numeşte *multipol* (sau n-pol) *o reţea neizolată cu n borne de acces şi ale cărei laturi interioare nu prezintă cuplaje inductive cu exteriorul.* Un multipol interacţionează deci cu exteriorul exclusiv prin intermediul celor n curenţi $\underline{I}_1, \underline{I}_2, ..., \underline{I}_n$, absorbiţi prin borne şi al celor n potenţiale $\underline{V}_1, \underline{V}_2, ..., \underline{V}_n$ (definite pînă la o constantă arbitrară) ale bornelor (v. fig. 38.2, *a*).

Condiţia necesară şi suficientă de transfigurare a unui multipol este invarianţa curenţilor absorbiţi din exterior atunci cînd se aplică aceleaşi diferenţe de potenţial între borne. În figura 38.2, *b* e prezentată schema topologică echivalentă tip stea a unui multipol, iar în figura 38.2, *c*, schema topologică echivalentă tip poligon complet a aceluiaşi multipol.

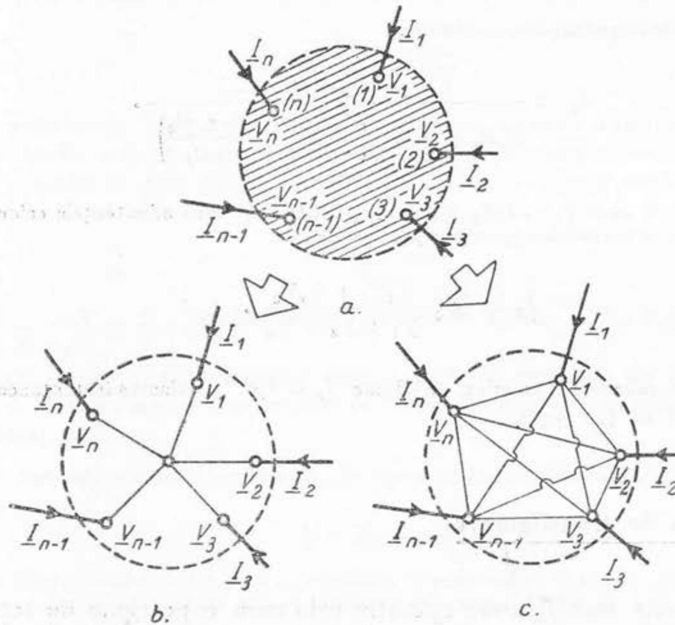


Fig. 38.2.

38.2.1. Teorema generatorului de tensiune echivalent (Thevenin-Helmholtz) : *O reţea liniară şi activă, cu două borne A, B de ieşire şi fără cuplaje inductive cu exteriorul (v. fig. 38.3, a) este echivalentă cu un generator ideal de tensiune, avînd t.e.m.* $\underline{E}_g$ *egală cu tensiunea la bornele reţelei la mersul în gol* ($\underline{U}_{AB0}$), *conectat în serie cu o impedanţă* $\underline{Z}_g$, *egală cu impedanţa echivalentă a reţelei pasivizate* ($\underline{Z}_{AB_0}$) :

$$\underline{E}_g = \underline{U}_{AB_0} \ ; \ \underline{Z}_g = \underline{Z}_{AB_0}. \tag{38.6}$$

Curentul I_{AB} debitat în exterior de reţea pe o sarcină de impedanţă $\underline{Z}$ are deci expresia (dedusă din fig. 38.3, *b*) :

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{E}_g}{\underline{Z} + \underline{Z}_g}, \tag{38.7}$$

care cu relaţia (38.6) devine (teorema lui Thevenin) :

$$\boxed{\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB_0}}}. \tag{38.8}$$

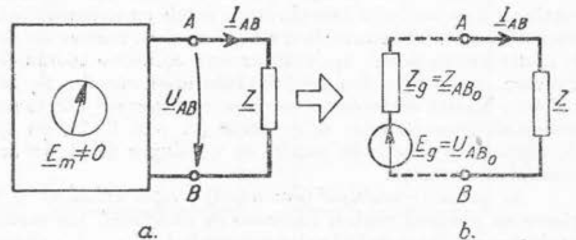


Fig. 38.3.

În relaţiile de mai sus, $\underline{U}_{AB_0}$ e tensiunea $\underline{U}_{AB}$, care se stabileşte la bornele reţelei, cînd $\underline{I}_{AB} = 0$ (mersul în gol), iar $\underline{Z}_{AB_0}$ e impedanţa echivalentă a dipolului constituit de reţea (fără latura exterioară AB) după pasivizare.

Teorema generatorului de tensiune echivalent se demonstrează stabilind valabilitatea expresiei (38.8) a curentului pentru reţeaua dată, deoarece

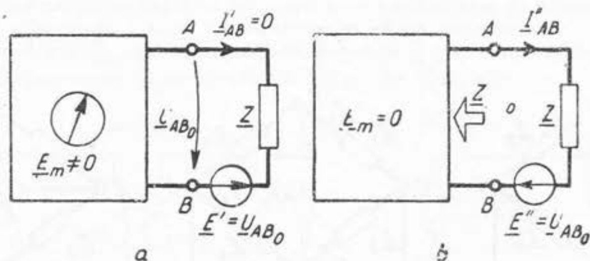


Fig. 38.4.

curenţii (38.7) şi (38.8) pot fi egali pentru orice impedanţă de sarcină $\underline{Z}$ numai dacă sînt satisfăcute egalităţile (38.6). Demonstraţia se bazează pe liniaritatea reţelei, adică pe teorema superpoziţiei. Reţeaua din figura 38.3, *a* se poate obţine prin suprapunerea sistemelor de tensiuni electromotoare ale reţelelor din figura 38.4, *a* (reţeaua activă dată debitînd pe latura exterioară, în care s-a introdus un generator ideal de t.e.m. $\underline{E}'$ cu sens opus curentului $\underline{I}_{AB}$) şi din figura 38.4, *b* (reţeaua dată pasivizată, pe care debitează latura exterioară, în care s-a introdus un generator ideal de t.e.m. $\underline{E}'$ cu acelaşi sens ca al curentului $\underline{I}_{AB}$). Rezultă atunci:

$$\underline{I}_{AB} = \underline{I}'_{AB} + \underline{I}''_{AB} = \underline{I}'_{AB} + \frac{\underline{E}'}{\underline{Z}+\underline{Z}_{AB_0}}, \tag{38.9}$$

ultimul termen fiind calculat prin înlocuirea reţelei pasivizate, cu impedanţa ei complexă echivalentă $\underline{Z}_{AB_0}$. Se poate alege acum o astfel de valoare a t.e.m. auxiliare $\underline{E}'$, care să anuleze curentul $\underline{I}'_{AB}$. Deoarece teorema lui Joubert aplicată laturii exterioare se scrie în acest caz:

$$\frac{1}{\underline{Z}} (\underline{U}_{AB} + (-\underline{E}')) = \underline{I}'_{AB} = 0, \tag{38.10}$$

rezultă că trebuie să se aleagă:

$$\underline{E}' = (\underline{U}_{AB})_{\underline{I}'_{AB}=0} = \underline{U}_{AB_0}. \tag{38.11}$$

Cu aceste valori introduse în relaţia (38.9) se obţine relaţia (38.8).

Observaţii: *a*) Teorema lui Thevenin (38.8) se utilizează pentru calculul curentului într-o latură oarecare AB, fără inductivităţi mutuale a unei reţele izolate date. Restul reţelei poate fi atunci înlocuit — din punctul de vedere al curentului debitat în această latură — cu generatorul de tensiune echivalent în raport cu bornele AB.

b) Calculul tensiunii $\underline{U}_{AB_0}$ se face considerînd că latura AB lipseşte, adică rezolvînd o reţea cu o latură mai puţin. Simplificarea e uneori importantă.

c) Calculul impedanţei interioare $\underline{Z}_{AB_0}$ se face considerînd că latura AB lipseşte şi că reţeaua dată e pasivizată, adică toate sursele din laturile ei sînt înlocuite cu laturi pasive de impedanţe egale cu impedanţele interioare ale acestor surse (egale cu zero, dacă sursele erau ideale).

d) Dacă impedanţa interioară a reţelei pasivizate e neglijabilă $\underline{Z}_{AB0} \approx 0$, reţeaua e capabilă să menţină o tensiune constantă la borne $\underline{U}_{AB} \approx \underline{Z}\,\underline{I}_{AB} \approx \underline{U}_{AB0}$ şi să debiteze o putere activă oricît de mare (v. par. 37.4.1); de aceea se mai numeşte reţea de putere infinită.

Aplicaţii : **1.** *Condiţiile de echilibru ale punţii de curent alternativ.* Considerăm o punte Wheatstone, ale cărei laturi nu au inductivităţi mutuale (fig. 38.5, *a*). Curentul $\underline{I}_5$ din diagonala de măsură, considerată ca latură *AB*, se poate scrie cu relaţia (38.8) :

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z}_5 + \underline{Z}_{AB0}} \tag{38.12}$$

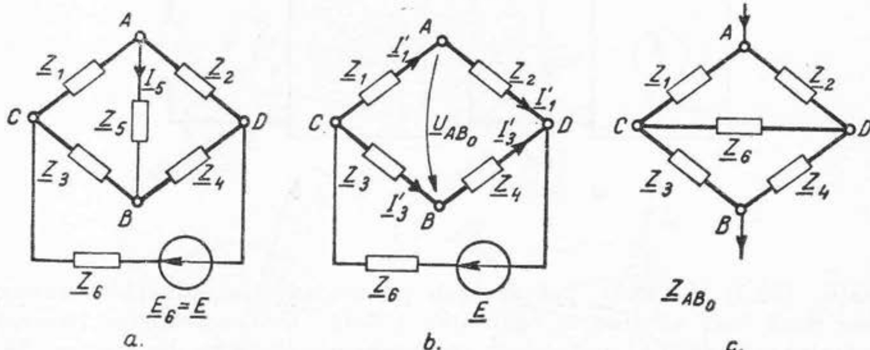


Fig. 38.5.

şi se anulează atunci cînd $\underline{U}_{AB0} = 0$. Tensiunea de mers în gol se calculează pe schema din figura 38.5, *b* şi este :

$$\underline{U}_{AB0} = -\underline{Z}_1\underline{I}_1' + \underline{Z}_3\underline{I}_3',$$

iar impedanţa $\underline{Z}_{AB0}$ se obţine cu ajutorul schemei din figura 38.5,*c*.

Dar

$$\underline{I}_1' = \underline{I}_6' \frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \underline{E} \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_6(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}$$

$$\underline{I}_2' = \underline{I}_6' \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \underline{E} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_6(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}$$

şi rezultă :

$$\underline{U}_{AB0} = \underline{E} \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1\underline{Z}_4}{\underline{Z}_6(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)} \tag{38.13}$$

Această expresie se anulează — oricare ar fi $\underline{E}$ şi $\underline{Z}_6$ — dacă numărătorul e nul, $\underline{Z}_2\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1\underline{Z}_4 = 0$, adică dacă

$$\boxed{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}}\,[1]\,. \tag{38.14}$$

Aceasta e condiţia de echilibru în complex a punţii de curent alternativ. Ca orice egalitate în complex, ea e echivalentă cu două egalităţi în real, care rezultă : fie înlocuind $\underline{Z}_k = Z_k e^{j\varphi_k}$ ($k = 1, 2, 3, 4$), în care caz se obţin condiţiile :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \quad \text{şi} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4, \tag{38.15}$$

[1] Relaţia (38.14) se putea obţine şi din egalităţile :

$$\underline{U}_{AB_0} = -\underline{Z}_1\underline{I}_1' + \underline{Z}_3\underline{I}_3' = \underline{Z}_2\underline{I}_1' - \underline{Z}_4\underline{I}_3' = 0$$

fie înlocuind $\underline{Z}_k = R_k + jX_k$, în care caz se obţin condiţiile :

$$R_1R_4 - X_1X_4 = R_2R_3 - X_2X_3 \text{ şi } R_1X_4 + R_4X_1 = R_2X_3 + R_3X_2. \quad (38.16)$$

La echilibrarea unei punţi de curent alternativ trebuie să se regleze independent doi parametri reali de circuit : de exemplu, R_4 şi X_4. Totodată, pentru ca să se realizeze condiţiile (38.16), e posibil ca reactanţa X_4 să trebuiască să fie neapărat pozitivă (şi deci a unei bobine de inductivitate variabilă) sau neapărat negativă (şi deci a unui condensator de capacitate variabilă).

2. *Schema echivalentă a unui generator cuplat cu un transformator.* Fie un generator de t.e.m. $\underline{E}_{g_1}$ şi impedanţă $\underline{Z}_{g_1}$, care alimentează o sarcină $\underline{Z}$ prin intermediul unui transformator, cu caracteristicile prezentate în paragraful 36.3.2. (v. fig. 38.6, *a*).

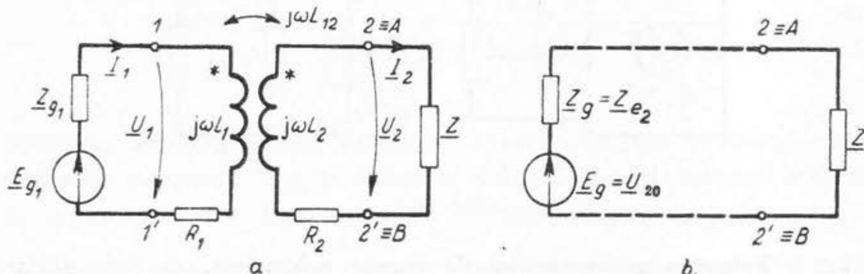


Fig. 38.6.

Considerînd bornele de ieşire 2, 2′ drept borne A, B, se poate stabili o schemă echivalentă de tipul unui generator de tensiune (v. fig. 38.6, *b*) pentru grupul generator-transformator, avînd :

$$\underline{E}_g = \underline{U}_{AB_0} = \underline{U}_{20} \text{ (tensiunea secundară de mers în gol)} \quad (38.17)$$

$$\underline{Z}_g = \underline{Z}_{AB_0} = \underline{Z}_{e_2} \text{ (impedanţa echivalentă de ieşire).} \quad (38.18)$$

Tensiunea secundară de mers în gol se deduce din ecuaţiile (36.25) ale transformatorului, în care punem $\underline{U}_1 = \underline{E}_{g_1} - \underline{Z}_{g_1}\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2 = 0$,

$$\underline{U}_{20} = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 \Big|_{\underline{I}_2 = 0} = \underline{E}_{g_1} \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{g_1} + \underline{Z}_1}. \quad (38.19)$$

Impedanţa echivalentă de ieşire e impedanţa echivalentă, măsurată pe la bornele de ieşire 2, 2′, cînd primarul e pasivizat, adică $\underline{E}_{g_1} = 0$. Ea este impedanţa echivalentă a transformatorului, calculată în paragraful 36.3.2, dacă se interverteşte rolul înfăşurărilor 1 şi 2. Se observă că acum impedanţa de sarcină e $\underline{Z}_{g_1}$. Din relaţia (36.30) rezultă :

$$\underline{Z}_{e_2} = \underline{Z}_2 - \frac{\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{g_1}}. \quad (38.20)$$

Punînd $\underline{Z}_{12} = j\omega L_{12}$, $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$, elementele schemei echivalente sînt :

$$\underline{E}_g = j\omega L_{12} \frac{\underline{E}_{g_1}}{R_1 + j\omega L_1}; \ \underline{Z}_g = R_2 + j\omega L_2 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_1 + j\omega L_1 + \underline{Z}_{g_1}}. \quad (38.21)$$

Dacă transformatorul e apropiat de un *transformator ideal,*

$$R_1 \approx 0, \quad R_2 \approx 0, \quad L_1L_2 = L_{12}^2, \quad L_1/L_2 \approx N_1^2/N_2^2 \quad (38.22)$$

şi

$$\omega L_1 >> Z_{g_1}. \quad (38.22')$$

Elementele schemei echivalente devin:

$$\underline{E}_g \approx \frac{N_2}{N_1} \underline{E}_{g_1}; \qquad \underline{Z}_g \approx \frac{N_2^2}{N_1^2} \underline{Z}_{g_1}. \tag{38.23}$$

Acest rezultat se exprimă spunînd că transformatorul ideal multiplică t.e.m. a generatorului cu raportul lui de transformare N_2/N_1, iar impedanţa generatorului cu pătratul raportului de transformare.

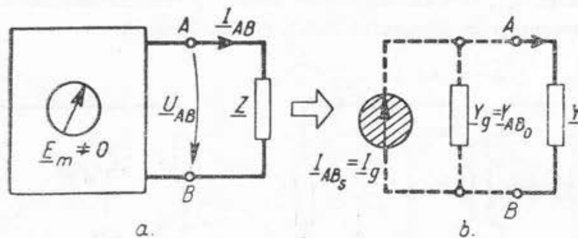


Fig. 38.7.

38.2.2. **Teorema generatorului de curent echivalent.** *O reţea liniară şi activă, cu două borne A, B de ieşire şi fără cuplaje inductive cu exteriorul (v. fig. 38.7, a) este echivalentă cu un generator ideal de curent, avînd curentul injectat $\underline{I}_g$ egal cu curentul debitat de reţea la mersul în scurtcircuit ($\underline{I}_{AB_{s}}$) conectat în paralel cu o admitanţă $\underline{Y}_g$, egală cu admitanţa interioară a reţelei pasivizate ($\underline{Y}_{AB_0}$)*:

$$\underline{I}_g = \underline{I}_{AB_s}; \quad \underline{Y}_g = \underline{Y}_{AB_0}. \tag{38.24}$$

Tensiunea $\underline{U}_{AB}$ produsă de reţea la bornele A, B ale impedanţei de sarcină $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$ are deci expresia (dedusă din fig. 38.7, *b*):

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_g}{\underline{Y} + \underline{Y}_g}, \tag{38.25}$$

care cu relaţia (38.24) devine (teorema lui Norton):

$$\boxed{\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{AB_s}}{\underline{Y} + \underline{Y}_{AB_0}}.} \tag{38.26}$$

În relaţiile de mai sus, $\underline{I}_{AB_s}$ e curentul $\underline{I}_{AB}$ debitat de reţea la legarea bornelor A, B scurtcircuit ($\underline{U}_{AB} = 0$, $\underline{Z}=0$), calculabil cu ajutorul teoremei lui Thevenin (38.8):

$$\underline{I}_{AB_s} = \underline{I}_{AB}\Big|_{\underline{Z}=0} = \frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z}_{AB_0}} = \underline{U}_{AB_0}\underline{Y}_{AB_0}, \tag{38.27}$$

iar

$$\underline{Y}_{AB_0} = 1/\underline{Z}_{AB_0} \tag{38.28}$$

e admitanţa echivalentă a dipolului constituit de reţea (fără latura exterioară AB) după pasivizare.

Teorema generatorului de curent echivalent se demonstrează stabilind valabilitatea relaţiei (38.26), deoarece tensiunile (38.25) şi (38.26) pot fi egale, pentru orice admitanţă de sarcină $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$, numai dacă sînt satisfăcute egalităţile (38.24). Relaţia (38.26) rezultă imediat din relaţia (38.8) şi (38.27):

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z}\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{Z}\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB_0}} = \frac{\dfrac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z}_{AB_0}}}{\dfrac{1}{\underline{Z}} + \dfrac{1}{\underline{Z}_{AB_0}}} = \frac{\underline{I}_{AB_s}}{\underline{Y} + \underline{Y}_{AB_0}}. \qquad (38.29)$$

La aplicarea acestei teoreme calculăm separat curentul de scurtcircuit $\underline{I}_{AB_s}$ şi admitanţa interioară $\underline{Y}_{AB_0}$ şi deducem astfel elementele schemei echivalente (38.7, *b*) sau tensiunea $\underline{U}_{AB}$, respectiv curentul $\underline{I}_{AB} = \underline{U}_{AB}\,\underline{Y}$.

Aplicaţie: Determinăm schema echivalentă ca generator de curent a dipolului activ din figura 38.8, *a*. La conectarea bornelor A, B în scurtcircuit, latura (R_2, L_2) e scurtcircuitată şi nu e parcursă de curent, aşa încît:

$$\underline{I}_{AB_s} = (\underline{I}_1)_{U_{AB}=0} = \frac{\underline{E}}{R_1}.$$

Admitanţa interioară e suma admitanţelor celor două laturi în paralel:

$$\underline{Y}_{AB_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L_2} = \frac{R_1 + R_2 + j\omega L_2}{R_1(R_2 + j\omega L_2)}.$$

Se obţine schema din figura 38.8, *b*.

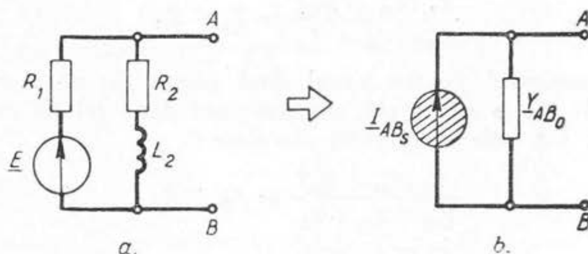


Fig. 38.8.

38.2.3. **Teoremele transfigurării stea-triunghi.** Cele mai simple reţele cu trei borne de acces sînt constituite din trei laturi conectate în triunghi (fig. 38.9, *a*), sau în stea (fig. 38.9, *b*), fără inductivităţi mutuale. Astfel de reţele se numesc triunghiuri de impedanţe (admitanţe), respectiv stele de impedanţe (admitanţe).

A. **Transfigurarea triunghi-stea:** *Orice triunghi de impedanțe $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{23}$, $\underline{Z}_{31}$ admite o schemă echivalentă unică în stea, ale cărei laturi au impedanțele*

$$\boxed{\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}, \tag{38.30}$$

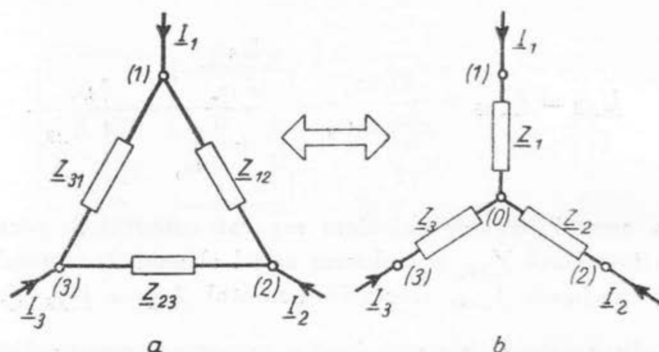


Fig. 38.9.

respectiv admitanțele:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{23}\underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{31}\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{23}}; \quad \underline{Y}_2 = ...; \quad \underline{Y}_3 = ... \tag{38.31}$$

Relațiile (38.30) — și (38.31) — se deduc unele din altele, prin permutarea circulară a indicilor 1, 2, 3. Relațiile (38.30) se pot stabili scriind că echivalența are loc în diferite situații particulare. Dacă, de exemplu, borna (1) nu e conectată în exterior, dipolul rămas cu bornele (2) și (3) trebuie să aibă aceeași impedanță echivalentă la triunghi și la stea, adică:

$$\frac{\underline{Z}_{23}(\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{31})}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3. \tag{38.32}$$

Repetînd raționamentul pentru cazul cînd borna (2) nu e conectată, respectiv borna (3) nu e conectată, rezultă încă două relații analoge, care se pot scrie direct tot prin permutări circulare:

$$\frac{\underline{Z}_{31}(\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{12})}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \tag{38.32'}$$

$$\frac{\underline{Z}_{12}(\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31})}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2. \tag{38.32''}$$

Făcînd semisuma relațiilor (38.32), (38.32'), (38.32''), se obține:

$$\frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{23}\underline{Z}_{31} + \underline{Z}_{31}\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \tag{38.33}$$

și scăzînd pe rînd fiecare din aceste relații din (38.33), se obțin relațiile (38.30). Relațiile (38.31) rezultă din (38.30), punînd $\underline{Z}_{jk} = 1/\underline{Y}_{jk} (j, k = 1,2,3)$.

B. **Transfigurarea stea-triunghi:** *Orice stea de admitanțe* $\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1$, $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2$ *şi* $\underline{Y}_3 = 1/\underline{Z}_3$ *admite o schemă echivalentă în triunghi, unică, ale cărei laturi au admitanțele:*

$$\boxed{\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3}}; \quad \underline{Y}_{23} = \frac{\underline{Y}_2\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3}; \quad \underline{Y}_{31} = \frac{\underline{Y}_3\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3}, \tag{38.34}$$

respectiv impedanțele

$$\underline{Z}_{12} = \frac{1}{\underline{Y}_{12}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{Z}_{23} = \ldots; \quad \underline{Z}_{31} = \ldots \tag{38.35}$$

Relațiile (38.34) şi (38.35) se deduc unele din altele prin permutarea circulară a indicilor 1, 2, 3. Relațiile (38.34) se pot stabili scriind că echivalența are loc în diferite situații particulare. Dacă, de exemplu, bornele (2) şi (3) sînt conectate împreună în scurtcircuit, dipolul rămas cu bornele (1) şi (2) (reunit cu (3)) trebuie să aibă aceeaşi admitanță echivalentă la triunghi şi la stea, adică:

$$\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{31} = \frac{\underline{Y}_1(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3}. \tag{38.36}$$

Scriind alte două relații analoge prin permutări circulare, făcînd semisuma tuturor şi scăzînd din ea pe fiecare în parte, se obțin relațiile (38.34). Relațiile (38.35) rezultă imediat din relația (38.34), punînd $\underline{Y}_j = 1/\underline{Z}_j$ $(j = 1, 2, 3)$.

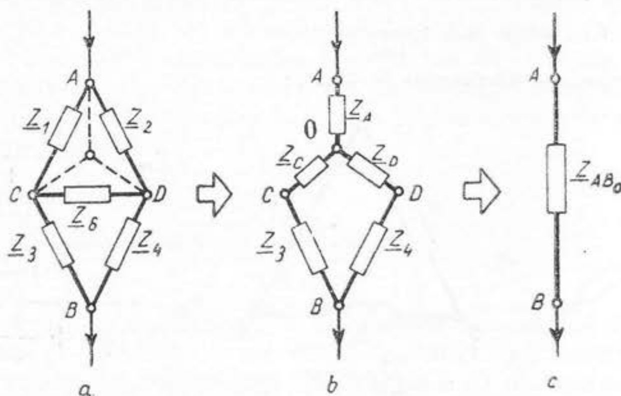


Fig. 38.10.

Aplicații: 1. *Curentul din diagonala de măsură a unei punți.* Considerăm puntea Wheatstone, studiată în aplicația 1 de la paragraful 38.2.1, (fig. 38.5). Pentru a determina curentul I_5 cu relația (38.12), e necesară determinarea impedanței interioare $\underline{Z}_{AB_0}$ a punții în raport cu latura AB. Pentru aceasta trebuie determinată impedanța echivalentă a dipolului cu bornele A,B, obținut, pasivizînd puntea şi suprimînd latura AB (v. fig. 38.5, *c* şi 38.10, *a*). Folosind transfigurarea triunghi-stea, se poate stabili o schemă echivalentă cu elemente serie şi paralel (fig. 38.10, *b*), a cărei impedanță echivalentă se calculează fără dificultăți.

Rezultă succesiv : — impendanţele stelei echivalente :

$$\underline{Z}_A = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_6}; \quad \underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_6\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_6}; \quad \underline{Z}_D = \frac{\underline{Z}_6\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_6}$$

— impendanţa echivalentă între O şi B :

$$Z_{OB} = \frac{\underline{Z}_3\underline{Z}_4(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_6)+\underline{Z}_6(\underline{Z}_1\underline{Z}_4+\underline{Z}_2\underline{Z}_3)+\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_6^2/(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_6)}{\underline{Z}_6(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)+(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4)(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_6)}$$

— impedanţa echivalentă totală :

$$\underline{Z}_{AB_0} = \underline{Z}_A + \underline{Z}_{OB} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4)+\underline{Z}_3\underline{Z}_4(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)+\underline{Z}_6[\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_3\underline{Z}_4+\underline{Z}_1\underline{Z}_4+\underline{Z}_2\underline{Z}_3]}{\underline{Z}_6(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3+\underline{Z}_4)+(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4)(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)} \tag{38.37}$$

Înlocuind această expresie şi (38.13) în (38.12), se obţine expresia căutată a curentului în diagonala punţii :

$$\underline{I}_5 = \underline{E}\frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3-\underline{Z}_1\underline{Z}_4}{\underline{Z}_6[\underline{Z}_5(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3+\underline{Z}_4)+(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3)(\underline{Z}_2+\underline{Z}_4)]+\underline{Z}_5(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4)+\underline{Z}_1\underline{Z}_2(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4)+\underline{Z}_3\underline{Z}_4(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)} \tag{38.38}$$

Adesea se folosesc punţi, în care impedanţa laturii generatorului, $\underline{Z}_6$, e neglijabilă. În acest caz :

$$\underline{I}_5 = \underline{E}\frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3-\underline{Z}_1\underline{Z}_4}{\underline{Z}_5(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)(\underline{Z}_3+\underline{Z}_4)+\underline{Z}_1\underline{Z}_2(Z_3+\underline{Z}_4)+Z_3\underline{Z}_4(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)} \tag{38.39}$$

2. *Transfigurarea unei stele în triunghi.* Considerăm steaua de impedanţe din figura 38.11, în care $L\omega = 1/C\omega$, adică $\mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = 0$.

Triunghiul echivalent are admitanţele (v. 38.34) :

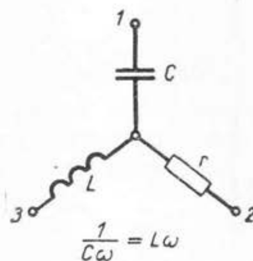


Fig. 38.11.

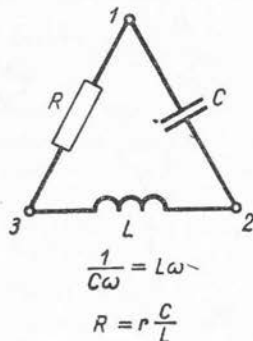


Fig. 38.12.

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\mathrm{j}\omega C\cdot\frac{1}{r}}{\mathrm{j}\omega C+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}+\frac{1}{r}} = \mathrm{j}\omega C$$

$$\underline{Y}_{23} = \frac{\frac{1}{r}\cdot\mathrm{j}\omega L}{\mathrm{j}\omega C+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}+\frac{1}{r}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$$

$$\underline{Y}_{31} = \frac{\mathrm{j}\omega C\cdot\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}}{\mathrm{j}\omega C+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}+\frac{1}{r}} = \frac{Cr}{L} = \frac{1}{R}.$$

Triunghiul echivalent e indicat în figura 38.12.

38·2·4. Teorema lui Vaschy. *Dacă în toate laturile care se întîlnesc într-un nod al unei reţele (fig. 38.13, a) se introduc generatoare ideale de tensiune,*

avînd t.e.m. egale şi îndreptate la fel către nod (fig. 38·13, b) curenţii din reţea nu se schimbă.

În adevăr, ecuaţiile lui Kirchhoff se scriu la fel, înainte şi după introducerea surselor ideale menţionate, deoarece în orice ochi (p), care trece prin nodul considerat, apar două surse de t.e.m. egale şi opuse, cu o contribuţie nulă la t.e.m. a ochiului.

Teorema lui Vaschy se utilizează pentru a transforma o latură activă în latură pasivă, fără a modifica curenţii. E suficient să se aplice teorema la unul din capetele laturii, alegînd t.e.m. $\underline{E}$ a surselor ideale astfel, încît să compenseze exact t.e.m. a sursei din latura considerată.

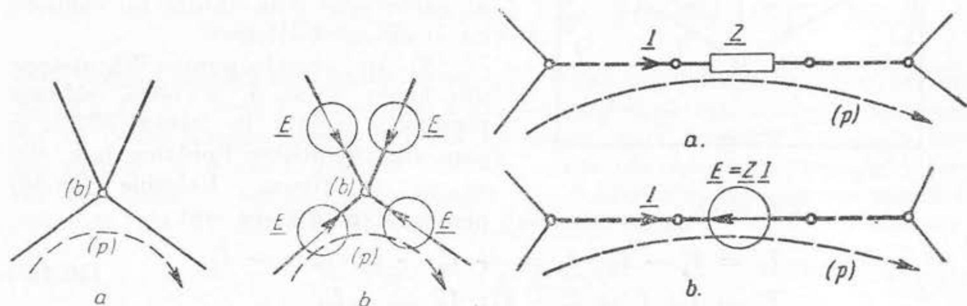


Fig. 38.13. Fig. 38.14.

38·2·5 **Teorema compensaţiei.** *Orice porţiune pasivă de latură necuplată inductiv cu altele, avînd impedanţa proprie* $\underline{Z}$ *şi curentul* $\underline{I}$ *(fig. 38.14, a), poate fi înlocuită cu o sursă ideală de t.e.m.* $\underline{E} = \underline{Z}\underline{I}$ *, cu sens opus curentului (fig. 38.14, b), fără ca să se schimbe curenţii din reţea.*

Şi în acest caz, teorema se demonstrează observînd că ecuaţiile lui Kirchhoff rămîn neschimbate: cele două elemente de circuit substituite unul altuia produc aceeaşi cădere de tensiune la borne pentru orice ochi (p) care trece prin latura considerată.

38.3. Metoda curenţilor de ochiuri (Maxwell)

Metoda curenţilor de ochiuri e o metodă sistematică de rezolvare a reţelelor, în care se operează cu noi variabile, astfel încît numărul ecuaţiilor şi al necunoscutelor să se reducă la numărul O al ochiurilor independente, totdeauna mai mic decît numărul L al laturilor (sau cel mult egal cu el).

38.3.1. **Curenţii de ochiuri.** Noile variabile sînt anumiţi curenţi închişi, fictivi, atribuiţi cîte unul fiecărui ochi fundamental, cu sensul de referinţă al ochiului. Se numesc *curenţi de ochiuri* sau *curenţi ciclici* (de contur, de buclă) şi vor fi notaţi cu accent, spre a fi deosebiţi de curenţii laturilor:

$$I'_1, \; I'_2, ..., \; I'_q, \; ..., \; I'_O.$$

Prin definiție, fiecare curent de latură $\underline{I}_s$ ($s = 1,2,..., L$) e egal cu suma algebrică a curenților de ochiuri care trec prin latura respectivă :

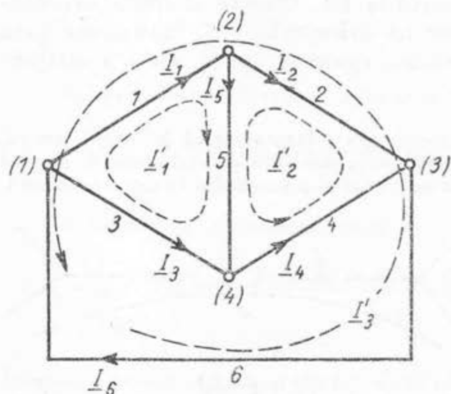


Fig. 38.15.

$$\underline{I}_s = \sum_{s \in q)} \underline{I}'_q{}^1. \qquad (38.40)$$

În această sumă intră cu semnul (+) curenții de ochiuri, al căror sens prin latură coincide cu al curentului laturii, și cu semnul (—) curenții de ochiuri, al căror sens prin latură nu coincide cu al curentului laturii.

Fie, de exemplu, puntea Wheatstone din figura 38.5, *a*, a cărei schemă topologică e dată în figura 38.15, și care are trei ochiuri fundamentale, alese ca în figură. Relațiile (38.40) pentru această rețea sînt :

$$\begin{aligned} &\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 - \underline{I}'_3;\ \underline{I}_2 = -\underline{I}'_2 - \underline{I}'_3;\ \underline{I}_3 = -\underline{I}'_1; \\ &\underline{I}_4 = \underline{I}'_2;\ \underline{I}_5 = \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2;\ \underline{I}_6 = -\underline{I}'_3. \end{aligned} \qquad (38.40')$$

Din punct de vedere matematic, relațiile (38.40) reprezintă o schimbare liniară de variabilă, care duce de la cele L necunoscute vechi (curenții de laturi) la O necunoscute noi (curenții de ochiuri). Pentru ca o astfel de reducere a numărului de necunoscute să fie posibilă, trebuie ca schimbarea de variabilă (38.40) să fie compatibilă cu sistemul (36.22), al celor L ecuații Kirchhoff. Se verifică fără dificultăți că — înlocuind în cele $N — S$ ecuații de noduri

$$\sum_{k \in (b)} \underline{I}_k = 0 \quad b = 1,2, ..., N{-}S, \qquad (38.41)$$

date de prima teoremă a lui Kirchhoff, expresiile (38.40) ale curenților — aceste ecuații sînt satisfăcute identic (adică oricare ar fi valorile noilor variabile, curenții de ochiuri). Aceasta, pentru că fiecare curent de ochi — fiind închis — intră o dată și iese o dată din nodul considerat, aducînd o contribuție nulă la curentul total printr-o suprafață închisă care înconjură nodul :

$$\sum_{k \in (b)} \sum_{k \in (q)} \underline{I}'_q = 0. \qquad (38.42)$$

Fie, de exemplu, nodul (2) al rețelei din figura 38.15, pentru care prima ecuație Kirchhoff se scrie :

$$-\underline{I}_1 + \underline{I}_5 + \underline{I}_2 = 0.$$

Înlocuind aici expresiile (38.40), această ecuație devine identitatea :

$$-(\underline{I}'_1 - \underline{I}'_3) + \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 + (-\underline{I}'_2 - \underline{I}'_3) = -\underline{I}'_1 + \underline{I}'_3 + \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 - \underline{I}'_2 - \underline{I}'_3 \equiv 0.$$

[1] Suma se face asupra tuturor curenților ochiurilor (q) cărora latura s le aparține.

Prin trecerea la noile variabile se satisfac identic primele ecuaţii Kirchhoff, adică $N—S$ ecuaţii. Cele O noi variabile — curenţii de ochiuri — vor fi atunci univoc determinate de cele $L—(N—S)=O$ ecuaţii rămase: ecuaţiile date de a doua teoremă a lui Kirchhoff.

38.3.2. **Teorema curenţilor de ochiuri.** Sistemul de O ecuaţii satisfăcut de curenţii de ochiuri e dat de teorema curenţilor de ochiuri. Pentru a se obţine acest sistem, înlocuim în ecuaţiile de ochiuri (36.22) ale teoremei a doua Kirchhoff expresiile (38.40). Se obţin relaţiile:

$$\sum_{m\in(p)}\left[\sum_{s=1}^{L}\underline{Z}_{ms}\sum_{s\in(q)}\underline{I}'_q\right]=\sum_{m\in(p)}\underline{E}_m.\,(p=1,2,\dots,O).$$

Intervertind ordinea de sumare, se obţine o sumă multiplă de termeni de forma $\underline{Z}_{ms}\underline{I}'_q$. În această sumă pot fi grupaţi împreună toţi termenii cari conţin în factor acelaşi curent de ochi $\underline{I}'_q$, curent care se poate scoate în factor comun în această grupare. Fiecare curent de ochi va apărea deci factor pe lîngă o sumă de impedanţe $\underline{Z}_{ms}$ şi întreaga expresie va putea fi ordonată după curenţii de ochiuri, căpătînd forma:

$$\sum_{q=1}^{O}\left[\sum_{\substack{m\in(p)\\ s\in(q)}}\underline{Z}_{ms}\right]\underline{I}_q=\sum_{m\in(p)}\underline{E}_m\,. \tag{38.43}$$

Se notează cu:

$$E'_p=\sum_{m\in(p)}E_m \tag{38.44}$$

suma algebrică a tensiunilor electromotoare din laturile ochiului (p) şi se numeşte *tensiune electromotoare de ochi*. Se mai notează cu:

$$\underline{Z}'_{pq}=\sum_{\substack{m\in(p)\\ s\in(q)}}\underline{Z}_{ms} \tag{38.45}$$

coeficientul de natura unei impedanţe al curentului ciclic $\underline{I}'_q$ din ecuaţia ochiului (p), şi se numeşte *impedanţă de cuplaj dintre ochiurile q şi p* $(q\neq p)$, respectiv *impedanţă proprie a ochiului p* $(p=q)$. Cu relaţiile (38.44) şi (38.45) se obţin din relaţia (38.43) ecuaţiile curenţilor de ochiuri:

$$\sum_{q=1}^{O}\underline{Z}'_{pq}\underline{I}'_q=\underline{E}'_p \qquad q=1,2,\dots,O, \tag{38.46}$$

care, explicit, formează sistemul:

$$\begin{aligned}
&\underline{Z}'_{11}\underline{I}'_1+\underline{Z}'_{12}\underline{I}'_2+\dots+\underline{Z}'_{1O}\underline{I}'_O=\underline{E}'_1\\
&\underline{Z}'_{21}\underline{I}'_1+\underline{Z}'_{22}\underline{I}'_2+\dots+\underline{Z}'_{2O}\underline{I}'_O=\underline{E}'_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\underline{Z}'_{O1}\underline{I}'_1+\underline{Z}'_{O2}\underline{I}'_2+\dots+\underline{Z}'_{OO}\underline{I}'_O=\underline{E}'_O
\end{aligned} \tag{38.47}$$

Pentru a scrie dintr-o dată aceste ecuaţii, e necesar să clarificăm interpretarea coeficientului $\underline{Z}'_{pq}$, interpretare care rezultă din (38.45):

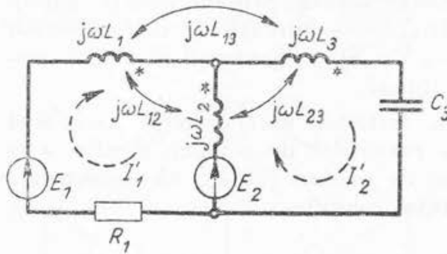


Fig. 38.16.

— Considerăm mai întîi coeficienţii diagonali, cu $p = q$,

$$\underline{Z}'_{pp} = \sum_{\substack{m \in (p) \\ s \in (q)}} \underline{Z}_{ms} = \sum_{m \in (p)} \underline{Z}_m + \sum_{\substack{m \in (p) \\ s \in (q) \\ m \neq s}} j\omega L_{ms}. \qquad (38.48)$$

Aceasta este *impedanţa proprie a ochiului p*. Este egală cu suma impedanţelor proprii $\underline{Z}_m$ ale laturilor m care aparţin ochiului (p) — adunată cu suma algebrică a impedanţelor mutuale dintre laturile m şi s, aparţinînd ambele ochiului (p). Deoarece $L_{ms} = L_{sm}$, la scrierea explicită a acestei ultime sume, fiecare inductivitate mutuală va intra de două ori. Semnul fiecărei inductivităţi mutuale depinde de modul cum se asociază sensul ochiului (p) cu bornele polarizate ale celor două bobine din laturile m şi s, fiecare neconcordanţă însemnînd o schimbare de semn. Fie, de exemplu, reţeaua din figura 38.16. Impedanţele proprii ale ochiurilor (1) şi (2) sînt:

$$\underline{Z}'_{11} = R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 - j\omega L_{12} - j\omega L_{21} = R_1 + j\omega(L_1 + L_2) - j2\omega L_{12}$$

$$\underline{Z}'_{22} = j\omega L_2 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3} + j\omega L_{23} + j\omega L_{32} = j\omega(L_2 + L_3) + \frac{1}{j\omega C_3} + j2\omega L_{23}. \qquad (38.49)$$

Semnul (—) din faţa lui $L_{12} = L_{21}$ se datoreşte faptului că sensul ochiului (1) intră în borna polarizată a bobinei L_2, dar iese prin borna polarizată a bobinei L_1. Semnul (+) din faţa lui $L_{23} = L_{32}$ se datoreşte faptului că sensul ochiului (2) iese prin borna polarizată şi la bobina L_3 şi la bobina L_2.

— Considerăm apoi coeficienţii nediagonali, cu $p \neq q$

$$\underline{Z}'_{pq} = \sum_{\substack{m \in (p) \\ s \in (q)}} \underline{Z}_{ms} = \sum_{\substack{m \in (p) \\ m \in (q)}} \underline{Z}_m + \sum_{\substack{m \in (p) \\ s \in (q) \\ m \neq s}} j\omega L_{ms}. \qquad (38.50)$$

Aceasta este *impedanţa de cuplaj a ochiurilor (p) şi (q)*. Este egală cu suma algebrică a impedanţelor proprii ale laturilor comune ochiurilor (p) şi (q) — cu semnul (+), dacă ochiurile au acelaşi sens prin latura comună, şi cu semnul (—), dacă au sensuri opuse — adunată cu suma impedanţelor mutuale dintre o latură s, aparţinînd ochiului (q) şi o latură m, aparţinînd ochiului $(p) \neq (q)$. Semnul fiecărei inductivităţi mutuale depinde de modul cum se asociază sensurile ochiurilor (p) şi (q), cu bornele polarizate ale celor două bobine din laturile $m \in (p)$ şi $s \in (q)$, fiecare neconcordanţă însemnînd o schimbare de semn.

Fie, de exemplu, reţeaua din figura 38.16. Impedanţele de cuplaj dintre ochiurile (1) şi (2) sînt:

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}'_{12} &= -j\omega L_2 - j\omega L_{23} + j\omega L_{12} + j\omega L_{13} \\ \underline{Z}'_{21} &= -j\omega L_2 - j\omega L_{32} + j\omega L_{21} + j\omega L_{31} \end{aligned}\right\}. \qquad (38.51)$$

O b s e r v a ţ i i: 1. Din însuşi modul cum sînt definite şi deoarece $L_{ms} = L_{sm}$, impedanţele de cuplaj dintre ochiuri satisfac relaţia de reciprocitate:

$$\boxed{\underline{Z}'_{pq} = \underline{Z}'_{qp}} \qquad (38.52)$$

(v. exemplul (38.51), în care $\underline{Z}'_{12} = \underline{Z}'_{21}$).

2. Semnul cu care apare o inductivitate mutuală în coeficienţii ecuaţiilor curenţilor de ochiuri (38.47) e hotărît pînă la urmă de modul cum se asociază faţă de bornele polarizate sensul de scriere al ecuaţiei pe ochiul considerat cu sensul curentului de ochi (ciclic), care induce că-

derea de tensiune respectivă. Sensurile de referinţă ale laturilor nu intervin în această regulă; de aceea e preferabil ca ele să nu se indice pe figură atunci cînd scriem ecuaţiile (38.47).

38.3.3. **Aplicarea metodei curenţilor de ochiuri.** Se procedează în felul următor:

a) Se aleg ochiurile fundamentale, sensurile lor de referinţă şi se numerotează.

b) Se calculează cu (38.44) t.e.m. de ochiuri $\underline{E}'_p$.

c) Se calculează impedanţele proprii şi mutuale de ochiuri $\underline{Z}'_{pp}$ şi $\underline{Z}'_{pq}$ cu relaţiile (38.48) şi (38.50).

d) Se scriu ecuaţiile curenţilor de ochiuri (38.47).

e) Se rezolvă în raport cu curenţii de ochiuri.

f) Se aleg sensurile de referinţă pe laturi, se numerotează laturile.

g) Se calculează curenţii de laturi cu relaţia (38.40).

h) Se verifică calculele (de ex. cu bilanţul puterilor).

Ca exemplu, considerăm reţeaua din figura 38.16, pentru care ecuaţiile curenţilor de ochiuri sînt:

$$\left.\begin{aligned}&[R_1 + \mathrm{j}\,\omega(L_1 + L_2) - \mathrm{j}2\,\omega L_{12}]\,\underline{I}'_1 + [-\mathrm{j}\,\omega L_2 - \mathrm{j}\,\omega(L_{23} - L_{12} - L_{13})]\,\underline{I}'_2 = \underline{E}_1 - \underline{E}_2\\ &[-\mathrm{j}\,\omega L_2 - \mathrm{j}\,\omega(L_{23} - L_{12} - L_{13})]\,\underline{I}'_1 + \left[\mathrm{j}\,\omega\,(L_2 + L_3) + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C_3} + \mathrm{j}2\,\omega L_{23}\right]\underline{I}'_2 = \underline{E}_2.\end{aligned}\right\} \quad (38.53)$$

38.3.4. **Admitanţele de transfer dintre ochiuri.** Dacă se rezolvă ecuaţiile curenţilor de ochiuri cu regula lui Cramer, un curent de ochi oarecare — de exemplu $\underline{I}'_q$ — are expresia:

$$\underline{I}'_q = \frac{\begin{vmatrix} \underline{Z}'_{11}\underline{Z}'_{12} \cdots \underline{E}'_1 \cdots \underline{Z}'_{1O} \\ \underline{Z}'_{21}\underline{Z}'_{22} \cdots \underline{E}'_2 \cdots \underline{Z}'_{2O} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underline{Z}'_{p1}\underline{Z}'_{p2} \cdots \underline{E}'_p \cdots \underline{Z}'_{pO} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underline{Z}'_{O1}\underline{Z}'_{O2} \cdots \underline{E}'_O \cdots \underline{Z}'_{OO} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underline{Z}'_{11}\underline{Z}'_{12} \cdots \underline{Z}'_{1q} \cdots \underline{Z}'_{1O} \\ \underline{Z}'_{21}\underline{Z}'_{22} \cdots \underline{Z}'_{2q} \cdots \underline{Z}'_{2O} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underline{Z}'_{p1}\underline{Z}'_{p2} \cdots \underline{Z}'_{pq} \cdots \underline{Z}'_{pO} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underline{Z}'_{O1}\underline{Z}'_{O2} \cdots \underline{Z}'_{Oq} \cdots \underline{Z}'_{OO} \end{vmatrix}} \quad (38.54)$$

Notînd cu $\underline{\Delta}'$ determinantul sistemului şi cu $\underline{\Delta}'_{pq}$ minorul normalizat al elementului $\underline{Z}'_{pq}$ din $\underline{\Delta}'$, dezvoltarea numărătorului după coloana q duce la expresia:

$$\underline{I}'_q = \frac{\underline{\Delta}'_{1q}}{\underline{\Delta}'}\underline{E}'_1 + \frac{\underline{\Delta}'_{2q}}{\underline{\Delta}'}\underline{E}'_2 + \ldots + \frac{\underline{\Delta}'_{pq}}{\underline{\Delta}'}\underline{E}'_p + \ldots + \frac{\underline{\Delta}'_{Oq}}{\underline{\Delta}'}\underline{E}'_O. \quad (38.55)$$

sau

$$\underline{I}'_q = \underline{Y}'_{q1}\underline{E}_1 + \underline{Y}'_{q2}\underline{E}_2 + \ldots + \underline{Y}'_{qO}\underline{E}_O = \sum_{p=1}^{O} \underline{Y}'_{pq}\underline{E}'_q. \quad (38.56)$$

În această relaţie, coeficientul

$$\underline{Y}'_{qp} = \frac{\underline{\Delta}'_{pq}}{\underline{\Delta}'} = (\underline{I}'_q)_{\substack{\underline{E}'_p = 1\\ \underline{E}'_q = 0\ (q \neq p)}} \quad (38.57)$$

se numeşte admitanţă de transfer de la ochiul p la ochiul q. *Curenţii de ochiuri sînt deci funcţiuni liniare şi omogene de t.e.m. de ochiuri, ale căror coeficienţi sînt admitanţele de transfer între ochiuri, determinate numai de impedanţele laturilor şi de structura reţelei.*

38.3.5. **Teorema reciprocităţii.** Deoarece $\underline{Z}'_{pq} = \underline{Z}'_{qp}$, relaţia (38.52), determinantul $\underline{\Delta}'$ e simetric faţă de diagonala principală şi toţi minorii $\underline{\Delta}'_{pq}$ satisfac condiţia $\underline{\Delta}'_{pq} = \underline{\Delta}'_{qp}$. Din relaţia (38.57) rezultă că această condiţie e satisfăcută şi de admitanţele de transfer între ochiuri

$$\underline{Y}'_{pq} = \underline{Y}'_{qp}. \tag{38.58}$$

Relaţia (38.56) e valabilă pentru orice sistem de t.e.m.,cu aceiaşi coeficienţi. Putem considera că există în reţea numai o singură sursă ideală de t.e.m. $\underline{E}$ conectată în latura $m \in (p)$ şi alegem astfel ochiurile fundamentale, ca numai ochiul (p) să treacă prin latura m şi numai ochiul (q) să treacă printr-o altă latură s (fig. 38.17, *a*). În acest caz, toţi $\underline{E}'_{q \neq p} = 0$, $\underline{E}'_p = \underline{E}_m = \underline{E}$, iar $\underline{I}_s = \underline{I}'_q$; cu relaţia (38.56):

$$\underline{I}_s = \underline{I}'_q = \underline{Y}'_{qp}\underline{E}'_p = \underline{Y}'_{qp}\underline{E}, \tag{38.59}$$

iar cu relaţia (38·2):

$$\underline{I}_s = \underline{Y}_{sm}\underline{E}_m = \underline{Y}_{sm}\underline{E}, \tag{38.60}$$

adică

$$\underline{Y}'_{qp} = \underline{Y}_{sm}. \tag{38.61}$$

Se pot deci totdeauna alege ochiurile astfel ca admitanţele de transfer între laturi (v. par. 38.1.1) să fie egale cu admitanţele de transfer între ochiurile cărora acele laturi le aparţin în exclusivitate. Considerăm acum că sursa ideală de t.e.m. $\underline{E}$ e mutată în latura $s \in (q)$ (fig. 38.17, *b*). Avem $\underline{E}'_{p \neq l} = 0$, $\underline{E}'_q = \underline{E}_s = \underline{E}$, iar $\underline{I}_m = \underline{I}'_p$; cu relaţia (38.56):

$$\underline{I}_m = \underline{I}'_p = \underline{Y}'_{pq}\underline{E}'_q = \underline{Y}'_{pq}\underline{E}, \tag{38.62}$$

iar cu relaţia (38.2)

$$\underline{I}_m = \underline{Y}_{ms}\underline{E}_s = \underline{Y}_{ms}\underline{E}, \tag{38.63}$$

adică

$$\underline{Y}'_{pq} = \underline{Y}_{ms}. \tag{38.64}$$

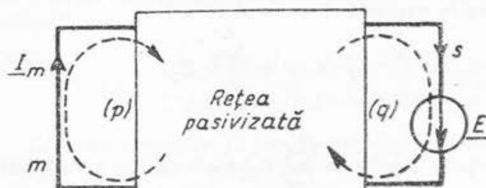
Comparînd relaţiile (38.58), (38.61) şi (38.64), rezultă:

$$\boxed{\underline{Y}_{ms} = \underline{Y}_{sm}}, \tag{38.65}$$

adică şi admitanţele de transfer între laturi satisfac condiţia de reciprocitate. De asemenea, cu relaţia (38.58), (38.59) şi (38.62), rezultă că în condiţiile de mai sus $\underline{I}_m = \underline{I}_s$:

Curentul produs într-o latură s de o sursă situată într-o latură m (fig. 38.17) e egal cu curentul pe care aceeaşi sursă, mutată în latura s, l-ar produce în latura m (teorema reciprocităţii).





$$\underline{I}_s \Big|_{\substack{\underline{E}_m = \underline{E} \\ \underline{E}_r = 0\ (r \neq m)}} = \underline{I}_m \Big|_{\substack{\underline{E}_s = \underline{E} \\ \underline{E}_r = 0\ (r \neq s)}}$$

Fig. 38.17.

Observaţie: Teorema reciprocităţii e o consecinţă a caracterului *liniar* al reţelei şi al caracterului *dipolar* al elementelor care o compun. Există reţele liniare cu elemente de circuit multipolare (nestudiate în acest capitol) care se numesc *nereciproce*, deoarece în ele teorema reciprocităţii nu e verificată (v. par. 42.2 şi 43.7).

38.4. Metoda potenţialelor de noduri

Metoda potenţialelor de noduri e o metodă sistematică de rezolvare a reţelelor, în care se operează cu noi variabile, astfel încît numărul ecuaţiilor şi al necunoscutelor să se reducă la numărul $N - 1$ al nodurilor independente, totdeauna mai mic decît numărul de laturi. În forma prezentată mai jos, metoda se aplică numai reţelelor fără inductivităţi mutuale (în care numărul de subreţele conexe $S = 1$), pentru care sistemul de ecuaţii Kirchhoff este:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k \in (b)} \underline{I}_k = 0, & b = 1, 2, \ldots N-1 \\ \sum\limits_{m \in (p)} \underline{Z}_m \underline{I}_m = \sum\limits_{m \in (p)} \underline{E}_m, & p = 1, 2, \ldots, 0. \end{cases} \tag{38.66}$$

38.4.1. Forma duală a teoremelor lui Kirchhoff. În reţelele fără inductivităţi mutuale, ecuaţiile lui Kirchhoff se pun şi sub o altă formă, în care necunoscutele sînt tensiunile la bornele laturilor (luate după convenţia de la receptoare):

$$\underline{U}_{bm} = \underline{Z}_m \underline{I}_m - \underline{E}_m \quad (m = 1, 2, \ldots, L). \tag{38.67}$$

Curentul $\underline{I}_m$ se exprimă sub forma:

$$\underline{I}_m = \underline{Y}_m \underline{U}_{b_m} + \underline{Y}_m \underline{E}_m = \underline{Y}_m \underline{U}_{b_m} + \underline{I}_{s_m}, \tag{38.68}$$

în care $\underline{Y}_m = 1/\underline{Z}_m$ e admitanţa laturii m, iar

$$\underline{I}_{s_m} = \underline{Y}_m \underline{E}_m = (\underline{I}_m)_{\underline{U}_{b_m} = 0} \tag{38.69}$$

e curentul de scurtcircuit al laturii m.

Cu relaţiile (38.67) şi (38.68), ecuaţiile lui Kirchhoff capătă forma:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k \in (b)} \underline{Y}_k \underline{U}_{b_k} = \sum\limits_{k \in (b)} (-\underline{I}_{s_k}), & b = 1, 2, \ldots, N-1 \\ \sum\limits_{m \in (p)} \underline{U}_{b_m} = 0, & p = 1, 2, \ldots, 0, \end{cases} \tag{38.70}$$

numită *formă duală*, deoarece se deduce formal din relaţia (38.66), în baza corespondenţei:

$$\begin{matrix} \underline{I} & \underline{Z} & \underline{E} & \text{nod} & \text{ochi} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underline{U} & \underline{Y} & -\underline{I}_s & \text{ochi} & \text{nod} \end{matrix} \tag{38.71}$$

38.4.2. **Potențialele de noduri.** Noile variabile utilizate în metoda prezentată în acest capitol sînt tensiunile dintre fiecare nod și un nod (al N-lea) luat ca referință — numite și potențialele nodurilor (și notate cu accent numai pentru a păstra uniformitatea de notație în schimbarea de variabile efectuată) :

$$\underline{V}'_1, \underline{V}'_2, \ldots, \underline{V}'_{N-1}.$$

Fie m o latură care iese din nodul (c) și intră în nodul (d). Tensiunea $\underline{U}_{b_m}$, după regula de la receptoare, se exprimă în funcție de potențiale (v. fig. 38.18) prin relația :

$$\underline{U}_{b_m} = \underline{V}'_c - \underline{V}'_d. \qquad (38.72)$$

Fig. 38.18.

Dacă se substituie tensiunile $\underline{U}_{b_m}$ date de această expresie în a doua ecuație Kirchhoff, scrisă sub forma duală (38.70), se obține o identitate

$$\sum_{m \in (p)} (\underline{V}'_c - \underline{V}'_d) \equiv 0, \qquad (38.73)$$

deoarece fiecare potențial de nod intră în această sumă luată pe un ochi de două ori : o dată cu semnul (+), cînd latura iese din acel nod, și o dată cu semnul (—), cînd latura intră în acel nod.

Prin trecerea la noile variabile, se satisfac identic ultimele ecuații Kirchhoff, adică O ecuații. Cele $N - 1$ noi variabile — potențialele de noduri — vor fi atunci univoc determinate de cele $L - O = N - 1$ ecuații rămase : ecuațiile date de prima teoremă a lui Kirchhoff.

38.4.3. **Teorema potențialelor de noduri.** Sistemul de N—1 ecuații satisfăcut de potențialele de noduri e dat de teorema potențialelor de noduri și se obține înlocuind relația (38.72) în primele ecuații Kirchhoff, scrise sub forma duală (38.70). Fie ecuația nodului (c) :

$$\sum_{m \in (c)} \underline{Y}_m \underline{U}_{b_m} = \sum_{m \in (c)} (-\underline{I}_{s_m})$$

Cu relația (38·72) se obține relația :

$$\sum_{m \in (c)} \underline{Y}_m (\underline{V}'_c - \underline{V}'_d) = \sum_{m \in (c)} (-\underline{I}_{s_m}). \qquad (38.74)$$

Suma din membrul stîng se poate grupa și ordona după potențialele nodurilor care apar în ea. Fiecare potențial de nod apare drept factor comun pe lîngă o sumă de admitanțe de laturi, și anume : potențialul nodului (c), pentru care e scrisă ecuația, apare factor comun pe lîngă suma admitanțelor laturilor legate la nodul (c), numită *admitanța proprie a nodului* (c) :

$$\underline{Y}'_{cc} = \sum_{m \in (c)} \underline{Y}_m ; \qquad (38.75)$$

iar potenţialul unui alt nod $(d) \neq (c)$ apare factor comun pe lîngă suma cu semn schimbat a admitanţelor care leagă nodul (d) de nodul (c), numită *admitanţa de cuplaj dintre nodurile* (d) *şi* (c):

$$\underline{Y}'_{cd} = -\sum_{\substack{m \in (c) \\ m \in (d)}} \underline{Y}_m. \tag{38.76}$$

Membrul drept din relaţia (38·74) este suma curenţilor de scurtcircuit ai laturilor legate la nodul (c), consideraţi pozitivi cînd intră în nod. Această sumă e numită curentul de scurtcircuit injectat în nodul (c),

$$\underline{I}'_{s_c} = \sum_{m \in (c)} (-\underline{I}_{s_m}), \tag{38.77}$$

unde semnul (—) a determinat schimbarea convenţiei faţă de prima teoremă Kirchhoff (în care curenţii erau consideraţi pozitivi cînd ieşeau din nod).

Cu relaţiile (38.75), (38.76) şi (38.77) rezultă din relaţia (38.74) ecuaţiile potenţialelor de noduri:

$$\sum_{d=1}^{N-1} \underline{Y}'_{cd}\underline{V}'_d = \underline{I}'_{sc} \qquad c = 1, 2, ..., N-1, \tag{38.78}$$

care, explicit, formează sistemul:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{Y}'_{11}\underline{V}'_1 + \underline{Y}'_{12}\underline{V}'_2 + ... + \underline{Y}'_{1,N-1}\underline{V}'_{N-1} = \underline{I}'_{s_1} \\ \underline{Y}'_{21}\underline{V}'_1 + \underline{Y}'_{22}\underline{V}'_2 + ... + \underline{Y}'_{2,N-1}\underline{V}'_{N-1} = \underline{I}'_{s_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \underline{Y}'_{N-1,1}\underline{V}'_1 + \underline{Y}'_{N-1,2}\underline{V}'_2 + ... + \underline{Y}'_{N-1,N-1}\underline{V}'_{N-1} = \underline{I}'_{s_{N-1}} \end{array}\right\} \tag{38.79}$$

Observaţii: **1.** Ecuaţiile potenţialelor de noduri (38.78) arată că, din punctul de vedere al acestor potenţiale, totul se petrece ca şi cum reţeaua ar fi pasivizată, iar în noduri s-ar injecta din exterior curenţii $\underline{I}'_{s_c}$ (v. sub 38.4.4, exemplul de calcul şi fig. 38.19 şi 38.20).

2. Din însăşi relaţia (38.76) de definiţie rezultă că admitanţele de cuplaj între noduri satisfac relaţia de reciprocitate:

$$\underline{Y}'_{cd} = \underline{Y}'_{dc}. \tag{38.80}$$

3. Toate admitanţele de cuplaj (38.76) au semn schimbat faţă de admitanţele laturilor respective.

4. Dacă vreo latură are impedanţa proprie nulă, ea are admitanţa infinită şi ecuaţiile (38.70), respectiv (38.74) şi (38.78) îşi pierd sensul. Nu se scriu deci ecuaţiile de noduri (38.78) decît pentru noduri la care sînt legate laturi cu impedanţe nenule. Această scădere a numărului de ecuaţii de noduri e compensată de faptul că pentru astfel de laturi diferenţa de potenţial la borne este egală cu tensiunea electromotoare cu semn schimbat:

$$\underline{U}_{b_m} = \underline{V}'_c - \underline{V}'_d = -\underline{E}_m, \tag{38.81}$$

aşa că se obţin pe această cale ecuaţii suplimentare care completează sistemul.

5. Sistemul (38.79) are N—1 ecuaţii. Dacă:

$$N - 1 < O = L - (N - 1), \tag{38.82}$$

metoda potenţialelor de noduri e mai avantajoasă decît aceea a curenţilor de ochiuri, deoarece duce la un sistem cu mai puţine ecuaţii.

6. Mărimile $\underline{E}_m$ intră în relațiile de mai sus cu semn schimbat, dacă nu au sensul de referință același cu al curentului.

38.4.4. **Aplicarea metodei potențialelor de noduri.** Se procedează în felul următor:
a) Se alege nodul de referință și nodurile pentru care se scriu ecuațiile.
b) Se calculează admitanțele laturilor și curenții de scurtcircuit injectați în noduri.

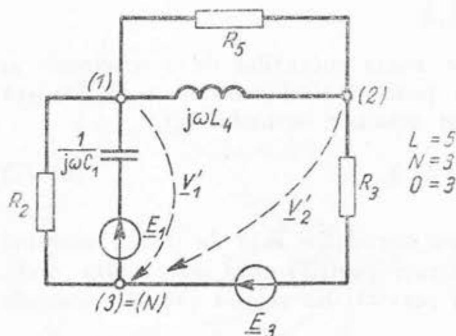


Fig. 38.19.

c) Se calculează admitanțele proprii și de cuplaj între noduri.
d) Se scriu ecuațiile potențialelor de noduri.
e) Se rezolvă în raport cu aceste potențiale.
f) Se aleg sensurile de referință pentru curenții pe laturi și se calculează tensiunile la bornele laturilor după regula de la receptoare cu (38.72).
g) Se calculează curenții din laturi cu relația (38.68).
h) Se verifică calculele (de ex. cu bilanțul puterilor).

Exemplu: Considerăm rețeaua din figura 38.19 cu trei ochiuri și două noduri independente ($N - 1 = 2 < 3 = O$). Se dau:

$$e_1 = 20 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \quad e_3 = 20\sqrt{2} \sin \omega t \tag{38.83}$$

$$R_2 = 4\Omega, \quad R_3 = R_5 = 2\Omega, \quad \omega L_4 = \frac{1}{\omega C_1} = 1\Omega.$$

Admitanțele laturilor și t.e.m. de laturi sînt:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{Y}_1 = j\omega C_1 = j; \ \underline{Y}_2 = 1/R_2 = 0{,}25; \ \underline{Y}_3 = 1/R_3 = 0{,}5 \\ &\underline{Y}_4 = 1/j\omega L = -j; \ \underline{Y}_5 = 1/R_5 = 0{,}5; \\ &\underline{E}_1 = 10(1 + j); \ \underline{E}_3 = 20. \end{aligned}\right\} \tag{38.84}$$

Curenții de scurtcircuit injectați în nodurile (1) și (2) sînt:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{I}_{s_1}' = \underline{E}_1\underline{Y}_1 = (10 + 10j)j = -10 + j10 \\ &\underline{I}_{s_2}' = -\underline{E}_3\underline{Y}_3 = -20 \cdot 0{,}5 = -10 \end{aligned}\right\} \tag{38.85}$$

Admitanțele proprii și de cuplaj între noduri sînt:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{Y}_{11}' = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 = j + 0{,}25 + 0{,}5 - j = 0{,}75 \\ &\underline{Y}_{12}' = \underline{Y}_{21}' = -(\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) = -(0{,}5 - j) = -0{,}5 + j \\ &\underline{Y}_{22}' = \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 = 0{,}5 + 0{,}5 - j = 1 - j. \end{aligned}\right\} \tag{38.86}$$

Ecuațiile potențialelor de noduri sînt:

$$\left\{\begin{aligned} &\underline{I}_{s1}' = \underline{Y}_{11}'\underline{V}_1' + \underline{Y}_{12}'\underline{V}_2' \quad \text{sau} \quad -10 + j10 = 0{,}75\underline{V}_1' + (-0{,}5 + j)\underline{V}_2' \\ &\underline{I}_{s2}' = \underline{Y}_{21}'\underline{V}_1' + \underline{Y}_{22}'\underline{V}_2' \quad \text{sau} \quad -10 = (-0{,}5 + j)\underline{V}_1' + (1 - j)\underline{V}_2'. \end{aligned}\right. \tag{38.87}$$

Ecuaţiile sînt acelea care s-ar obţine dacă am considera reţeaua pasivizată dar neizolată, avînd injectaţi din exterior în noduri curenţii $\underline{I}'_{s1}$, $\underline{I}'_{s2}$ şi $-(\underline{I}'_{s1}+\underline{I}'_{s2})$, ca în figura 38.20. Rezolvînd aceste ecuaţii, se obţin potenţialele:

$$\underline{V}'_1 = 20\ \text{j};\quad \underline{V}'_2 = 10\ \text{j}. \tag{38.88}$$

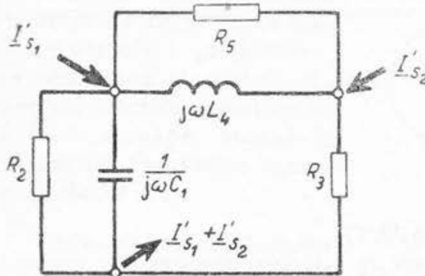


Fig. 38.20.

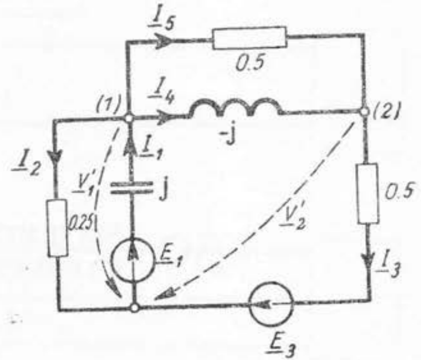


Fig. 38.21.

Alegem sensurile curenţilor pe laturi şi calculăm aceşti curenţi (fig. 38.21, în care, alături de laturi am înscris valorile admitanţelor):

$$\left.\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= (-\underline{V}'_1+\underline{E}_1)\underline{Y}_1 = 10+10\text{j} && \rightleftarrows i_1 = 20\sin(\omega t+\pi/4)\\
\underline{I}_2 &= \underline{V}'_1\underline{Y}_2 = 5\text{j} && \rightleftarrows i_2 = 5\sqrt{2}\sin(\omega t+\pi/2)\\
\underline{I}_3 &= (\underline{V}'_2+\underline{E}_3)\underline{Y}_3 = 10+5\text{j} && \rightleftarrows i_3 = 5\sqrt{10}\sin\left(\omega t+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)\\
\underline{I}_4 &= (\underline{V}'_1-\underline{V}'_2)\underline{Y}_4 = 10 && \rightleftarrows i_4 = 10\sqrt{2}\sin\omega t\\
\underline{I}_5 &= (\underline{V}'_1-\underline{V}'_2)\underline{Y}_5 = 5\text{j} && \rightleftarrows i_5 = 5\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{38.89}$$

Se verifică imediat teorema lui Kirchhoff cu aceşti curenţi şi bilanţul puterilor complexe:

$$\underline{E}_1\underline{I}_1^* + \underline{E}_3\underline{I}^* = R_2I_2^2 + R_3I_3^2 + R_5I_5^2 + \text{j}\left(-\frac{1}{\omega C_1}I_1^2 + \omega L_4I_4^2\right) \tag{38.90}$$

sau

$$(10+\text{j}10)(10-\text{j}10) + 20(10-\text{j}\,5) = 4.25 + 2.125 + 2.25 + \text{j}(-1.200 + 1.100)$$

$$400 - \text{j}100 = 400 - \text{j}\ 100.$$

REȚELE ELECTRICE TRIFAZATE

39. SISTEME TRIFAZATE, CARACTERIZARE ȘI PROPRIETĂȚI

Transmisiunea energiei electromagnetice, de la locul de producere (centrala electrică în care sînt instalate mașinile generatoare) la locul de utilizare se face prin *linii electrice*. În cazurile cele mai simple, această transmisiune se face cu o linie cu două conductoare (v. și par. 35.6), alimentată la plecare cu un generator de curent alternativ, avînd o anumită tensiune electromotoare. Acesta este *sistemul monofazat* de transmisiune, în care atît generatorul cît și sarcina constituie dipoli electrici (v. fig. 39.1, *a*). Pentru o linie dată, dimensionată pentru o anumită tensiune nominală U_N (a cărei depășire ar periclita izolația liniei) și pentru un anumit curent nominal I_N (a cărui depășire ar mări inadmisibil pierderile de putere în conductoare), există o *putere activă maximă pe care o poate transmite linia*, egală cu produsul $U_N I_N$ — factorul de putere maxim fiind egal cu unitatea. Raportată la numărul de conductoare — două în cazul liniei monofazate — această putere maximă (specifică) caracterizează eficacitatea sistemului de transmisiune :

$$P_{cond}^{(1)} = \frac{U_N I_N}{2}. \tag{39.1}$$

Se constată că *puterea maximă pe conductor* poate fi sporită (în condiții în rest neschimbate), dacă se utilizează o linie cu trei conductoare (v. fig. 39.1,*b*), alimentată cu generatoare care produc trei tensiuni electromotoare de valori efective egale și avînd faze inițiale diferite cu cîte $2\pi/3$. Sistemul de transmisiune astfel obținut se numește *sistem trifazat* — chiar dacă egalitatea valorilor efective și a defazajelor t.e.m. nu e riguros asigurată — și prezintă numeroase avantaje : o transmisiune de energie mai economică (v. și par. 39.3) ; posibilitatea de a dispune la utilizare de două tensiuni diferite pentru consumatori mono-

fazaţi (v. şi par. 39.3.1); posibilitatea de a produce cîmpuri magnetice învîrtitoare (v. şi par. 39.4), care permit realizarea celor mai simple şi mai economice motoare electrice — motoarele asincrone etc. Totodată, construcţia generatoarelor trifazate nu este mai dificilă decît a celor monofazate (v. şi par. 39.2). Toate aceste avantaje au făcut ca în tehnica actuală producerea, transmisiunea şi distribuţia energiei electromagnetice să se facă aproape numai în trifazat (cu frecvenţa industrială de 50 Hz).

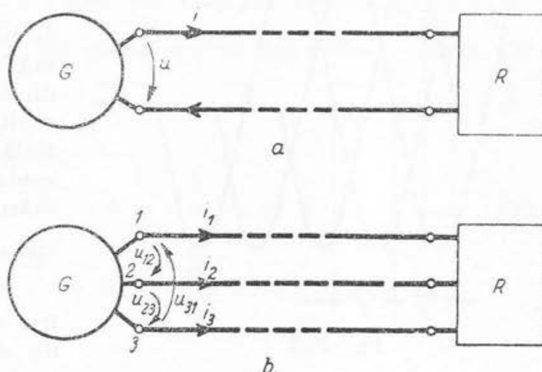


Fig. 39.1.

Prima linie de energie în curent alternativ trifazat a fost realizată de M. O. Dolivo-Dobrovolschi, în 1891. Linia începea la Lauffen (lîngă Heidelberg — Germania)— unde se găsea o instalaţie formată dintr-o turbină hidraulică, un generator de curent alternativ trifazat şi un transformator ridicător şi se termina la Frankfurt pe Main, unde se găsea un transformator coborîtor care alimenta un motor asincron trifazat (realizat tot de Dolivo-Dobrovolschi), folosit pentru a antrena o pompă. Pe linia care avea 175 km s-a transmis puterea de 200 CP $\approx$ 147kW, la tensiunea de 15 kV, cu frecvenţa 30—40 Hz şi cu un randament de 75%.

În cazuri cu totul speciale se utilizează şi sisteme cu două faze (bifazate) sau cu mai mult de trei faze (polifazate), de obicei din motive impuse de natura receptorului. În cele ce urmează vor fi prezentate numai sistemele trifazate.

39.1. Sisteme trifazate simetrice de mărimi sinusoidale

39.1.1. **Definiţii şi proprietăţi.** Se numeşte *sistem trifazat simetric direct* (de succesiune directă) un ansamblu ordonat de trei mărimi sinusoidale de aceeaşi frecvenţă (e_1, e_2, e_3) [1], care au valori efective egale şi diferenţe relative de fază egale cu $\frac{2\pi}{3}$, astfel că mărimea e_2 e în urma mărimii e_1, iar mărimea e_3 e în urma mărimii e_2. Valorile lor instantanee sînt deci :

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= E_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_1) = E\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha) \\ e_2 &= E_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_2) = E\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_3 &= E_3 \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_3) = E\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{39.2}$$

[1] Folosim notaţia de la tensiuni electromotoare, deşi definiţiile şi proprietăţile prezentate sînt valabile pentru orice astfel de mărimi : tensiuni la borne, curenţi, fluxuri etc.

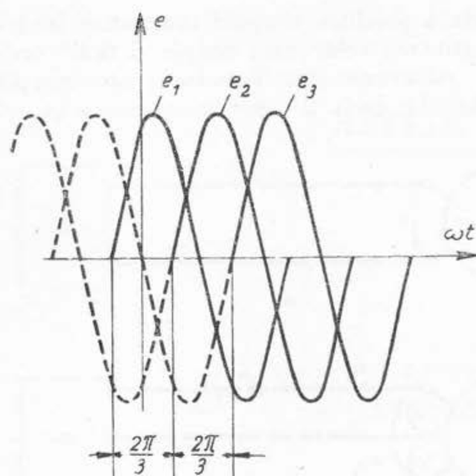


Fig. 39.2.

adică

$$E_1 = E_2 = E_3 = E;\ \alpha_1 = \alpha;$$

$$\alpha_2 = \alpha - \frac{2\pi}{3};\ \alpha_3 = \alpha - \frac{4\pi}{3}. \quad (39.3)$$

În figura 39.2 sînt reprezentate grafic mărimile unui sistem trifazat simetric direct. Deoarece adăugarea unui multiplu întreg de 2π la faza inițială nu modifică mărimea sinusoidală, se mai poate afirma că mărimea e_3 e defazată înaintea mărimii e_1 cu $\frac{2\pi}{3}$.

Se numește *sistem trifazat simetric invers* (de succesiune inversă) un ansamblu ordonat de trei mărimi sinusoidale de aceeași frecvență (e_1', e_2', e_3'), care au valori efective egale și diferențe relative de fază egale cu $\frac{2\pi}{3}$, astfel că mărimea e_1' e înaintea mărimii e_2', iar mărimea e_3' e înaintea mărimii e_2'. Valorile lor instantanee sînt deci:

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= E_1'\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_1') = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha) \\ e_2' &= E_2'\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_2') = E\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_3' &= E_3'\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_3') = E\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \quad (39.4)$$

adică:

$$E_1' = E_2' = E_3' = E; \quad \alpha_1' = \alpha;\ \alpha_2' = \alpha + \frac{2\pi}{3};\ \alpha_3' = \alpha + \frac{4\pi}{3}. \quad (39.5)$$

Se observă că mărimea e_3' e totodată defazată în urma mărimii e_1' cu $\frac{2\pi}{3}$.

Se mai observă că diferența dintre un sistem direct și un sistem invers are un caracter obiectiv numai în măsura în care ordonarea mărimilor acelor sisteme a fost efectuată în prealabil, de exemplu prin numerotarea bornelor sau a conductoarelor la care se referă aceste mărimi. De aceea, în orice problemă în care se dă un singur sistem trifazat de tensiuni electromotoare, ordonarea se poate face astfel încît sistemul să fie de succesiune directă. Așa vom proceda mereu în cele ce urmează.

39.1.2. Reprezentări simbolice Reprezentarea geometrică a mărimilor sistemului trifazat direct (39.2) conduce la trei fazori de lungimi egale, făcînd unghiuri egale cu cîte $\frac{2\pi}{3}$, astfel că fazorul $\underline{E}_2$, (respectiv $\underline{E}_3$), trebuie rotit în sens trigonometric cu $\frac{2\pi}{3}$, spre a se suprapune cu $\underline{E}_1$, respectiv $\underline{E}_2$ (v. fig. 39.3).

Reprezentarea în complex a mărimilor sistemului trifazat direct (39.2) conduce la următoarele imagini:

$$\begin{aligned} \underline{E}_1 &= E\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \underline{E} \\ \underline{E}_2 &= E\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)} = \underline{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{a}^2\,\underline{E} \\ \underline{E}_3 &= E\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)} = \underline{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{a}\,\underline{E}, \end{aligned} \qquad (39.6)$$

unde am introdus notaţia [1]

$$\boxed{\mathrm{a} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \mathrm{j}\,\frac{\sqrt{3}}{2}}\,, \qquad (39.7)$$

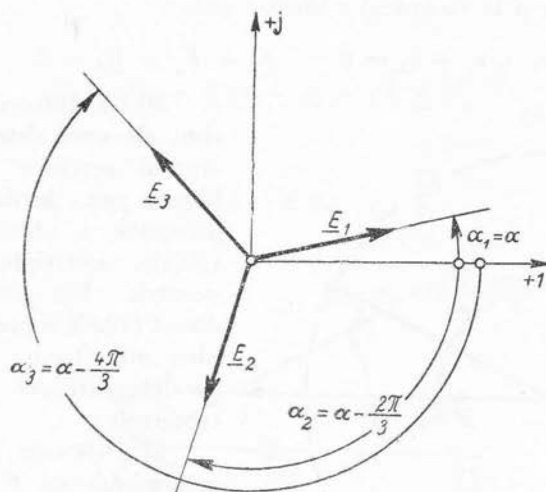


Fig. 39.3.

[1] Deşi a e un număr complex, deoarece nu reprezintă o mărime electrică sau magnetică ci numai un operator numeric de rotaţie, se obişnuieşte să nu se sublinieze $\left(\text{ca şi } \mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi/2}\right)$.

pentru operatorul de rotație cu $\frac{2\pi}{3}$ în sens direct. Se verifică ușor relațiile (în care n e un întreg arbitrar):

$$\begin{aligned} a &= a^4 = a^{-2} = a^{3n+1} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 &= a^5 = a^{-1} = a^{3n+2} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^3 &= a^6 = a^0 = a^{3n} = e^{j\cdot 0} = 1 \end{aligned} \tag{39.8}$$

și

$$\boxed{1 + a + a^2 = 0} \tag{39.9}$$

Înmulțirea cu $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ rotește un vector reprezentativ $\underline{A}$ din planul complex cu $\frac{2\pi}{3}$ în sens trigonometric direct, iar înmulțirea cu a^2 îl rotește cu $\frac{2\pi}{3}$ în sens trigonometric invers (fig. 39.4).

Se demonstrează fără dificultăți teorema: suma mărimilor unui sistem simetric (în instantaneu, ca și în complex) e identic nulă:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 0. \tag{39.10}$$

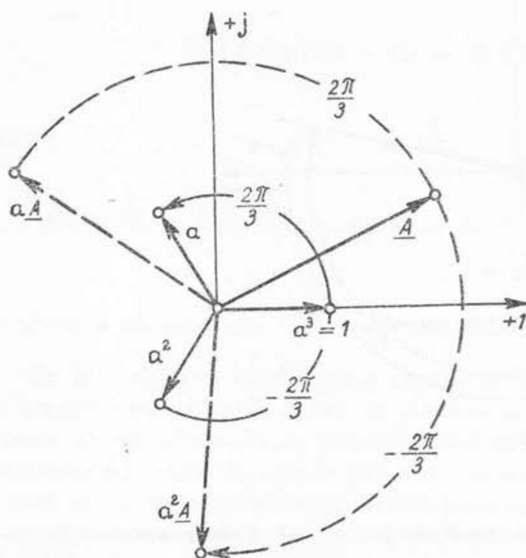


Fig. 39.4.

39.1.3. Diferența a două mărimi ale unui sistem simetric. În studiul rețelelor trifazate echilibrate se întîlnește frecvent diferența a două mărimi sinusoidale, aparținînd unui sistem simetric. Fie sistemul simetric direct (39.2), reprezentat în complex sub forma relației (39.6). Se demonstrează fără dificultăți teoremele:

a) *Diferența dintre una din mărimi (de ex. $\underline{E}_1$) și o a doua, defazată în urmă cu $\frac{2\pi}{3}$ față de ea (de ex. $\underline{E}_2$), este o mărime amplificată cu $\sqrt{3}$ și defazată cu $\frac{\pi}{6}$ înainte față de prima* (v. fig. 39.5).

În adevăr, cu relaţia (39.7),

$$1 - a^2 = \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} \tag{39.11}$$

şi deci

$$\underline{E}_1 - \underline{E}_2 = \underline{E}(1 - a^2) = \sqrt{3}\,\underline{E}\,e^{j\frac{\pi}{6}}, \tag{39.12}$$

iar

$$e_1 - e_2 = (E\sqrt{3})\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{6}\right). \tag{39.12'}$$

b) *Diferenţa dintre una din mărimi (de ex. $\underline{E}_1$) şi o a doua defazată înainte cu $\frac{2\pi}{3}$ faţă de prima (de ex. $\underline{E}_3$) este o mărime amplificată cu $\sqrt{3}$ şi defazată cu $\frac{\pi}{6}$ în urmă faţă de prima (v. fig. 39.5).*

În adevăr, cu relaţia (39.7):

$$1 - a = \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\,e^{-j\frac{\pi}{6}} \tag{39.13}$$

şi deci

$$\underline{E}_1 - \underline{E}_3 = \underline{E}(1 - a) = \sqrt{3}\,\underline{E}\,e^{-j\frac{\pi}{6}} \tag{39.14}$$

iar

$$e_1 - e_3 = (E\sqrt{3})\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{6}\right). \tag{39.14'}$$

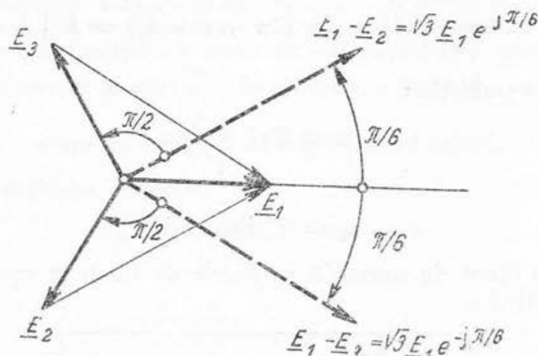


Fig. 39.5.

39.2. Producerea tensiunilor electromotoare trifazate simetrice

Producerea unui sistem simetric de tensiuni electromotoare este, în principiu, la fel de simplă ca și aceea a unei singure tensiuni electromotoare sinusoidale (v. par 22.5.3, vol. I).

Considerăm un cadru dreptunghiular (1), bobinat cu N spire, care se rotește

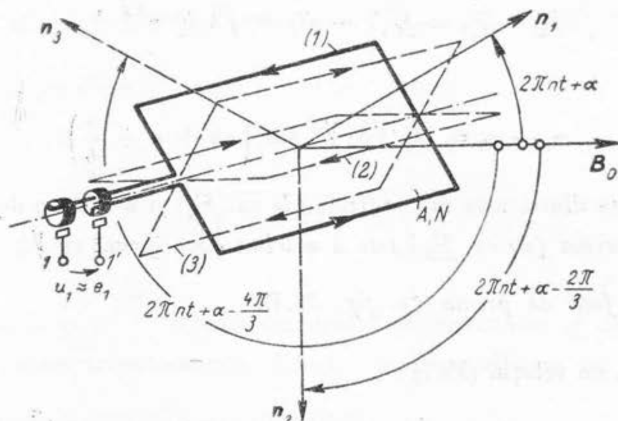


Fig. 39.6

cu turația constantă n (rot/s) în jurul unei axe paralele cu una din laturi, într-un cîmp magnetic omogen de inducție B_0, perpendicular pe axa de rotație (v. fig. 39.6, în care, pentru simplificarea desenului, s-a figurat o singură spiră). Dacă $2\pi nt + \alpha$ e unghiul făcut de normala $\mathbf{n}_1$ pe planul unei spire, iar A e aria acesteia, fluxul magnetic instantaneu prin cele N spire ale cadrului este:

$$\Phi_1 = N A B_0 \cos (2\pi n t + \alpha),$$

iar tensiunea electromotoare instantanee indusă în cadru este:

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = 2\pi n\ NAB_0 \sin (2\pi\ nt + \alpha_1) = E\sqrt{2} \sin (\omega t + \alpha).$$

Această t.e.m. are pulsația:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n, \tag{39.15}$$

faza inițială:

$$\alpha = \alpha_1 = \sphericalangle (\mathbf{n}_1, \mathbf{B}_0)/_{t=0} \tag{39.16}$$

(egală cu unghiul făcut de normală cu liniile de cîmp în momentul $t = 0$) și are valoarea efectivă:

$$\boxed{E = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \Phi_{fo} = 4{,}44 f N \Phi_{fo}}, \tag{39.17}$$

în care $\Phi_{f_0} = AB_0$ e valoarea maximă a fluxului fascicular al unei spire. Tensiunea electromotoare e_1 poate alimenta un circuit exterior prin două perii (1, 1') în contact cu inele colectoare, fixate pe axul de rotaţie şi conectate la capetele înfăşurării cadrului.

Dacă acum se fixează pe acelaşi ax încă două cadre identice, (2) şi (3), cu planurile decalate succesiv cu cîte $2\pi/3$ (schiţate în fig. 39.6 cu linii întrerupte), fluxurile instantanee corespunzătoare vor diferi numai datorită faptului că unghiurile făcute de normalele la planurile respective, cu direcţia liniilor de cîmp în momentul $t = 0$, vor fi:

$$\alpha_2 = \alpha - \frac{2\pi}{3} \text{ şi } \alpha_3 = \alpha - \frac{4\pi}{3}. \tag{39.18}$$

Se vor obţine astfel pentru tensiunile electromotoare induse în cele trei cadre expresiile

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= E\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha) \\ e_2 &= E\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \\ e_3 &= E\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{39.19}$$

cu E dat de relaţia (39.17), cu ω dat de relaţia (39.15) şi cu α dat de relaţia (39.16). Se constată că aceste tensiuni electromotoare formează un sistem trifazat simetric direct.

Generatoarele sincrone de curent alternativ trifazat se construiesc după acest principiu, cu următoarele deosebiri mai importante (v. reprezentarea schematică din fig. 39.7): pentru a obţine inducţii magnetice intense, maşina e constituită dintr-un rotor şi un stator din material feromagnetic, prin care se închide fluxul magnetic, cu un întrefier foarte redus, necesar pentru a asigura mobilitatea lor relativă; cele trei înfăşurări (corespunzătoare celor trei cadre) sînt imobile, cu conductoarele active (longitudinale) îngropate în crestături dispuse la faţa dinspre întrefier a statorului; cîmpul magnetic este un cîmp învîrtitor, produs de un electromagnet învîrtitor (rotorul), care mătură succesiv cele trei înfăşurări. Rotorul poate avea polii aparenţi (ca în fig. 39.7) sau îngropaţi. Înfăşurarea de magnetizare de curent continuu a rotorului, numită înfăşurare de excitaţie, nu a fost figurată în desen. Adesea, rotorul are un număr de $2p$ poli alternaţi, în care caz şi înfăşurările statorului sînt dispuse în p grupe de cîte trei bobine succesive, cu decalaje spaţiale de cîte $\frac{2\pi}{3p}$. În acest caz, o perioadă a tensiunii electromotoare induse corespunde la o rotaţie cu numai $\frac{2\pi}{p}$ a rotorului, *adică pulsaţia t.e.m. induse e de p ori mai mare ca viteza unghiului de rotaţie*:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi p n \tag{39.20}$$

sau

$$n = \frac{f}{p}. \tag{39.21}$$

În afară de aceasta, dacă spirele unei bobine de fază ar fi suprapuse în aceeaşi pereche de crestături, la o rotaţie completă a rotorului, fluxul prin bobina considerată ar avea o variaţie prea

depărtată de cea sinusoidală. De aceea, înfășurarea se execută repartizat, ceea ce afectează și coeficientul numeric al expresiei valorii efective (39.17) a t.e.m.

Din cele arătate rezultă că sistemele trifazate simetrice de tensiuni electromotoare se produc prin simpla așezare decalată în spațiu (cu decalaje de $\frac{2\pi}{3p}$ la mașini cu p perechi de poli)

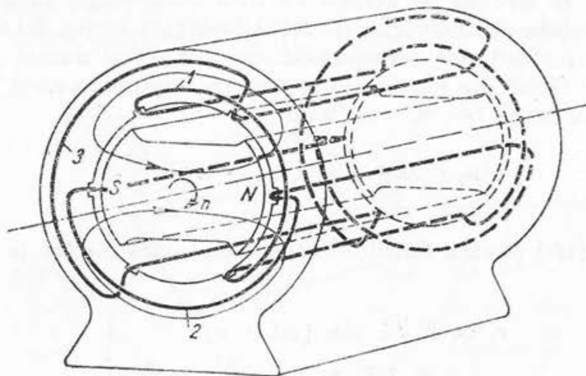


Fig. 39.7.

a trei înfășurări induse, care se găsesc în rotație relativă față de un cîmp magnetic inductor și sînt în rest identice cu înfășurarea necesară unui generator de curent alternativ monofazat.

39.3. Conexiunile sistemelor trifazate

Considerăm un sistem de trei linii monofazate independente (fig. 39.8, *a*), alimentate cu tensiunile electromotoare e_1, e_2, e_3 simetrice (39.19) și avînd impedanțe (totale) egale,

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = Z\,e^{j\varphi} \tag{39.22}$$

Curenții i_1, i_2, i_3 ai celor trei circuite vor avea aceleași valori efective:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I = \frac{E}{Z} \tag{39.23}$$

și aceleași defazaje față de t.e.m. corespunzătoare:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi, \tag{39.24}$$

adică vor forma un sistem simetric:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) = \frac{E}{Z}\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha - \varphi) \\ i_2 &= I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{E}{Z}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3 &= I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma - \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{E}{Z}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{39.25}$$

Dacă t.e.m. au valorile efective maxime compatibile cu izolaţia liniilor $E = U_{nom}$, dacă intensităţile au valorile efective maxime compatibile cu încălzirea conductoarelor şi dacă factorul de putere e maxim ($\cos \varphi = 1$), cele trei linii monofazate (cu 6 conductoare) vor putea transmite puterea maximă:

$$P_{nom} = 3\ U_{nom} I_{nom}, \quad (39.26)$$

adică puterea maximă pe conductor $P_{nom}/6$ va fi egală cu cea dată de relaţia (39.1).

39.3.1. **Conexiunea în stea.** Din cele trei reţele monofazate se poate obţine o reţea trifazată şi se poate reduce numărul de conductoare necesare transmisiunii puterii, dacă se leagă împreună bornele 1', 2', 3' ale generatoarelor, formînd un punct *O*, numit neutrul [1] generatorului, respectiv bornele 1', 2', 3' ale receptoarelor, formînd un punct *N* numit neutrul [1] receptorului (fig. 39.8,*b*). Cele trei conductoare „de întoarcere" ale celor trei linii pot fi contopite într-un conductor unic *NO*, numit *conductorul neutru*. Se obţine astfel o reţea trifazată *cu conexiune în stea* atît la generator cît şi la sarcină.

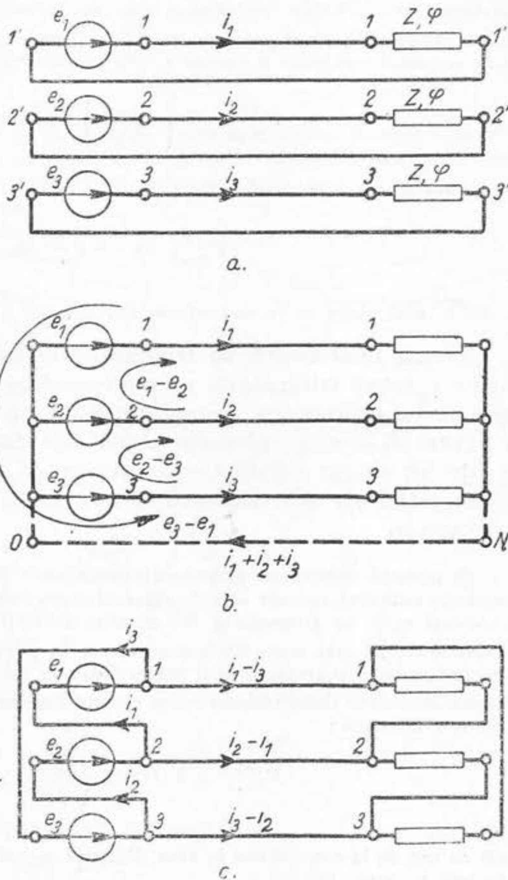


Fig. 39.8.

Conductorul neutru va fi străbătut de suma curenţilor din celelalte trei conductoare (cum rezultă din prima teoremă a lui Kirchhoff aplicată punctului *O* sau *N*). Ori, această sumă e nulă:

$$i_N = i_1 + i_2 + i_3 = 0, \quad (39.27)$$

deoarece sistemul (39.25) e simetric. De aceea, conductorul neutru poate fi suprimat, fără ca să se modifice repartiţia curenţilor şi a potenţialelor din reţea. Conexiunea trifazată în stea permite deci transmisiunea puterii (39.26) cu numai trei conductoare în loc de şase.

[1] În loc de neutru se mai spune *nul*, deoarece un astfel de punct se ia de obicei ca punct de potenţial nul (originea potenţialelor).

Economia realizată nu este întotdeauna atît de mare, deoarece între două conductoare ale liniei trifazate obținute există acum o tensiune practic egală cu diferența a două t.e.m. de fază, diferență a cărei valoare efectivă e cu $\sqrt{3}$ mai mare decît a acestora (v. rel. 39.12). Dacă transmisiunea se efectuează la tensiune înaltă, izolația liniei trifazate obținute trebuie să fie mai rezistentă decît a liniilor monofazate din care provine. Dacă se menține aceeași izolație, se pot utiliza tensiuni de fază maxime cu $\sqrt{3}$ mai mici decît în cazul celor trei sisteme monofazate, adică se poate transmite o putere activă maximă:

$$P^{(3)}_{max} = 3\left(\frac{U_{nom}}{\sqrt{3}}\right) I_{nom} = \sqrt{3}\ U_{nom} I_{nom} \tag{39.28}$$

și o *putere specifică pe conductor*:

$$P^{(3)}_{cond} = \frac{1}{3} P^{(3)}_{nom} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{nom} I_{nom} \tag{39.29}$$

cu $2/\sqrt{3}$ mai mare ca în monofazat (v. 39.1).

39.3.2. Conexiunea în triunghi. Din cele trei rețele monofazate se poate obține o rețea trifazată și se poate reduce numărul de conductoare necesare, dacă se leagă succesiv bornele generatoarelor, respectiv ale receptoarelor, ca în figura 39.8, *c*, grupîndu-se două cîte două conductoarele liniei și înlocuind cu cîte un singur conductor fiecare grupă de două conductoare în paralel. Se obține astfel o rețea trifazată cu conexiune în triunghi atît la generator cît și la receptor.

Și această conexiune permite transmisiunea puterii (39.26) cu numai trei conductoare. Economia realizată nu este atît de mare, deoarece conductoarele liniei vor fi acum străbătute de curenți egali cu diferența a doi curenți debitați de generatoare, diferență a cărei valoare efectivă e cu $\sqrt{3}$ mai mare decît a acestora. În condiții de încălzire egală, conductoarele liniei ar trebui să aibă o secțiune mai mare. Dacă se mențin aceleași conductoare, pentru ca să se păstreze încălzirea liniei trebuie redus curentul generatoarelor cu $\sqrt{3}$, adică se poate transmite o putere maximă:

$$P^{(3)}_{nom} = 3\ U_{nom}\left(\frac{I_{nom}}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\ U_{nom} I_{nom} \tag{39.30}$$

egală cu cea de la conexiunea în stea. Puterea specifică pe conductor este deci aceeași ca la conexiunea în stea (39.29).

Adesea se folosesc ambele tipuri de conexiune, și anume steaua la generatoare și triunghiul la receptoare, sau invers. În cele ce urmează vom face abstracție de conexiunea generatorului, deoarece vom presupune că acesta e capabil să producă anumite tensiuni la borne date. E important însă dacă generatorul are sau nu un punct neutru O, accesibil receptorului (în primul caz generatorul are neapărat conexiunea în stea).

Observații: a) În terminologia curentă a rețelelor trifazate se numește *fază* — nu numai argumentul sinusului din expresia unei mărimi sinusoidale (tensiune, curent etc.) — ci și *ansamblul elementelor de circuit* (generator, conductor, receptor etc.), parcurs de unul dintre curenții unui sistem trifazat.

b) Se numește *tensiune stelată* sau *tensiune simplă* tensiunea dintre o bornă a unei faze și un punct neutru. Se numește *tensiune compusă* sau *tensiune dintre faze* tensiunea dintre două borne sau conductoare de fază (în cazul analizat mai sus, cu $\sqrt{3}$ mai mare ca prima).

Tensiunea compusă mai e numită *tensiune de linie*, deoarece e stabilită şi între conductoarele liniei, iar tensiunea simplă mai e numită *tensiune de fază*, dacă conexiunea e în stea (această ultimă denumire nu trebuie utilizată la conexiunea în triunghi, decît precizînd despre a cui fază e vorba : a receptorului, a generatorului etc.).

39.4. Cîmpuri magnetice învîrtitoare

În legătură cu avantajele amintite la început ale reţelelor trifazate arătăm cum se pot produce — cu ajutorul unei sistem trifazat simetric de curenţi — cîmpuri magnetice învîrtitoare, extrem de importante pentru funcţionarea maşinilor electrice.

Se deosebesc două tipuri principale de cîmpuri magnetice învîrtitoare : cu vector-cîmp învîrtitor sau cu repartiţie spaţială învîrtitoare.

39.4.1. **Cîmp magnetic cu vector-cîmp învîrtitor.** Fie trei spire plate dreptunghiulare identice, ale căror plane formează unghiuri de $2\pi/3$ — dispuse deci analog celor trei cadre ale generatorului din figura 39.6, dar fixe (fig. 39.9). Dacă i_1, i_2, i_3 sînt curenţii din cele trei spire, inducţia magnetică $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$ a fiecăreia dintre ele e în fiecare moment proporţională cu intensitatea curentului care îl produce (aşa cum rezultă din teorema suprapoziţiei cîmpurilor magnetice — v. par. 25.1, vol. I). Într-un punct O de pe axa de simetrie a sistemului de spire identice (dreapta de intersecţie a planelor lor), constanta de proporţionalitate K e aceeaşi pentru toate spirele — şi vectorii inducţie magnetică ai celor trei spire, cu orientări fixe, corespunzătoare vectorilor $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ normali pe planul spirelor, sînt :

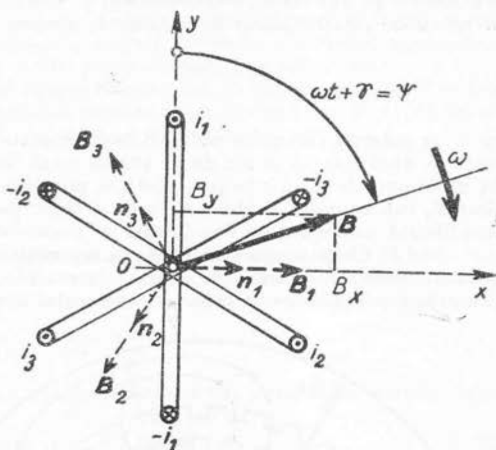


Fig. 39.9.

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{n}_1 K i_1; \qquad \mathbf{B}_2 = \mathbf{n}_2 K i_2; \qquad \mathbf{B}_3 = \mathbf{n}_3 K i_3. \tag{39.31}$$

Cîmpul magnetic rezultant într-un punct de pe ax

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = K(\mathbf{n}_1 i_1 + \mathbf{n}_2 i_2 + \mathbf{n}_3 i_3) \tag{39.32}$$

are proiecţiile pe axele Ox, Oy (alese ca în fig. 39.9),

$$\left.\begin{aligned} B_x &= K\left(i_1 + i_2 \cos\frac{4\pi}{3} + i_3 \cos\frac{2\pi}{3}\right) = K\left(i_1 - \frac{i_2 + i_3}{2}\right) \\ B_y &= K\left(i_1 \cos\frac{\pi}{2} + i_2 \cos\frac{5\pi}{6} + i_3 \cos\frac{\pi}{6}\right) = K\frac{\sqrt{3}}{2}\,(i_3 - i_2) \end{aligned}\right\}. \tag{39.33}$$

Să presupunem acum că aceste trei spire — dispuse în spaţiu cu decalaje succesive de $2\pi/3$ — sînt alimentate cu trei curenţi i_1, i_2, i_3, formînd un sistem simetric direct, adică avînd expresiile (39.25) — cu defazaje succesive în timp de cîte o treime de perioadă şi cu valori efective egale. În acest caz (v. şi rel. 39.14′) :

$$\begin{aligned} i_2 + i_3 &= -\,i_1 = -\,I\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \gamma) \\ i_3 - i_2 &= (\sqrt{3}\,I)\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma - \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\,I\sqrt{2}\cos(\omega t + \gamma) \end{aligned} \tag{39.34}$$

și proiecțiile cîmpului magnetic dintr-un punct de pe axă (39.33) devin:

$$\left.\begin{aligned} B_x &= K\frac{3}{2}\,I\sqrt{2}\,\sin\,(\omega t+\gamma)\\ B_y &= K\frac{3}{2}\,I\sqrt{2}\,\cos\,(\omega t+\gamma)\end{aligned}\right\}. \qquad (39.35)$$

Vectorul **B**, care are aceste proiecții, are modulul constant în timp

$$B=\sqrt{B_x^2+B_y^2}=\frac{3}{2}KI\sqrt{2} \qquad (39.36)$$

și formează cu axa Ox un unghi variabil $\psi=\omega t+\gamma$ funcțiune liniară de timp, adică se rotește în sensul de rotație definit de ordinea de așezare a spirelor ($\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$), cu viteza unghiulară:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\omega, \qquad (39.37)$$

egală cu pulsația curenților trifazați care alimentează bobinele. Dacă această pulsație nu e prea mare, și dacă într-un punct de pe axă se așază un mic ac magnetic de moment **m**, căruia i se dă un impuls de rotație inițial, acul „se prinde în sincronism" și se rotește o dată cu vectorul cîmp **B**, sub acțiunea cuplului $\mathbf{C}=\mathbf{m}\times\mathbf{B}$ (v. par. 18.1, vol. I). Acesta este în forma cea mai simplificată principiul de funcționare al *motorului electric sincron.*

39.4.2. **Cîmp magnetic radial cu repartiție spațială învîrtitoare.** În mașinile electrice, conductoarele înfășurărilor de curent alternativ sînt dispuse în crestături longitudinale, practicate în fețele dinspre întrefier ale statorului sau rotorului. Conductoarele unei aceleiași faze sînt străbătute toate de același curent și dacă se parcurge întrefierul, ocolind rotorul într-un plan transversal (v. fig. 39.10), se întîlnesc (pentru o aceeași fază) grupuri de conductoare „de ducere" (cu un anumit sens de referință al curentului), dispuse în crestături alăturate și grupuri de conductoare „de întoarcere" (cu sens de referință opus), care împreună cu primele asigură constituirea spirelor înfășurării. Pe întreaga periferie a mașinii, această alternare a unor conductoare de ducere și de întoarcere (pe aceeași fază) se poate întîlni de p ori, p fiind numărul de perechi de poli ai înfășurării (respectiv ai mașinii). În figura 39.10 e reprezentată o secțiune transversală printr-o mașină trifazată cu o înfășurare rotorică, avînd $p=2$ perechi de poli și cîte trei crestături pe pol și fază. Pentru simplificarea desenului s-au reprezentat numai conductoarele fazei 1 și numai cîte un conductor pe crestătură. Dacă înfășurarea unei faze e străbătută de curentul respectiv, se produce un cîmp magnetic cu linii închise prin fierul statorului,

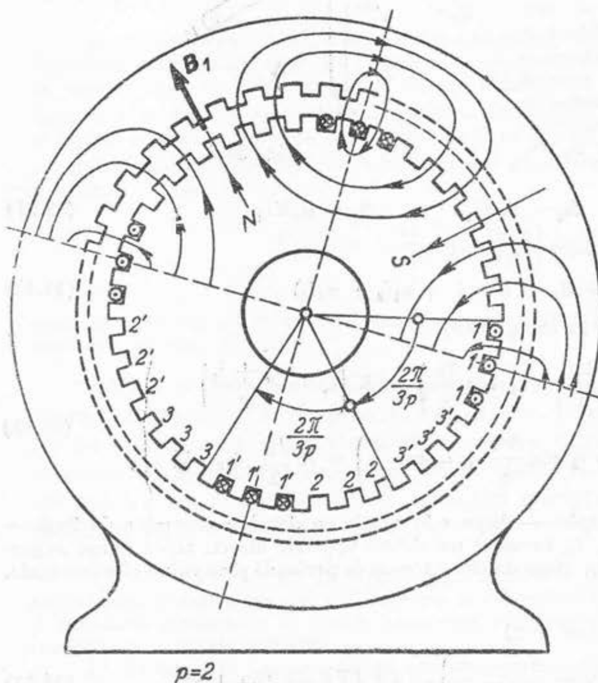


Fig. 39.10.

prin fierul rotorului şi prin întrefier. Aceste linii înlănţuie (după regula burghiului drept) grupurile de conductoare de ducere, respectiv de întoarcere. În figura 39.10 sînt reprezentate simplificat liniile cîmpului de inducţie magnetică produs de curentul i_1 al fazei 1. Datorită permeabilităţii foarte mari a fierului, liniile de cîmp din întrefier sînt practic perpendiculare pe faţa acestuia, adică sînt radiale. Cîmpul din întrefier e mai intens în dreptul dinţilor şi mai slab în dreptul crestăturii, lungimea de întrefier a liniilor de cîmp corespunzătoare fiind diferită: mai mică în dreptul dinţilor şi mai mare în dreptul crestăturilor. În cele ce urmează vom neglija această structură de detaliu a cîmpului magnetic din întrefier şi vom ţine seama numai de valoarea medie a lui pe un interval dinte + crestătură. Variaţia acestui cîmp radial în lungul întrefierului — în funcţiune de unghiul α din planul transversal — este periodică, cu perioada unghiulară $2\pi/p = 2\tau$. Maximele acestei variaţii corespund polilor nord (N) ai rotorului, iar minimele, polilor sud (S), distanţa dintre doi poli succesivi fiind pasul polar $\tau = \pi/p$. Axele de simetrie ale secţiunii transversale a maşinii, care trec prin dreptul punctelor din întrefier unde cîmpul se anulează, se numesc axe neutre, şi au fost figurate cu linii întrerupte în figura 39.10. Conductoarele înfăşurării fazei a doua, respectiv a treia (nereprezentate în desen), sînt dispuse analog celor ale fazei întîi, cu un decalaj spaţial (unghiular) egal cu $2\pi/3p$ (în sens orar în fig. 39.10). În figura 39.11, *a* e prezentată o singură perioadă a cîmpului magnetic al înfăşurării statorice a unei singure faze (cu $p = 6$ şi patru crestături pe pol şi fază).
Determinarea repartiţiei spaţiale a cîmpului în lungul întrefierului de grosime (medie) δ se face observînd că ori de cîte ori se întîlneşte un conductor parcurs de un curent i (fig. 39.11, *b*), intensitatea cîmpului magnetic are o creştere ΔH, cu valoarea absolută:

$$|\Delta H| \approx \frac{i}{\delta} \tag{39.38}$$

şi cu sensul dedus din sensul curentului, după regula burghiului drept. În adevăr, în fierul statoric şi rotoric (presupus nesaturat) $H \approx 0$, deoarece $\mu \approx \infty$, şi aplicînd legea circuitului magnetic unei curbe de forma unui dreptunghi care înlănţuie conductorul considerat, rezultă:

$$(H + \Delta\ H)\delta - H\delta = i,$$

adică relaţia (39.38). Creşterea corespunzătoare a inducţiei magnetice radiale din întrefier este:

$$\Delta B = \mu_0 \Delta H| = \pm \frac{\mu_0}{\delta} i. \tag{39.39}$$

Curba care indică repartiţia spaţială a inducţiei magnetice în întrefier se obţine pornind de la axa neutră (punctul O) într-un sens ales pentru variabila unghiulară α şi adăugînd creşterea (39.39) ori de cîte ori se trece prin dreptul unui conductor de curent i (cu sensul asociat în mod corespunzător sensului curentului). Pentru cîmpul magnetic al înfăşurării fazei întîi parcursă de curentul $i_1 = I\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \gamma)$ se obţine o expresie de forma:

$$B_1(\alpha, t) = K\, i_1(t)\, \Theta_s(\alpha), \tag{39.40}$$

în care $\Theta_s(\alpha)$ e funcţiunea de repartiţie spaţială, periodică, în trepte, reprezentată cu linii pline în figura 39—11,*c* (în care s-a luat linia de referinţă $B = 0$ la periferia rotorului). În primă aproximaţie, această repartiţie spaţială periodică poate fi aproximată cu o sinusoidă de aceeaşi perioadă (de ex. unda fundamentală de la dezvoltarea ei în serie Fourier), reprezentată în linii întrerupte în figura 39.11,*c*. Se obţine astfel expresia aproximativă:

$$B_1(\alpha, t) \approx K\, I\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \gamma) \sin p\alpha = B_0 \sin(\omega t + \gamma) \sin p\alpha \tag{39.41}$$

pentru inducţia magnetică din întrefier a fazei întîi. Expresia aceasta reprezintă un cîmp de vectori radial, alternativ, cu repartiţie unghiulară sinusoidală şi invariabilă: în toate punctele din întrefier, vectorii cîmp sînt în fază, fiind permanent nuli în dreptul axelor neutre (noduri) şi avînd maximele şi minimele în dreptul axelor polilor (ventre), în totală analogie cu undele staţionare.

Dacă se exprimă acum inducţia magnetică din intrefier a fazei a doua, respectiv a treia, se obţin expresii similare cu relaţia (39.41). Deoarece înfăşurările fazelor sînt prin ipoteză identice şi sînt parcurse de curenţi trifazaţi simetrici, valoarea maximă $B_0 = K\, I\sqrt{2}$ rămîne aceeaşi;

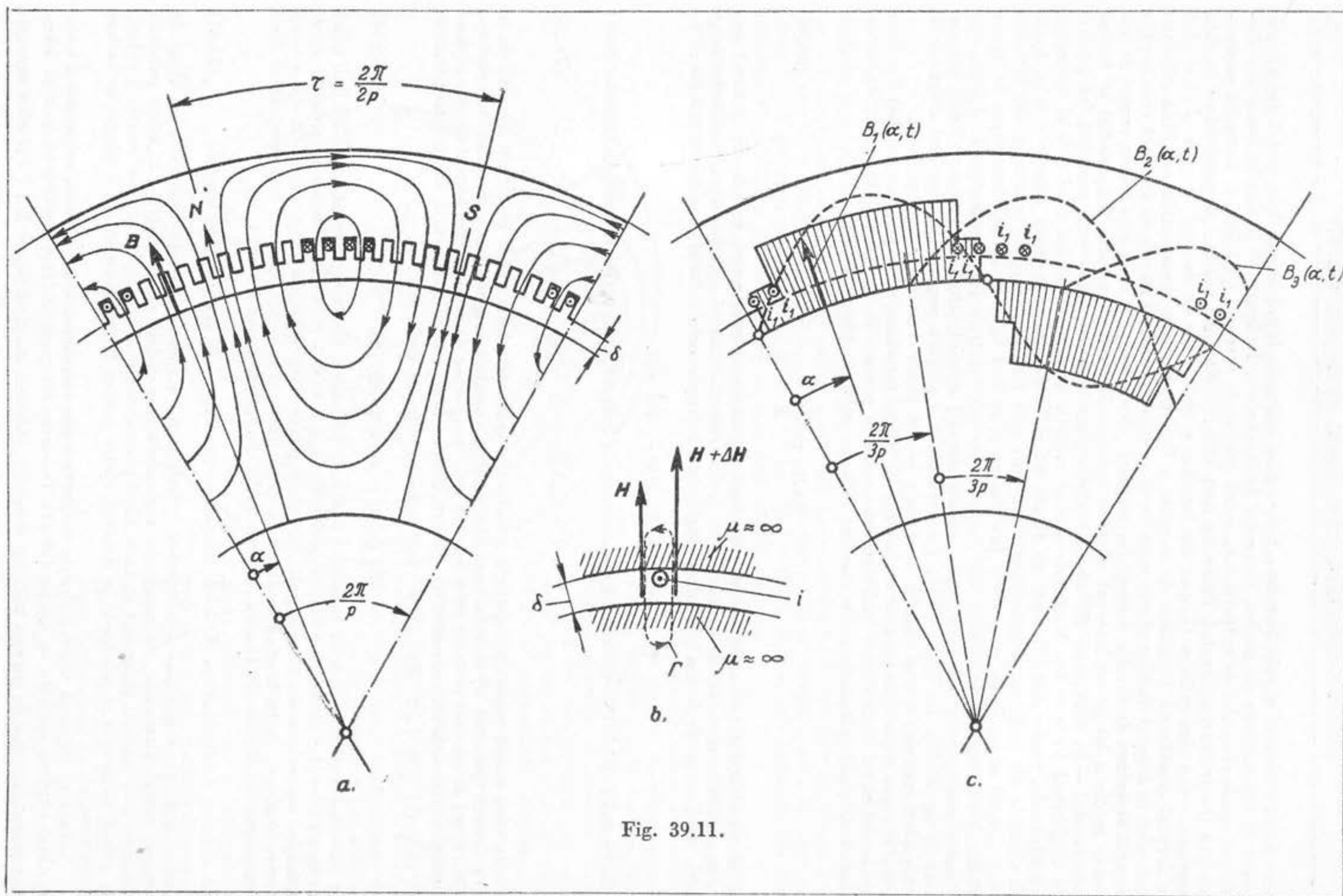


Fig. 39.11.

deoarece curenţii $i_2(t)$, respectiv $i_3(t)$, sînt defazaţi în urma curentului $i_1(t)$ cu $\frac{2\pi}{3}$, respectiv $\frac{4\pi}{3}$, fazele iniţiale ale factorului temporal se vor modifica corespunzător; deoarece înfăşurările acestor faze sînt decalate spaţial (de ex. în sensul α crescător, ca în fig. 39.10 şi 39.11) cu $\frac{2\pi}{3p}$, respectiv $\frac{4\pi}{3p}$, sinusoida repartiţiei spaţiale din relaţia (39.41) se înlocuieşte cu una decalată corespunzător. Se obţin astfel expresiile:

$$B_2(\alpha, t) \approx B_0 \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(p\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{39.42}$$

$$B_3(\alpha, t) \approx B_0 \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(p\alpha - \frac{4\pi}{3}\right). \tag{39.43}$$

Dacă admitem acum că toate înfăşurările sînt parcurse concomitent de curenţii i_1, i_2, i_3 ai unui sistem trifazat şi neglijăm neliniarităţile (determinate de saturaţia fierului), inducţia magnetică rezultantă din întrefier va fi suma inducţiilor produse de fiecare dintre înfăşurările celor trei faze

$$B(\alpha, t) \approx B_1(\alpha, t) + B_2(\alpha, t) + B_3(\alpha, t). \tag{39.44}$$

Expresiile acestora se mai pot transforma cu identitatea:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right]$$

şi devin:

$$\left.\begin{aligned} B_1(\alpha, t) &= \frac{B_0}{2}\cos(\omega t - p\alpha + \gamma) - \frac{B_0}{2}\cos(\omega t + p\alpha + \gamma) \\ B_2(\alpha, t) &= \frac{B_0}{2}\cos(\omega t - p\alpha + \gamma) - \frac{B_0}{2}\cos\left(\omega t + p\alpha + \gamma - \frac{4\pi}{3}\right) \\ B_3(\alpha, t) &= \frac{B_0}{2}\cos(\omega t - p\alpha + \gamma) - \frac{B_0}{2}\cos\left(\omega t + p\alpha + \gamma - \frac{8\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{39.45}$$

Dacă adunăm aceste expresii, termenii secunzi au o contribuţie nulă, deoarece alcătuiesc un sistem trifazat simetric de mărimi sinusoidale, iar termenii primi sînt identici, aşa că

$$B(\alpha, t) = \frac{3}{2} B_0 \cos(\omega t - p\alpha + \gamma). \tag{39.46}$$

Inducţia magnetică rezultantă nu mai reprezintă o undă staţionară, ci o undă progresivă: repartiţia spaţială sinusoidală

$$\cos(-p\alpha + \omega t + \gamma) = \sin\left[p\alpha - \left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

are o „fază iniţială" $\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}$ funcţiune liniară de timp, adică se deplasează la periferia maşinii, în lungul întrefierului, cu o viteză unghiulară de rotaţie Ω_0 constantă. Aceasta e viteza unui sistem de referinţă mobil, în raport cu care inducţia din întrefier apare ca o repartiţie spaţială invariabilă

$$\omega t - p\alpha + \gamma = \text{const.}$$

Prin derivare rezultă viteza unghiulară de rotaţie:

$$\Omega_0 = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega}{p} = \frac{2\pi f}{p}, \tag{39.47}$$

respectiv turația :

$$\boxed{n_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{f}{p}}, \tag{39.48}$$

numită *turație de sincronism*. Expresia (39.47) reprezintă deci un cîmp de vectori radial cu repartiție spațială învîrtitoare. Un asemenea cîmp magnetic se poate produce de înfășurarea trifazată cu $2p$ poli a unei mașini, adică de un sistem de trei înfășurări decalate în spațiu cu cîte $\frac{2\pi}{3p}$ și parcurse de curenți defazați în timp cu cîte $\frac{2\pi}{3}$. Dacă un astfel de cîmp învîrtitor e produs de stator și „mătură", în deplasarea lui, conductoarele unei înfășurări trifazate, fixate de rotor, în această înfășurare rotorică se induc curenți, și asupra ei se exercită forțe, care, în conformitate cu regula lui Lenz, antrenează rotorul în sensul de rotație al cîmpului învîrtitor. Viteza de rotație Ω a rotorului e totdeauna diferită de viteza Ω_0 a cîmpului învîrtitor, deoarece numai astfel există o deplasare relativă a cîmpului învîrtitor față de rotor și se produce fenomenul de inducție electromagnetică (dacă $\Omega = \Omega_0$, cîmpul ar fi invariabil în raport cu rotorul). Acesta este în forma cea mai simplificată principiul de funcționare al *motorului electric asincron.*

40. REZOLVAREA REȚELELOR TRIFAZATE ECHILIBRATE, SUB TENSIUNI LA BORNE SIMETRICE

Se numește *receptor trifazat echilibrat* un receptor trifazat care admite o schemă echivalentă în stea, cu impedanțe complexe egale în cele trei ramuri ale stelei. Receptorul poate avea numai cele trei borne de fază (1, 2, 3), în care caz linia de alimentare nu are fir neutru; sau poate avea și o a patra bornă (N) — nodul comun laturilor stelei echivalente, numit *punctul neutru al receptorului* — în care caz linia de alimentare poate avea fir neutru. Un receptor cu conexiune în triunghi și impedanțe complexe egale $\underline{Z}_\Delta$, în laturile triunghiului, e de asemenea echilibrat, deoarece, în baza teoremei transfigurării (38.30), admite schema echivalentă în stea cu impedanțele egale

$$\underline{Z}_\lambda = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3}. \tag{40.1}$$

În cele ce urmează vom studia diferite tipuri fundamentale de receptoare echilibrate, cărora rețeaua de alimentare le aplică la borne un sistem simetric de tensiuni, presupuse cunoscute. Vom nota cu

U_f — valoarea efectivă a tensiunilor simple (stelate, de fază) ale rețelei;
U_l — valoarea efectivă a tensiunilor compuse (dintre faze) ale rețelei;
U_r — valoarea efectivă a tensiunilor aplicate fazelor receptorului;
I_l — valoarea efectivă a curenților din conductoarele liniei;
I_r — valoarea efectivă a curenților din fazele receptorului.

Cele trei borne de fază vor fi notate cu 1, 2, 3. În practică se mai utilizează notațiile (U, V, W), (R, S, T), (a, b, c) etc.

40.1. Receptoare trifazate echilibrate în stea

40.1.1 Receptor în stea cu fir neutru (fig. 40.1). Se dau tensiunile simple (stelate) ale rețelei de alimentare:

$$\underline{U}_{10} = U_f \; ; \quad \underline{U}_{20} = \mathrm{a}^2 \underline{U}_{10} = U_f \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} \; ; \quad \underline{U}_{30} = \mathrm{a}\, \underline{U}_{10} = U_f \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} \qquad (40.2)$$

(tensiunea fazei întîi fiind aleasă origine de fază) — și impedanțele egale ale fazelor receptorului (necuplate inductiv între ele)

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}, \qquad (40.3)$$

respectiv impedanța firului neutru

$$\underline{Z}_N = Z_N\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_N}. \qquad (40.4)$$

Dacă impedanțele (în serie) ale liniei de alimentare nu pot fi neglijate, se consideră incluse în valorile (40.3). Conductoarele liniei de alimentare fiind în serie cu laturile stelei, curenții de linie sînt identici cu aceia din fazele receptorului:

$$\underline{I}_1 = I_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma_1} \; ; \quad \underline{I}_2 = I_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma_2} \; ;$$
$$\underline{I}_3 = I_3 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma_3}. \qquad (40.5)$$

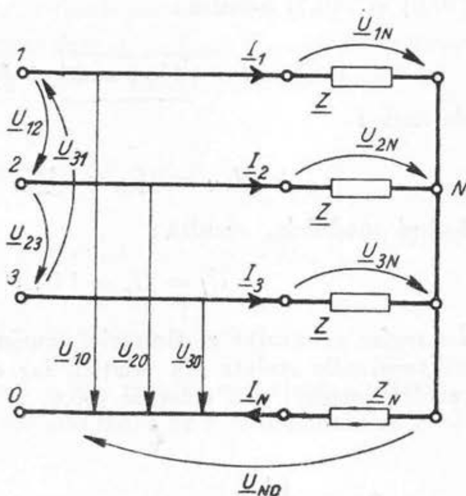


Fig. 40.1.

Calculul curenților. Acești curenți se pot exprima imediat în funcție de tensiunile stelate ale receptorului $\underline{U}_{1N}$, $\underline{U}_{2N}$, $\underline{U}_{3N}$, care, la rîndul lor, sînt egale cu diferențele dintre tensiunile stelate ale rețelei și tensiunea $\underline{U}_{NO}$ a neutrului receptorului față de neutrul rețelei:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{1O} - \underline{U}_{NO}}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{2O} - \underline{U}_{NO}}{\underline{Z}};$$
$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{3O} - \underline{U}_{NO}}{\underline{Z}}. \qquad (40.6)$$

Conform primei teoreme a lui Kirchhoff, aplicată punctului neutru N, curentul din firul neutru este:

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{NO}}{\underline{Z}_N} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3. \qquad (40.7)$$

Cele patru relații (40.6, 40.7), cu necunoscutele $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ și $\underline{U}_{NO}$, rezolvă complet problema.Demonstrăm mai întîi că tensiunea neutrului $\underline{U}_{NO}$ și curentul $\underline{I}_N$ din firul neutru sînt nule în acest regim echilibrat și simetric. În acest scop, înlocuim în relația (40.7) valorile (40.6) ale curenților și obținem egalitatea:

$$(\underline{U}_{1O} + \underline{U}_{2O} + \underline{U}_{3O})\frac{1}{\underline{Z}} = \underline{U}_{NO}\left[\frac{3}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}_N}\right], \qquad (40.8)$$

deoarece

$$\underline{U}_{1O} + \underline{U}_{2O} + \underline{U}_{3O} = 0, \tag{40.9}$$

sistemul tensiunilor simple ale rețelei fiind simetric. Paranteza dreaptă din relația (40.8) nu poate fi nulă, din cauză că în rețele disipative părțile reale ale impedanțelor și admitanțelor sînt pozitive și nenule. De aceea, din relațiile (40.8) și (40.7) rezultă:

$$\boxed{\underline{U}_{NO} = 0} \text{ și } \underline{I}_N = \underline{U}_{NO}/\underline{Z}_N = 0, \tag{40.10}$$

de unde:

$$\underline{U}_{1N} = \underline{U}_{1O} \;;\; \underline{U}_{2N} = \underline{U}_{2O} \;;\; \underline{U}_{3N} = \underline{U}_{3O}. \tag{40.11}$$

Luînd modulele, rezultă:

$$U_f = U_r = |\underline{U}_{1N}| = |\underline{U}_{2N}| = |\underline{U}_{3N}|. \tag{40.12}$$

În regim echilibrat și simetric, tensiunile stelate ale receptorului sînt egale cu tensiunile stelate ale relației, iar curentul firului neutru e nul. Curenții rezultă imediat din relațiile (40.6) și (40.10):

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1O}}{\underline{Z}} = \frac{U_f}{Z}\,e^{-j\varphi}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{2O}}{\underline{Z}} = \frac{U_f}{Z}\,e^{-j\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)} = a^2\underline{I}_1 \tag{40.13}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{3O}}{\underline{Z}} = \frac{U_f}{Z}\,e^{-j\left(\varphi+\frac{4\pi}{3}\right)} = a\underline{I}_1$$

Fig. 40.2.

și formează un sistem simetric direct ca și tensiunile, avînd valorile efective egale:

$$|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = \boxed{I_r = \frac{U_f}{Z}} \tag{40.14}$$

și fiind defazate cu argumentul φ al impedanțelor față de tensiunile stelate corespunzătoare: $\underline{I}_1$ față de $\underline{U}_{10}$, $\underline{I}_2$ față de $\underline{U}_{20}$, $\underline{I}_3$ față de $\underline{U}_{30}$. În figura 40.2 sînt reprezentați fazorii tensiunilor și curenților.

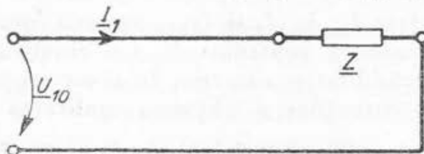


Fig. 40.3.

Concluzie: În regim echilibrat și simetric, curenții unui receptor în stea se pot calcula pe fiecare fază în parte, ca într-un circuit monofazat, căruia i s-ar aplica tensiunea stelată a rețelei (v. fig. 40.3).

Relații între mărimile de linie și mărimile receptorului. Dacă I_l e valoarea efectivă comună a curenților din conductoarele liniei, în cazul receptorului în stea avem:

$$\boxed{I_l = I_r}, \tag{40.15}$$

deoarece curenții de linie coincid cu cei din fazele receptorului.

Tensiunile de linie sînt tensiunile dintre faze $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$, egale cu diferențele tensiunilor stelate respective (v. teoremele din par. 39.1.3) și care formează sistemul simetric:

$$\left.\begin{aligned}\underline{U}_{12} &= \underline{U}_{1O} - \underline{U}_{2O} = \sqrt{3}\,\underline{U}_{1O}\,e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\,U_f e^{j\frac{\pi}{6}}\\ \underline{U}_{23} &= \underline{U}_{2O} - \underline{U}_{3O} = \sqrt{3}\,\underline{U}_{2O}\,e^{j\frac{\pi}{6}} = a^2\sqrt{3}\,U_f\,e^{j\frac{\pi}{6}} = a^2\underline{U}_{12}\\ \underline{U}_{31} &= \underline{U}_{3O} - \underline{U}_{1O} = \sqrt{3}\,\underline{U}_{3O}\,e^{j\frac{\pi}{6}} = a\sqrt{3}\,U_f\,e^{j\frac{\pi}{6}} = a\,\underline{U}_{12}.\end{aligned}\right\} \tag{40.16}$$

Luînd modulele și ținînd seama de relația (40.12), rezultă că valoarea efectivă comună a tensiunilor dintre faze e de $\sqrt{3}$ ori mai mare ca a tensiunilor de fază ale receptorului:

$$\boxed{U_l = \sqrt{3}\,U_r} = \sqrt{3}\,Z\,I_r. \tag{40.17}$$

40.1.2. **Receptor în stea fără fir neutru** (fig. 40.4) În acest caz sînt accesibile măsurări și se presupun cunoscute tensiunile simetrice de linie (dintre faze):

$$\underline{U}_{12} = U_l\,e^{j\beta_l}\,;\ \underline{U}_{23} = a^2\underline{U}_{12} = U_l\,e^{j\left(\beta_l - \frac{2\pi}{3}\right)};\ \underline{U}_{31} = a\,\underline{U}_{12} = U_l\,e^{j\left(\beta_l - \frac{4\pi}{3}\right)} \tag{40.18}$$

și impedanțele egale ale fazelor receptorului (40.3).

Calculul direct al curenților se poate face aplicînd teoremele lui Kirchhoff celor două ochiuri formate și punctului neutru N. Ne putem însă dispensa de acest calcul, dacă observăm că suprimarea firului neutru la rețeaua studiată mai înainte (par. 40.1.1) nu poate aduce nici o modificare în repartiția tensiunilor și curenților, deoarece I_N era egal cu zero (rel. 40.10). Rezultă că tensiunile stelate ale receptorului sînt egale cu tensiunile stelate ale generatorului

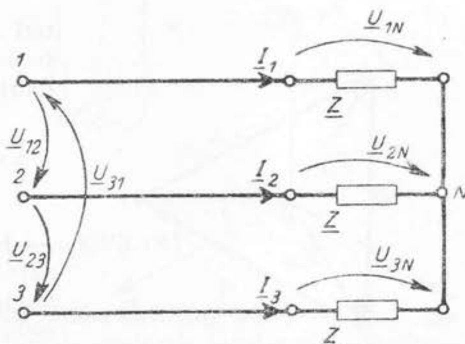


Fig. 40.4.

din cazul precedent. Din relațiile (40.11) și (40.16) rezultă atunci cum se exprimă aceste tensiuni în funcție de tensiunile de linie :

$$\underline{U}_{1N} = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{U}_{12} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\underline{U}_{2N} = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{U}_{23} e^{-j\frac{\pi}{6}} = a^2 \underline{U}_{1N} \tag{40.19}$$

$$\underline{U}_{3N} = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{U}_{31} e^{-j\frac{\pi}{6}} = a \underline{U}_{1N},$$

cu

$$U_r = |\underline{U}_{1N}| = |\underline{U}_{2N}| = |\underline{U}_{3N}| = \frac{|\underline{U}_{12}|}{\sqrt{3}} = \frac{U_l}{\sqrt{3}}. \tag{40.20}$$

Curenții vor fi și ei aceiași ca în cazul precedent, adică (v. 40.12, 40.14 și 40.20) vor avea valoarea efectivă :

$$|\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = |\underline{I}_3| = I_r = I_l = \frac{U_r}{Z} = \frac{U_l}{Z\sqrt{3}} \tag{40.21}$$

și defazajul φ față de tensiunea stelată corespunzătoare a receptorului. Expresiile lor complexe vor fi :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{1N}}{Z} = \frac{\underline{U}_{12}}{\sqrt{3}Z} e^{-j\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)} \; ; \; \underline{I}_2 = a^2\underline{I}_1; \; \underline{I}_3 = a \; \underline{I}_1, \tag{40.22}$$

adică vor fi defazați față de tensiunea de linie dintre faza dată și cea următoare cu $\varphi + \pi/6$ (fig. 40.5).

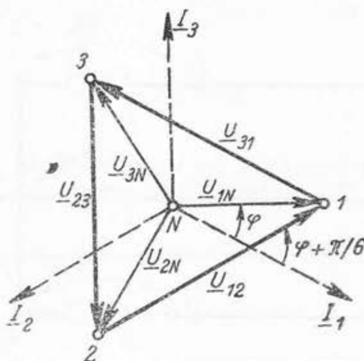


Fig. 40.5.

40.1.3. **Receptor în stea cu inductivități mutuale.** Fie un receptor echilibrat fără fir neutru, avînd laturile cuplate cu impedanțele mutuale două cîte două egale

$$\underline{Z}_M = j\omega L_{12} = j\omega L_{23} = j\omega L_{31} = j\omega M, \tag{40.23}$$

— de exemplu, în cazul unei bobine trifazate (v. fig. 40.6, *a*) sau a unei linii de alimentare, la care se iau în considerare inductivitățile liniei. În acest caz se poate găsi *o schemă echivalentă în stea fără cuplaje* între laturi (v. fig. 40.6, *b*) și problema deter-

minării curenților se reduce la cazurile precedente. Pentru a găsi schema echivalentă, scriem ecuațiile lui Kirchhoff pe cele două ochiuri independente din figura 40.6, *a* :

$$\underline{U}_{12} = \underline{Z}\ \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \underline{I}_2 - \underline{Z}\ \underline{I}_2 - \underline{Z}_M \underline{I}_1 = (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\ \underline{I}_1 - (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\ \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{Z}\ \underline{I}_2 + \underline{Z}_M \underline{I}_3 - \underline{Z}\ \underline{I}_3 - \underline{Z}_M \underline{I}_2 = (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\ \underline{I}_2 - (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\ \underline{I}_3.$$

Se observă că am obținut ecuațiile scrise pentru ochiurile schemei echivalente din figura 40.6, *b*, dacă impedanțele acesteia sînt :

$$\underline{Z}_e = \underline{Z} - \underline{Z}_M. \tag{40.24}$$

Dacă $\underline{Z} = R + \mathrm{j}\,\omega L$, se constată că inductivitățile echivalente, necuplate, în stea sînt :

$$L_e = L - M, \tag{40.25}$$

unde M e valoarea comună a inductivităților mutuale dintre faze. Curenții din ramurile acestei stele echilibrate cu inductivități mutuale sînt simetrici, dacă tensiunile aplicate sînt simetrice. Echivalența stabilită e însă valabilă și în cazul în care tensiunile între faze nu sînt simetrice, deoarece simetria lor nu a fost utilizată în demonstrație.

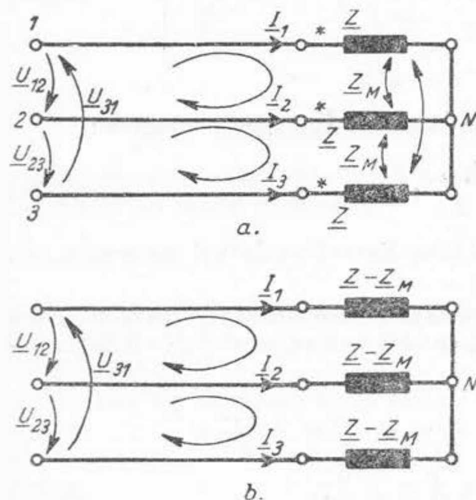


Fig. 40.6.

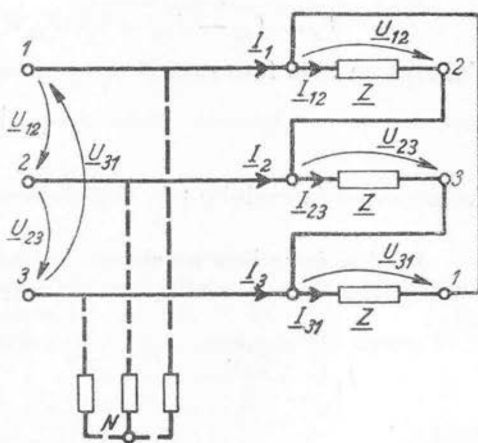


Fig. 40.7.

40.2. Receptoare trifazate echilibrate în triunghi

40.2.1 Receptor în triunghi fără cuplaje inductive (fig. 40.7). Se dau tensiunile simetrice de linie (40.18) și impedanțele egale ale fazelor receptorului :

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z} = Z\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}. \tag{40.26}$$

Se cer curenții din fazele receptorului $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$, $\underline{I}_{31}$ și curenții de linie $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$.

Calculul curenților. Primii curenți se pot exprima imediat în funcție de tensiunile de linie, care sînt acum aplicate direct impedanțelor receptorului:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{U_l}{Z}\, e^{j(\beta_l - \varphi)} \quad ; \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = a^2\, \underline{I}_{12}; \ \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = a\underline{I}_{12} \qquad (40.27)$$

și formează un sistem simetric cu valorile efective:

$$|\underline{I}_{12}| = |\underline{I}_{23}| = |\underline{I}_{31}| = \boxed{I_r = \frac{U_l}{Z}}. \qquad (40.28)$$

Acești curenți sînt defazați cu argumentul φ al impedanței față de tensiunile de linie corespunzătoare: $\underline{I}_{12}$ față de $\underline{U}_{12}$, $\underline{I}_{23}$ față de $\underline{U}_{23}$, $\underline{I}_{31}$ față de $\underline{U}_{31}$.

Din aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff, la bornele de fază ale receptorului rezultă că fiecare curent de linie e diferența a doi curenți de fază ai receptorului (v. par. 39.1.3):

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = \sqrt{3}\ \underline{I}_{12}\, e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}\, U_l}{Z}\, e^{j\left(\beta_l - \varphi - \frac{\pi}{6}\right)} \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = \sqrt{3}\, \underline{I}_{23} e^{-j\frac{\pi}{6}} = a^2\, \underline{I}_1 \\ \underline{I}_3 &= \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = \sqrt{3}\ \underline{I}_{31} e^{-j\frac{\pi}{6}} = a\ \underline{I}_1 \end{aligned}\right\} \qquad (40.29)$$

Curenții de linie formează și ei un sistem simetric cu valorile efective:

$$I_l = \frac{\sqrt{3}\, U}{Z}, \qquad (40.30)$$

fiecare avînd defazajul $\varphi + \frac{\pi}{6}$ față de tensiunea dintre faza dată și cea următoare.

Dacă se introduce un sistem de tensiuni auxiliare stelate, pe baza relațiilor (40.19), considerate ca relații de definiție, rezultă pentru curenții de linie expresiile:

$$\underline{I}_1 = 3\,\frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}} = 3\,\frac{\underline{U}_{1N}}{Z}\, e^{-j\varphi} \quad ; \quad \underline{I}_2 = 3\,\frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}} = 3\,\frac{\underline{U}_{2N}}{Z}\, e^{-j\varphi} \quad ;$$

$$\underline{I}_3 = 3\,\frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}} = 3\,\frac{\underline{U}_{3N}}{Z}\, e^{-j\varphi}. \qquad (40.31)$$

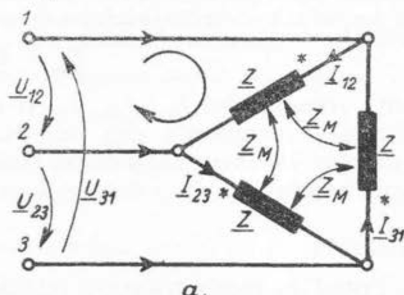
Se verifică și pe această cale că impedanța unei laturi a stelei echivalente triunghiului e $\underline{Z}_\lambda = \frac{1}{3}\,\underline{Z}_\Delta = \frac{1}{3}\,\underline{Z}$.

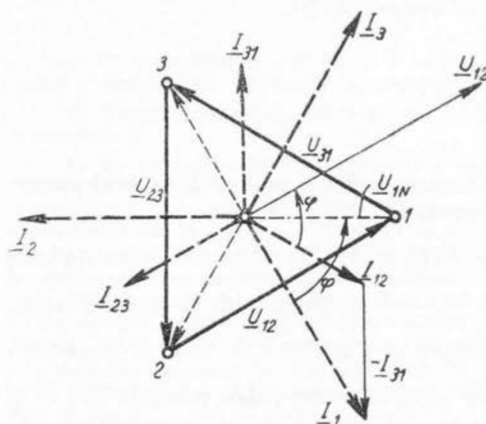
Observație: Tensiunile auxiliare stelate $\underline{U}_{1N}$, $\underline{U}_{2N}$, $\underline{U}_{3N}$ definite de relațiile (40.19) nu există în acest caz în rețea. Dacă însă rețeaua de alimentare simetrică are neutrul accesibil, sau dacă se montează un grup de impedanțe egale în stea între bornele ei, pentru a forma un punct neutru artificial (fig. 40.7), tensiunile stelate corespunzătoare sînt egale cu aceste tensiuni auxiliare.

În figura 40.8 e construită diagrama curenților și tensiunilor.

Relații între mărimile de linie și mărimile receptorului. În cazul receptorului în triunghi, tensiunea aplicată unei faze a receptorului e chiar tensiunea de linie

$$\boxed{U_l = U_r} = Z\, I_r, \qquad (40.32)$$





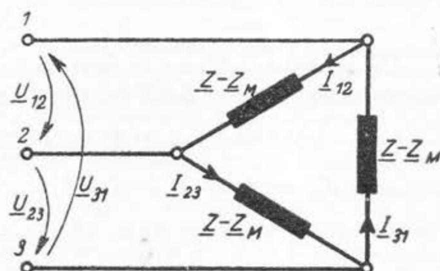


Fig. 40.8.

Fig. 40.9.

iar curentul de linie este de $\sqrt{3}$ ori mai mare decît curentul de fază al receptorului (v. 40.28 și 40.30),

$$\boxed{I_l = \sqrt{3}\, I_r} \cdot \qquad (40.33)$$

40.2.2 **Receptoare în triunghi cu inductivități mutuale** (fig. 40.9, *a*). Ca și în cazul stelei cu inductivități mutuale căutăm *o schemă echivalentă fără cuplaje inductive* pentru receptorul considerat (fig. 40. 9, *b*).

Ecuațiile lui Kirchhoff scrise pe cele trei ochiuri independente din figura 40.9 *a*, sînt :

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{Z}\, \underline{I}_{12} + \underline{Z}_M (\underline{I}_{23} + \underline{I}_{31}) \\ \underline{U}_{23} &= \underline{Z}\, \underline{I}_{23} + \underline{Z}_M (\underline{I}_{31} + \underline{I}_{12}) \\ \underline{U}_{31} &= \underline{Z}\, \underline{I}_{31} + \underline{Z}_M (\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23}) \end{aligned}\right\}. \qquad (40.34)$$

Adunînd aceste ecuații și ținînd seama că suma tensiunilor dintre faze e nulă, rezultă :

$$(\underline{Z} + 2\, \underline{Z}_M)\, (\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23} + \underline{I}_{31}) = 0.$$

Primul factor nu poate fi nul, din cauza rezistențelor totdeauna pozitive ale aturilor. Rezultă că cei trei curenți ai receptorului satistfac relația :

$$\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23} + \underline{I}_{31} = 0. \qquad (40.35)$$

Înlocuind cu această relație suma a cîte doi curenți în (40.34), rezultă :

$$\underline{U}_{12} = (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\,\underline{I}_{12};\quad \underline{U}_{23} = (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\,\underline{I}_{23};\quad \underline{U}_{31} = (\underline{Z} - \underline{Z}_M)\,\underline{I}_{31}, \qquad (40.36)$$

adică impedanțele triunghiului echivalent fără cuplaje inductive sînt :

$$\underline{Z}_e = \underline{Z} - \underline{Z}_M. \qquad (40.37)$$

Curenții receptorului $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$, $\underline{I}_{31}$ și cei de linie sînt și în acest caz simetrici, dacă tensiunile aplicate sînt simetrice. Echivalența stabilită e însă valabilă și în cazul în care tensiunile dintre faze nu formează un sistem simetric, deoarece simetria tensiunilor nu a fost utilizată în demonstrație.

40.3. Puteri în rețele trifazate echilibrate

Un receptor trifazat în stea cu fir neutru constituie un 4-pol, a cărui putere complexă la borne e dată de relația generală (37.22) :

$$\underline{S}_b = \underline{V}_1\underline{I}_1^* + \underline{V}_2\underline{I}_2^* + \underline{V}_3\underline{I}_3^* + \underline{V}_0\,(-\underline{I}_N^*) \qquad (40.38)$$

sau — cu $\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ și $\underline{U}_{kO} = \underline{V}_k - \underline{V}_O$, $(k = 1, 2, 3)$ — de relația :

$$\underline{S}_b = \underline{U}_{1O}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{2O}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{3O}\underline{I}_3^*. \qquad (40.39)$$

Dacă receptorul e echilibrat și tensiunile sînt simetrice, din relațiile (40.2) și 40.13) rezultă egalitatea celor trei termeni de mai sus (cu $a^* = a^2$ și $(a^2)^* = a$) :

$$\underline{U}_{2O}\underline{I}_2^* = a^2\underline{U}_{1O}\,(a^2\underline{I}_1)^* = a^3\underline{U}_{1O}\underline{I}_1^* = \underline{U}_{1O}\underline{I}_1^*$$

$$\underline{U}_{3O}\underline{I}_3^* = a\,\underline{U}_{1O}\,(a\underline{I}_1)^* = a^3\underline{U}_{1O}\underline{I}_1^* = \underline{U}_{1O}\underline{I}_1^*.$$

Puterea complexă trifazată în regim simetric rezultă cu relația (40.17) :

$$\underline{S}_b = 3\,\underline{U}_{1O}\underline{I}_1^* = 3\,U_f\,I_l\,e^{j\varphi} = \sqrt{3}\,U_l\,I_l\,e^{j\varphi} = P_b + jQ_b, \qquad (40.40)$$

cu puterea activă și puterea reactivă :

$$\boxed{P_b = \sqrt{3}\,U_l\,I_l\cos\varphi \quad ; \quad Q_b = \sqrt{3}\,U_l\,I_e\sin\varphi}\,. \qquad (40.41)$$

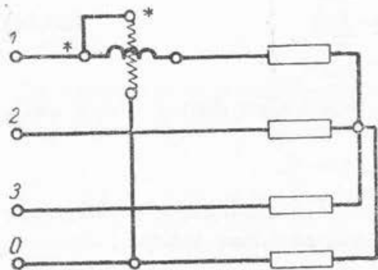


Fig. 40.10.

Puterea activă se măsoară cu un singur wattmetru (fig. 40.10), a cărui bobină de curent se pune în serie cu conductorul fazei întîi, a cărui bobină de tensiune se conectează între conductorul fazei întîi și firul neutru (dacă acesta lipsește, se folosește un neutru artificial, ca în fig. 40.7) și a cărui indicație se multiplică cu trei.

Deoarece orice receptor în triunghi admite o schemă echivalentă în stea, rezultă că formulele (40.38) și (40.41) rămîn valabile (cu $\underline{I}_N = 0$) la orice fel de receptor echilibrat, alimentat cu tensiuni simetrice.

Concluzii: Cazurile particulare de receptoare studiate anterior conduc la următoarele concluzii generale, privitoare la rețelele trifazate echilibrate, alimentate cu tensiuni simetrice:

a) Calculul curenților se poate efectua ca în monofazat, pe fiecare fază în parte.

b) În cazul mai multor receptoare conectate în serie sau în paralel se pot face transfigurări succesive, pentru a obține un singur receptor echivalent în stea sau în triunghi.

c) Curenții de linie sînt defazați față de tensiunile stelate ale generatorului (sau ale receptorului), cu argumentul $\varphi = \text{arc tg}\,\frac{X}{R}$ al impedanțelor de sarcină $\underline{Z} = R + jX$ și au valoarea efectivă:

$$I_l = \frac{U_f}{Z_\lambda} = 3\,\frac{U_f}{Z_\Delta} = \frac{U_l}{\sqrt{3}Z_\lambda} = \frac{\sqrt{3}U_l}{Z_\Delta}, \tag{40.42}$$

în care Z_λ e impedanța unei laturi a receptorului echivalent în stea, iar Z_Δ impedanța unei laturi a receptorului echivalent în triunghi.

d) Puterile complexe, active și reactive, sînt date de relația (40.40) și (40.41), oricare ar fi receptorul.

e) În cazul receptoarelor trifazate echilibrate în stea, curenții și tensiunile au aceeaș valoare fie că există, fie că nu există firul neutru. De aceea, el poate fi suprimat. Cu toate acestea, în rețelele trifazate de distribuție a energiei electrice (la tensiune joasă) există totdeatena conductorul neutru (cu o secțiune mai mică decît a conductoarelor de fază). Aceasta deoaurec un mare număr de consumatori (iluminat, uz casnic etc.) au receptoare monofazate — conectate în stea — a căror echilibrare nu e niciodată perfectă. Firul neutru are, în acest caz, rolul de a stabiliza potențialul punctului neutru al receptorului, astfel încît fiecărei faze a acestuia să i se aplice practic aceeași tensiune efectivă, chiar la impedanțe de fază neegale (v. par. 41.2). Pentru același motiv, firul neutru, care nu trebuie să se întrerupă nici măcar accidental, nu se echipează cu siguranțe fuzibile. Totodată, în rețelele de distribuție de joasă tensiune, conductorul neutru e legat la pămînt, asigurîndu-se astfel o tensiune maximă între conductoarele de fază și pămînt, egală cu tensiunea stelată.

Observație: În practică, valorile efective ale tensiunilor unui sistem trifazat se indică prin raportul (neefectuat și egal cu $\sqrt{3}$) dintre tensiunea de linie și cea stelată a rețelei de alimentare: U_l/U_f. De exemplu, notația 380/220 V înseamnă: tensiuni între faze de 380 V și tensiuni stelate de $220 = 380/\sqrt{3}$ V.

40.4. Aplicații

40.4.1. **Exemplul 1.** Se consideră o rețea cu tensiuni trifazate simetrice, date de 380/220 V, 50 Hz, care alimentează un receptor echilibrat în stea, format din trei impedanțe egale $\underline{Z} = R + jX = (3 + j4)\Omega$ și un motor trifazat asincron [1], care absoarbe o putere $P'' = 4$ kW, sub un factor de putere inductiv $\cos\varphi = 0{,}8$. Se cere:

a) Să se determine curenții totali de linie și să se verifice bilanțul puterilor active și reactive.

b) Să se determine capacitatea a trei condensatoare montate în triunghi, care com-

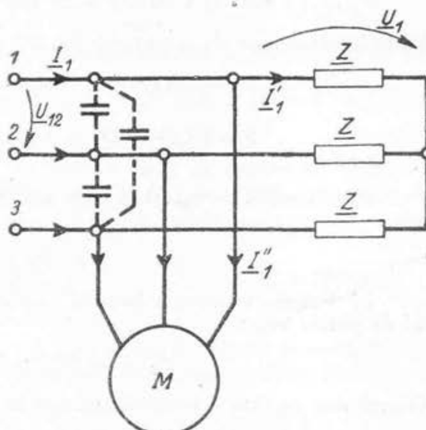


Fig. 40.11.

[1] Motorul asincron alimentat cu tensiuni simetrice admite o schemă echivalentă cu trer impedanțe (inductive) identice, legate în stea sau în triunghi. Prin urmare este un receptoi echilibrat.

penseazǎ integral puterea reactivǎ a celor douǎ receptoare, astfel încît factorul de putere sǎ devinǎ unitar.

c) Dacǎ linia de alimentare are impedanțele interioare (serie) de fazǎ $\underline{Z}_l = (1 + j1)\Omega$, sǎ se determine valoarea tensiunii de fazǎ a generatorului, înainte și dupǎ montarea condensatoarelor.

Soluție: Ambele receptoare fiind echilibrate, curenții de linie formeazǎ un sistem simetric, deci este suficient sǎ se determine curentul pe o fazǎ, de exemplu pe faza 1 (fig. 40.11).

a) Ca origine de fazǎ se considerǎ tensiunea stelatǎ pe faza 1:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{1O} = \underline{U}_{1N_1} = U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}.$$

Curentul de linie pentru receptorul în stea este:

$$\underline{I}_1' = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{220}{3 + j4} = 8{,}8(3 - j4) = 26{,}4 - j35{,}2 \approx 43{,}9\, e^{-j\, \text{arctg}\, 0{,}75}.$$

Curentul de linie absorbit de motor are valoarea efectivǎ:

$$I_1'' = \frac{P''}{\sqrt{3}\, U_l \cos\varphi} = \frac{4\,000}{\sqrt{3}\, 380.0{,}8} \approx 7{,}6 \text{ A},$$

cu expresia în complex pentru faza întîi:

$$\underline{I}_1'' = I_l'' (\cos\varphi'' - j \sin\varphi'') \approx 7{,}6(0{,}8 - j\, 0{,}6) = 6{,}08 - j\, 4{,}56.$$

Curentul total devine, conform primei teoreme a lui Kirchhoff:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_1'' \approx 32{,}48 - j\, 39{,}76 = I_l\, e,^{-j\varphi},$$

cu valoarea efectivǎ $I_l = \sqrt{32{,}48^2 + 39{,}76^2} \approx 51{,}4$ A și defazajul inductiv $\varphi = \text{arc tg}\,(39{,}76/32{,}48) \approx \text{arc tg}\, 1{,}223 = 51°30'$ $(\cos\varphi \approx 0{,}633;\ \sin\varphi \approx 0{,}774)$.
Puterile date de rețea sînt:

$$P_b = \sqrt{3}\, 380 \cdot 51{,}4 \cdot 0{,}633 = 21\,400 \text{ W};\quad Q_b = \sqrt{3}\, 380 \cdot 51{,}4 \cdot 0{,}774 \approx 26\,200 \text{ var}.$$

Puterile consumate de receptoare (cu $Q'' = P''\text{tg}\varphi''$) sînt:

$$P_b = 3RI_1'^2 + P'' = 3 \cdot 3 \cdot 43{,}9^2 + 4\,000 \approx 21\,300 \text{ W}$$

$$Q = 3XI_1'^2 + Q'' = 3 \cdot 4 \cdot 43{,}9^2 + 4\,000\, \frac{0{,}6}{0{,}8} \approx 26\,100 \text{ var}.$$

În limitele erorilor de calcul cu rigla am obținut verificarea bilanțului puterilor active și reactive:

$$P \approx P_b, \qquad Q \approx Q_b.$$

b) Puterea reactivǎ a bateriei de condensatoare necesare compensǎrii integrale a factorului de putere este:

$$Q_c = -3C_\Delta\, \omega\, U_l^2 = -Q = -26\,200 \text{ var}.$$

Capacitatea pe fazǎ a bateriei montate în triunghi rezultǎ:

$$C_\Delta = \frac{|Q_c|}{3U_l^2\, \omega} = \frac{26\,200}{3\; 380^2 \cdot 314} \approx 192\ \mu\text{F}.$$

c) Înainte de montarea condensatoarelor, tensiunea stelatǎ necesarǎ generatorului era:

$$|\underline{E}_1| = |\underline{U}_1 + \underline{Z}_l\, \underline{I}_1| = |220 + (1 + j)(32{,}48 - j\, 39{,}76)| \approx 290 \text{ V}.$$

După montarea condensatoarelor, deoarece compensarea este completă, iar condensatoarele absorb numai curenți în cuadratură cu tensiunea aplicată, curentul total se reduce la componenta activă a curentului determinat anterior $I_{l0} = 32,48$ A.

Tensiunea stelată necesară generatorului e, în acest caz, numai:

$$|\underline{E}_{10}| = |\underline{U}_1 + \underline{Z}_l\, \underline{I}_{10}| = |220 + (1 + j)\, 32,48| \approx 255 \text{ V}.$$

În figura 40.12 e reprezentată diagrama compunerii curenților și tensiunilor pe faza întîi. Avantajul cel mai important al compensării puterii reactive constă în reducerea consumului de putere ΔP pe linie: înainte de compensare

$$\Delta P = 3\, R_l\, I_1^2 = 3 \cdot 1 \cdot 51,4^2 \approx \approx 7\,910 \text{ W},$$

după compensare:

$$\Delta P = 3\, R_l\, I_{l0}^2 = 3 \cdot 1 \cdot 32,48^2 \approx \approx 3\,170 \text{ W}.$$

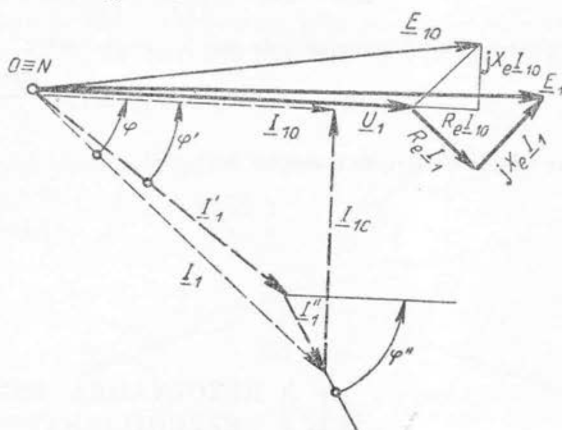


Fig. 40.12.

40.4.2. **Exemplul 2.** O linie trifazată alimentează un receptor format din trei impedanțe egale $\underline{Z} = R + jX = (8,4 + j\, 11,1)\Omega$, montate în triunghi (fig. 40.13, *a*). La bornele generatorului, tensiunea între faze are valoarea efectivă $U_l = 250$ V (f = 50 Hz). Impedanțele echivalente serie ale liniei sînt $\underline{Z}_l = R_l + jX_l = (0,2 + j\, 0,3)\Omega$.

Să se determine curenții de linie, tensiunile de linie aplicate receptorului și curenții din laturile receptorului.

Soluție: Se transfigurează triunghiul într-o stea echivalentă (fig. 40.13,*b*). Se obține:

$$\underline{Z}_\lambda = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3} = \frac{\underline{Z}}{3} = 2,8 + j\, 3,7\, \Omega.$$

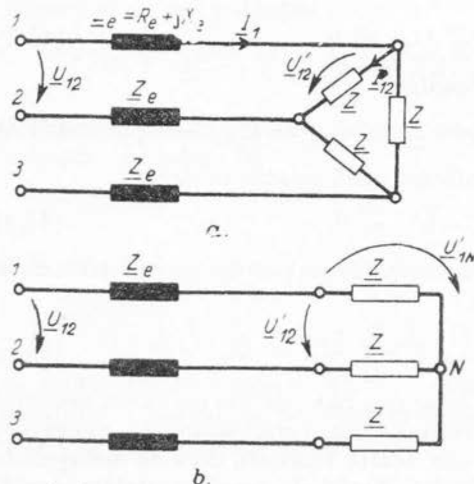


Fig. 40.13.

Deci, impedanța totală pe fiecare fază va fi:

$$\underline{Z}'' = \underline{Z}_\lambda + \underline{Z}_l = 3 + j\, 4 = 5 \cdot e^{j\varphi},$$

cu $\varphi = \text{arc tg}\,(4/3) \approx 53°$.

Dacă se alege ca origine de fază tensiunea stelată la generator pe faza 1 $\underline{U}_1 = 250/\sqrt{3}$ V, se obține curentul:

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1/\underline{Z}'' = \frac{30}{\sqrt{3}} - j\frac{40}{\sqrt{3}} = 28,9\, e^{-j\varphi},$$

cu valoarea efectivă $|\underline{I}_1| = I_l = 28,9$ A.

Ceilalți doi curenți de linie sînt:

$$\underline{I}_2 = 28,9\, e^{-j\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)};$$

$$\underline{I}_3 = 28,9\, e^{-j\left(\varphi + \frac{4\pi}{3}\right)}$$

sistemul fiind simetric.

La receptor, tensiunea stelată $\underline{U}'_N$ este:

$$\underline{U}'_{1N} = \underline{I}_1 Z\lambda = \left(\frac{30}{\sqrt{3}} - \mathrm{j}\frac{40}{\sqrt{3}}\right)(2{,}8 + \mathrm{j}\,3{,}7) \approx \frac{232 - \mathrm{j}}{\sqrt{3}}.$$

Valoarea efectivă a tensiunii de linie la receptor este:

$$U'_l = \sqrt{3}\,|\,U'_{lN}| \approx \sqrt{3}\cdot\frac{232}{\sqrt{3}} = 232\ \mathrm{V},$$

iar valorile efective ale curenților din laturile triunghiului sînt egale cu:

$$I_r = |\,I_{12}\,| = \frac{I_l}{\sqrt{3}} \approx \frac{28{,}9}{\sqrt{3}} = 16{,}7\ \mathrm{A}.$$

41. REZOLVAREA REȚELELOR TRIFAZATE DEZECHILIBRATE SUB TENSIUNI LA BORNE DATE

Calculul rețelelor trifazate dezechilibrate sub tensiuni la borne date se poate face cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff, fără alte metode speciale. Pentru rețelele trifazate fără inductivități mutuale între laturi, acest calcul se sistematizează, după cum vom arăta în acest capitol, în principal pe baza teoremei potențialului punctului neutru. Dacă neutrul O al rețelei de alimentare e accesibil, vom presupune, în general, că se dau tensiunile nesimetrice,

$$\underline{U}_{1O} = U_{1O}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_{1O}},\quad \underline{U}_{2O} = U_{2O}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_{2O}},\quad \underline{U}_{3O} = U_{3O}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_{3O}}, \qquad (41.1)$$

cu

$$\underline{U}_{1O} + \underline{U}_{2O} + \underline{U}_{3O} \neq 0. \qquad (41.2)$$

Tensiunile aplicate între faze rezultă imediat:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{1O} - \underline{U}_{2O},\quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_{2O} - \underline{U}_{3O},\quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_{3O} - U_{1O} \qquad (41.3)$$

și sînt, în general, tot nesimetrice, satisfăcînd însă relația evidentă

$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0. \qquad (41.4)$$

Dacă neutrul rețelei de alimentare nu e accesibil, se pot da numai tensiunile între faze ale rețelei

$$\underline{U}_{12} = U_{12}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_{12}},\quad \underline{U}_{23} = U_{23}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_{2O}},\quad \underline{U}_{31} = U_{31}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_{31}}, \qquad (41.5)$$

satisfăcînd relația (41.4) și fiind, în rest, oarecare. În acest caz nu există tensiuni stelate ale rețelei de alimentare, decît introduse în mod convențional și neunivoc, prin relațiile (41.3), luînd arbitrară una din aceste tensiuni, ceea ce corespunde alegerii unui anumit punct neutru artificial. Astfel de tensiuni stelate vor fi numite tensiuni stelate auxiliare.

41.1. Teorema potențialului punctului neutru [1]

Considerăm un multipol pasiv în stea cu n ramuri, prin care intră curenții $\underline{I}_1, \underline{I}_2, ..., \underline{I}_n$ și cu bornele de acces $1, 2, ..., n$, avînd potențialele $\underline{V}_1, \underline{V}_2, ..., \underline{V}_N$ față de un punct de referință arbitrar (fig. 41.1).

Ramurile stelei nu sînt cuplate inductiv între ele sau cu alte laturi exterioare și au impedanțele proprii $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, ..., \underline{Z}_n$, respectiv admitanțele:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1},$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}, ..., \underline{Y}_n = \frac{1}{\underline{Z}_n}. \quad (41.6)$$

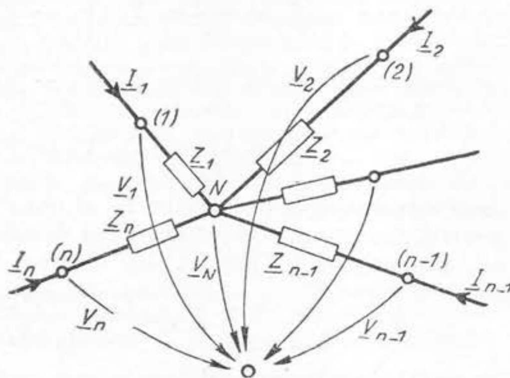


Fig. 41.1

Conform teoremei potențialulu punctului neutru, *potențialul punctului N de întîlnire a ramurilor stelei e egal cu media aritmetică a potențialelor bornelor de acces, ponderate cu admitanțele laturilor corespunzătoare*

$$\boxed{\underline{V}_N = \frac{\underline{V}_1\underline{Y}_1 + \underline{V}_2\underline{Y}_2 + ... + \underline{V}_n\underline{Y}_n}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + ... + \underline{Y}_n}}, \quad (41.7)$$

Teorema se demonstrează imediat, exprimînd curenții din laturi cu ajutorul diferențelor de potențial:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1(\underline{V}_1 - \underline{V}_N); \ \underline{I}_2 = \underline{Y}_2(\underline{V}_2 - \underline{V}_N); ..., \underline{I}_n = \underline{Y}_n(\underline{V}_n - \underline{V}_N) \quad (41.8)$$

și înlocuind aceste valori în relația care exprimă prima teoremă a lui Kirchhoff, aplicată nodului N,

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + ... + \underline{I}_n = 0. \quad (41.9)$$

Prin înlocuire, grupînd termenii care au în factor pe $\underline{V}_N$, se obține:

$$\underline{V}_1\underline{Y}_1 + \underline{V}_2\underline{Y}_2 + ... + \underline{V}_n\underline{Y}_n - \underline{V}_N(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + ... + \underline{Y}_n) = 0,$$

de unde rezultă teorema (41.7). Rezultatul e corect, oricare ar fi punctul de referință al potențialelor, dacă în sumele din teorema (41.7) nu se omite nici o latură legată de nodul N.

---

[1] Uneori, această teoremă e numită *teorema lui Milman*.

41.2. Receptor dezechilibrat, în stea, cu fir neutru

Curenții de linie $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$, identici cu aceia din fazele receptorului s-ar putea determina din relațiile:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}_1} = \underline{Y}_1(\underline{V}_1 - \underline{V}_N) = \underline{Y}_1(\underline{U}_{1O} - \underline{U}_{NO}) \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}_2} = \underline{Y}_2(\underline{V}_2 - \underline{V}_N) = \underline{Y}_2(\underline{U}_{2O} - \underline{U}_{NO}) \\ \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}_3} = \underline{Y}_3(\underline{V}_3 - \underline{V}_N) = \underline{Y}_3(\underline{U}_{3O} - \underline{U}_{NO}), \end{aligned} \tag{41.10}$$

dacă s-ar cunoaște potențialul $\underline{V}_N$ al punctului neutru sau tensiunea $\underline{U}_{NO}$ dintre neutrul receptorului și cel al rețelei de alimentare, numită și deplasarea neutrului. Potențialul $\underline{V}_N$ rezultă din teorema (41.7) care, în acest caz, se scrie:

$$\underline{V}_N = \frac{\underline{V}_1\underline{Y}_1 + \underline{V}_2\underline{Y}_2 + \underline{V}_3\underline{Y}_3 + \underline{V}_O\underline{Y}_N}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_N}, \tag{41.11}$$

cu punct de referință arbitrar pentru potențiale. Practic, se cunosc tensiunile stelate ale rețelei de alimentare $\underline{U}_{1O}$, $\underline{U}_{2O}$, $\underline{U}_{3O}$, care coincid cu potențialele borne-

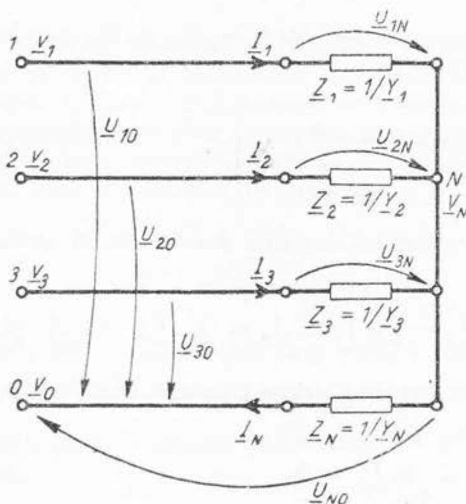


Fig. 41.2

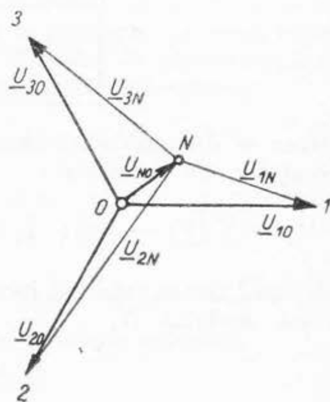


Fig. 41.3

lor, în cazul cînd neutrul rețelei de alimentare se alege drept punct de referință cu $V_O = 0$. În acest caz, $\underline{V}_N = \underline{V}_N - \underline{V}_O = \underline{U}_{NO}$ și teorema (41.11) capătă forma:

$$\underline{U}_{NO} = \frac{\underline{U}_{1O}\underline{Y}_1 + \underline{U}_{2O}\underline{Y}_2 + \underline{U}_{3O}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_N}. \tag{41.12}$$

O dată calculată această tensiune (deplasarea neutrului v. fig. 41.3), tensiunile stelate ale receptorului, și curenții rezultă imediat din (41.10).

Trebuie observat că $\underline{U}_{NO} \neq 0$ (neutrul „se deplasează"), chiar dacă tensiunile de alimentare sînt simetrice, din cauza dezechilibrului sarcinii. Dacă însă impedanța $|\underline{Z}_N|$ de pe firul neutru e foarte mică (se reduce la rezistența și inductivitatea echivalentă a firului), atunci $|\underline{Y}_N| \to \infty$ și $\underline{U}_{NO} \to 0$: deplasarea neutrului e neglijabilă în rețelele cu conductor neutru, de secțiune suficient de mare, chiar dacă sarcina e puternic dezechilibrată. Această consecință prezintă mare importanță practică, deoarece asigură aplicarea unor tensiuni de fază, practic simetrice (dacă $\underline{U}_{NO} = 0$, atunci $\underline{U}_{N1} = \underline{U}_{1O}$ etc.) receptorilor dezechilibrați monofazați, conectați în stea în rețelele de distribuție de joasă tensiune. De altă parte, dacă admitanța firului neutru e mică sau nulă (nu avem fir neutru), deplasarea neutrului poate fi importantă (v. aplicația de mai jos), producînd micșorarea tensiunilor aplicate unora dintre faze și creșterea tensiunilor la celelalte, ceea ce e inadmisibil în exploatare, periclitînd securitatea instalațiilor. Dacă, în plus, suma admitanțelor laturilor e mică (de ex., datorită satisfacerii unei condiții de rezonanță), deplasarea neutrului poate atinge valori oricît de mari, mai mari decît ale tensiunilor aplicate de rețea. Laturile stelei pot fi în acest caz mult supratensionate.

Aplicație: Fie un receptor trifazat pur rezistiv, constituit din lămpi de iluminat, în stea, cu rezistențele laturilor:

$$R_1 = 100\ \Omega, \qquad R_2 = R_3 = 10\ \Omega,$$

în care sînt incluse și rezistențele conductoarelor liniei de alimentare (care au inductivități neglijabile). Rețeaua de alimentare aplică tensiuni simetrice 220/127 V, 50 Hz. Studiem deplasarea neutrului $\underline{U}_{NO}$ și tensiunile aplicate fazelor receptorului $\underline{U}_{1N}$, $\underline{U}_{2N}$ $\underline{U}_{3N}$ în următoarele două situații:

a) există un conductor neutru de inductivitate neglijabilă și rezistența $R_N = 0{,}6\ \Omega$ (fig. 41.4, *a*);

b) conductorul neutru lipsește (fig. 41.5, *a*).

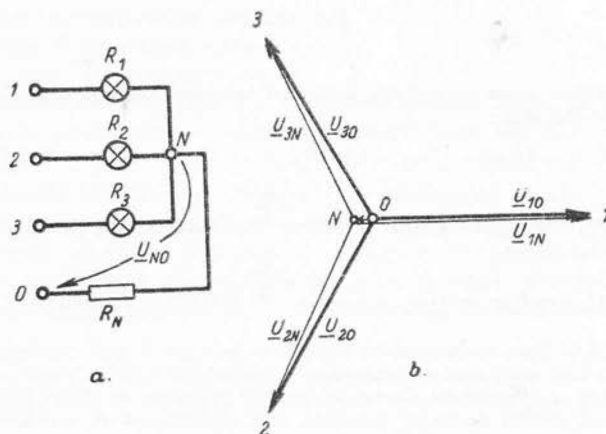


Fig. 41.4

a) În primul caz, $\underline{Y}_1 = 0{,}01$, $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_3 = 0{,}1$, $\underline{Y}_N = 1{,}67$. Deoarece am presupus că tensiunile la borne sînt simetrice, $\underline{U}_{2O} + \underline{U}_{3O} = -\underline{U}_{1O}$, rezultă:

$$\underline{U}_{NO} = \frac{0{,}01\underline{U}_{1O} + 0{,}1\,(\underline{U}_{2O} + \underline{U}_{3O})}{0{,}01 + 0{,}1 + 0{,}1 + 1{,}67} = -0{,}048\,\underline{U}_{10}$$

$$U_{NO} = |\,U_{NO}\,| = 0{,}048 \cdot 127 = 6{,}08\ \text{V}.$$

Deplasarea neutrului e admisibilă, fiind sub 5% din tensiunea aplicată. Tensiunile de fază ale receptorului (v. fig. 41.4, *b*) sînt practic simetrice și egale cu cele ale rețelei.

b) În al doilea caz, $\underline{Y}_N = 0$ (fig. 41.5,*a*) şi rezultă :

$$\underline{U}_{NO} = \frac{0{,}01\underline{U}_{1O}+0{,}1\ (\underline{U}_{2O}+\underline{U}_{3O})}{0{,}01+0{,}1+0{,}1} = -0{,}43\,\underline{U}_{1O}$$

$$U_{NO} = |\ U_{NO}\ | = 0{,}43 \cdot 127 = 54{,}6 \text{ V}.$$

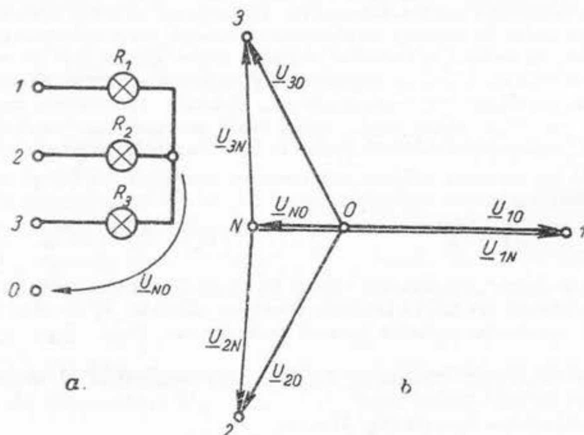


Fig. 41.5

Deplasarea neutrului e acum de ordinul jumătăţii tensiunii aplicate (fig. 41.5, *b*). Tensiunile de fază ale receptorului sînt :

$$\underline{U}_{1N} = \underline{U}_{1O} - \underline{U}_{NO} = 1{,}43\ \underline{U}_{1O}; \qquad U_{1N} \approx 182 \text{ V}$$

$$\underline{U}_{2N} = \underline{U}_{2O} - \underline{U}_{NO} = U_{1O}\ (e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 0{,}43); \quad U_{2N} \approx 95 \text{ V}$$

$$\underline{U}_{3N} = \underline{U}_{3O} - \underline{U}_{NO} = \underline{U}_{1O}\ (e^{+j\frac{2\pi}{3}} + 0{,}43); \quad U_{3N} \approx 95 \text{ V}.$$

Se observă că în lipsa firului neutru lămpile de pe faza 1, mai descărcată (cu rezistenţă mai mare şi curent mai mic), sînt supratensionate inadmisibil (143%). Acest exemplu ilustrează necesitatea utilizării conductorului neutru în reţelele trifazate de distribuţie cu consumatori monofazaţi. În cazul liniilor de înaltă tensiune, care alimentează un număr mare de receptori prin staţii de transformare, dezechilibrele consumatorilor mici se compensează prin repartizarea cît mai egală a receptorilor monofazaţi pe cele trei faze şi prin utilizarea unor conexiuni speciale ale înfăşurărilor transformatoarelor. De aceea, aceste linii au sarcina practic echilibrată.

41.3. Receptor dezechilibrat în stea, fără fir neutru (fig. 41.6)

În acest caz nu sînt date tensiunile stelate ale reţelei de alimentare, ci numai tensiunile dintre faze :

$$\underline{U}_{12} = U_{12}\,e^{j\beta_{12}}, \qquad \underline{U}_{23} = U_{23}\,e^{j\beta_{23}}, \qquad \underline{U}_{31} = U_{31}\,e^{j\beta_{31}}, \qquad (41.13)$$

în general nesimetrice. Numai două din aceste mărimi sînt independente, deoarece suma lor e nulă, fiind suma unor tensiuni la borne în lungul unei curbe închise :

$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0. \tag{41.14}$$

Curenții de linie sînt dați, ca mai sus, de relațiile :

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{Z}_1} = \underline{Y}_1(\underline{V}_1 - \underline{V}_N) \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{2N}}{\underline{Z}_2} = \underline{Y}_2(\underline{V}_2 - \underline{V}_N) \\ \underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_{3N}}{\underline{Z}_3} = \underline{Y}_3(\underline{V}_3 - \underline{V}_N) \end{aligned}\right\} \tag{41.15}$$

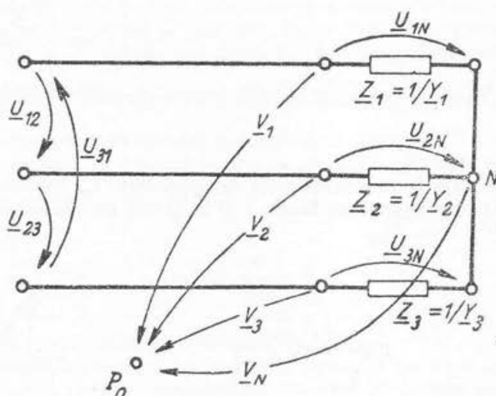


Fig. 41.6

unde $\underline{V}_N$ se determină cu teorema potențialului punctului neutru (41.7), care în acest caz se scrie :

$$\underline{V}_N = \frac{\underline{V}_1\underline{Y}_1 + \underline{V}_2\underline{Y}_2 + \underline{V}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \tag{41.16}$$

Alegerea originii potențialelor este arbitrară și poate fi un punct oarecare P_0 din spațiu. În practică se alege astfel punctul de referință P_0 al potențialelor, încît exprimarea lor în funcție de datele problemei — tensiunile dintre faze (41.13) — să se facă cît mai simplu.

Dacă tensiunile (41.13) sînt simetrice, se preferă să se aleagă drept potențial de referință (nul) potențialul pe care l-ar avea punctul 0 al rețelei de alimentare, simetrice, dacă ar fi accesibil — identic cu potențialul pe care l-ar avea o sarcină echilibrată alimentată de această rețea. Potențialele bornelor vor fi atunci tensiunile auxiliare de fază (simetrice), definite de relațiile :

$$\underline{V}_1 = \underline{U}_{1O} = \frac{\underline{U}_{12}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}; \qquad \underline{V}_2 = \underline{U}_{2O} = \frac{\underline{U}_{23}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}; \qquad \underline{V}_3 = \underline{U}_{3O} = \frac{\underline{U}_{31}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}, \tag{41.17}$$

iar potențialul neutrului va fi :

$$\underline{V}_N = \underline{U}_{NO} = \frac{\underline{U}_{1O}\underline{Y}_1 + \underline{U}_{2O}\underline{Y}_2 + \underline{U}_{3O}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}. \tag{41.18}$$

În cazul general, tensiunile (41.13) nu sînt simetrice și se poate alege nul potențialul unei faze (de ex. $\underline{V}_2$). Potențialele devin :

$$\underline{V}_2 = 0;\ \underline{V}_1 = \underline{U}_{12};\ \underline{V}_3 = \underline{U}_{32} = -\underline{U}_{23};\ \underline{V}_N = \underline{U}_{N2} = -\underline{U}_{2N}. \tag{41.19}$$

Relația (41.16) ne dă atunci chiar tensiunea pe faza a doua a receptorului (după schimbarea semnului). Pentru tensiunile de fază ale receptorului se obțin expresiile generale:

$$\left.\begin{aligned}\underline{U}_{2N} &= \frac{\underline{U}_{23}\underline{Y}_3 - \underline{U}_{12}\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}\\ \underline{U}_{3N} &= \frac{\underline{U}_{31}\underline{Y}_1 - \underline{U}_{23}\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}\\ \underline{U}_{1N} &= \frac{\underline{U}_{12}\underline{Y}_2 - \underline{U}_{31}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}\end{aligned}\right\} \tag{41.20}$$

Curenții rezultă imediat cu relațiile (41.15).

Aplicații. 1. *Dispozitiv pentru identificarea succesiunii fazelor.* Considerăm un receptor în stea (fig. 41.7, *a*), avînd pe fazele 1 și 2 cîte o lampă cu incandescență de rezistență R, iar pe faza 3 un condensator de capacitate C. Se cere că se determine raportul valorilor efective ale curenților din fazele 1 și 2, știind că tensiunile de alimentare sînt simetrice: $\underline{U}_{23} = a^2\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{31} = a\,\underline{U}_{12}$.

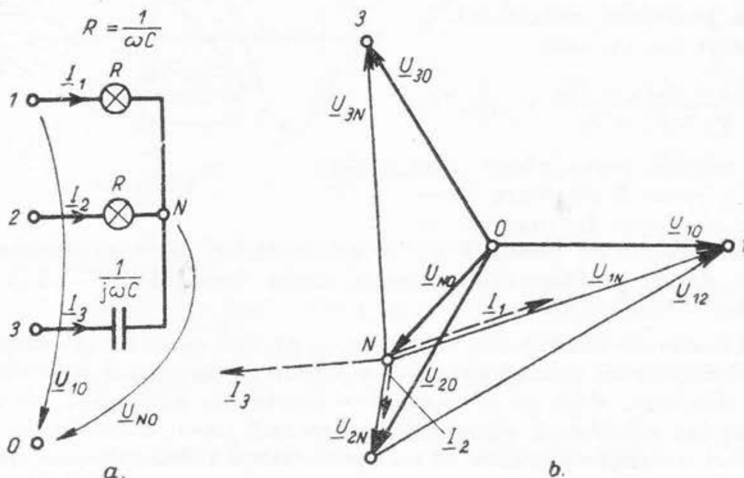


Fig. 41.7

Alegem drept referință borna fazei 2, astfel că potențialele sînt (41.19). În acest caz, $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = 1/R$, $\underline{Y}_3 = j\omega C$ și cu relațiile (41.20) rezultă tensiunea pe faza 2 a receptorului:

$$\underline{U}_{2N} = \frac{\underline{U}_{23} j\omega C - \underline{U}_{12}\dfrac{1}{R}}{\dfrac{2}{R} + j\omega C} = \underline{U}_{12}\frac{a^2 \cdot j\omega CR - 1}{2 + j\omega CR}.$$

Tensiunea pe faza 1 a receptorului rezultă:

$$\underline{U}_{1N} = \frac{\underline{U}_{12}\dfrac{1}{R} - \underline{U}_{31} j\omega C}{\dfrac{2}{R} + j\omega C} = \underline{U}_{12}\frac{1 - a \cdot j\omega CR}{2 + j\omega CR},$$

iar raportul cerut al curenților rezultă:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\left|\frac{U_{1N}}{R}\right|}{\left|\frac{U_{2N}}{R}\right|} = \left|\frac{U_{1N}}{U_{2N}}\right| = \left|\frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot j\,\omega CR}{-1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} \cdot j\,\omega CR}\right| = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}\,\omega CR + \omega^2C^2R^2}{1 - \sqrt{3}\,\omega CR + \omega^2C^2R^2}} > 1.$$

Raportul I_1/I_2 e totdeauna supraunitar, adică lampa de pe faza 1 e mai luminoasă decît lampa de pe faza 2. De aceea, acest dispozitiv se poate folosi pentru identificarea succesiunii fazelor: dacă această ordine nu e cunoscută, conectăm receptorul la cele trei borne neidentificate ale rețelei și vom ști că fazele se succed în ordinea: lampa aprinsă puternic, lampa aprinsă slab, condensatorul. Căutînd maximul raportului la R variabil, se obține condiția $R = \frac{1}{\omega C}$. pentru care

$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}73$$

$$\underline{U}_{2N} = \underline{U}_{12}\frac{\mathrm{j}a^2 - 1}{2 + \mathrm{j}} = -(0{,}154 + \mathrm{j}\,0{,}173)\,\underline{U}_{12}.$$

În figura 41.7 e desenată diagrama vectorială corespunzătoare cazului $R = 1/\omega C$.

2. *Receptor dezechilibrat cu curenți simetrici.* Determinăm condiția generală pe care trebuie să o satisfacă impedanțele neegale $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ ale unui receptor în stea, fără fir neutru, pentru ca fiind alimentat cu tensiuni simetrice, să absoarbă curenți simetrici. Cu relațiile (41.20) și (41.15), curenții au expresiile generale (care rezultă unele din altele, prin permutări circulare ale indicilor 1, 2, 3).

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{12}\underline{Y}_2\underline{Y}_1 - \underline{U}_{31}\underline{Y}_3\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \quad ; \quad \underline{I}_2 = \dots \quad ; \quad \underline{I}_3 = \dots \tag{41.21}$$

Dacă tensiunile sînt simetrice $\underline{U}_{23} = a^2\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{31} = a\underline{U}_{12}$, curenții $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$ se scriu:

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_{12}\frac{\underline{Y}_1(\underline{Y}_2 - a\underline{Y}_3)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}; \quad \underline{I}_2 = a^2\underline{U}_{12}\frac{\underline{Y}_2(\underline{Y}_3 - a\underline{Y}_1)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}, \tag{41.22}$$

Deoarece $\underline{I}_3 = -\underline{I}_1 - \underline{I}_2$, pentru ca acești curenți să fie simetrici e necesar și suficient ca $\underline{I}_2 = a^2\underline{I}_1$, adică

$$\underline{Y}_1(\underline{Y}_2 - a\,\underline{Y}_3) = \underline{Y}_2(\underline{Y}_3 - a\,\underline{Y}_1)$$

sau

$$a^2\,\underline{Y}_1\underline{Y}_2 + a\,\underline{Y}_3\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2\underline{Y}_3 = 0. \tag{41.23}$$

Introducînd impedanțele cu $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$ $(k = 1, 2, 3)$, rezultă condiția:

$$\boxed{a^2\,\underline{Z}_3 + a\,\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 = 0.} \tag{41.24}$$

Această condiție e evident satisfăcută dacă $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$, deoarece $1 + a + a^2 = 0$. Acesta e cazul banal al sarcinii echilibrate. Dar ea poate fi satisfăcută și cu impedanțe neegale, adică există receptoare dezechilibrate, alimentate cu tensiuni simetrice, care absorb curenți simetrici. Condiția (41.24) se satisface, de exemplu, cu $\underline{Z}_2 = \mathrm{j}\,\omega L = \mathrm{j}\frac{R}{\sqrt{3}}$ (o bobină ideală), $\underline{Z}_3 =$



$= \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega C} = -\mathrm{j}L\omega = -\mathrm{j}\dfrac{R}{\sqrt{3}}$ (un condensator ideal a cărui capacitate e legată de inductivitatea bobinei prin condiția de rezonanță $1 - \omega^2 LC = 0$) și $\underline{Z}_1 = R$ (v. fig. 41.8, *a*). Rezultă :

$$\underline{U}_{NO} = \frac{\underline{U}_{1O}\dfrac{1}{R} + \underline{U}_{2O}\dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} + \underline{U}_{3O}\mathrm{j}\,\omega C}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega L} + \mathrm{j}\,\omega C} = \underline{U}_{1O}(1 - \mathrm{j}a^2\sqrt{3} + \mathrm{j}a\sqrt{3}) = -2\underline{U}_{1O}.$$

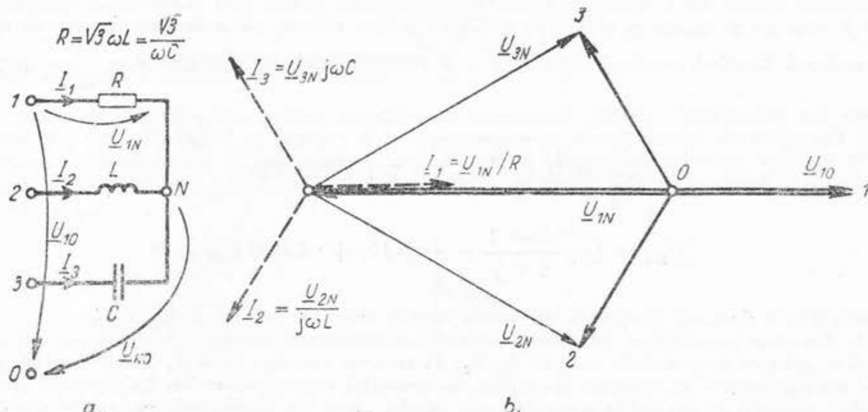


Fig. 41.8

Curenții sînt :

$$\underline{I}_1 = (\underline{U}_{1O} - \underline{U}_{NO})/R = 3\underline{U}_{1O}/R$$
$$\underline{I}_2 = (\underline{U}_{2O} - \underline{U}_{NO})/\mathrm{j}\,\omega L = 3\underline{U}_{2O}/R = a^2\underline{I}_1$$
$$\underline{I}_3 = (\underline{U}_{3O} - \underline{U}_{NO})\cdot \mathrm{j}\,\omega C = 3\underline{U}_{3O}/R = a\underline{I}_1$$

și formează un sistem trifazat simetric direct ca și tensiunile de fază ale rețelei. De observat că tensiunile de fază ale receptorului $\underline{U}_{1N} = 3\underline{U}_{1O}$, $\underline{U}_{2N} = \mathrm{j}\sqrt{3}\,\underline{U}_{2O}$ și $\underline{U}_{3N} = -\mathrm{j}\sqrt{3}\,\underline{U}_{3O}$ nu sînt simetrice (fig. 41.8, *b*).

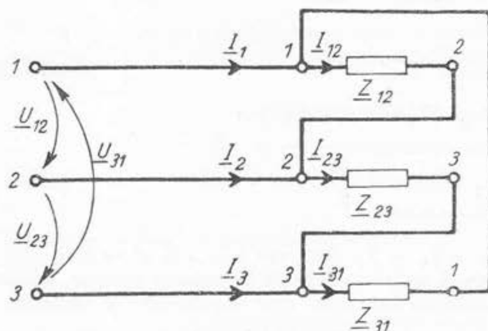


Fig. 41.9

41.4. Receptor dezechilibrat în triunghi (fig. 41.9).

Și în acest caz sînt date tensiunile dintre faze (41.13) ale rețelei de alimentare. În reprezentarea geometrică aceste tensiuni (nesimetrice) trebuie să formeze un triunghi (fig. 41.10), deoarece suma lor e nulă

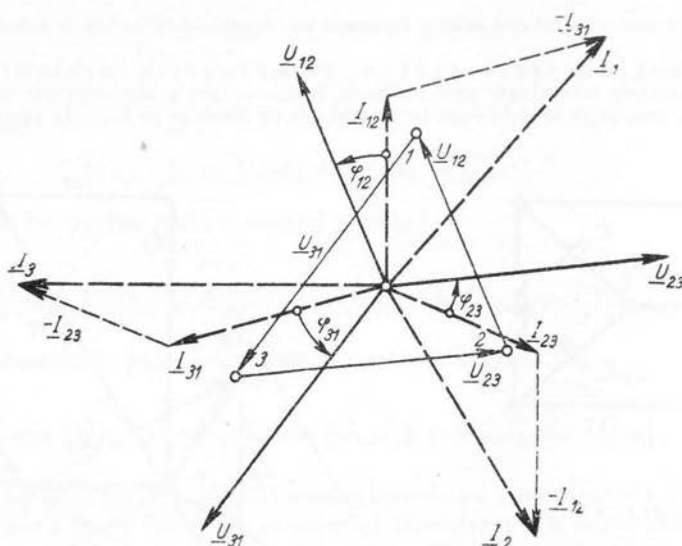


Fig. 41.10

(rel. 41.14). Cum aceste tensiuni se aplică direct laturilor triunghiului, curenții din aceste laturi — care reprezintă fazele receptorului — sînt :

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}, \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}, \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}, \tag{41.25}$$

iar curenții de linie sînt (v. și fig. 41.10)

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}, \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}. \tag{41.26}$$

Aplicație: Considerăm un receptor trifazat în triunghi (fig. 41.11, *a*) avînd :

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}, \qquad \underline{Z}_{31} = \mathrm{j}\,\omega L = \frac{\mathrm{j}}{2\,\omega C} \text{ (adică, } 2LC\,\omega^2 - 1 = 0),$$

căruia i se aplică tensiunile simetrice de succesiune directă

$$\underline{U}_{12}, \quad \underline{U}_{23} = \mathrm{a}^2\,\underline{U}_{12}, \quad \underline{U}_{31} = \mathrm{a}\,\underline{U}_{12}. \tag{41.27}$$

Se obțin curenții :

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \mathrm{j}\,\omega\,C\underline{U}_{12} - \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L}\,\mathrm{a}^2\,\underline{U}_{12} = -\,\omega\,C\,\sqrt{3}\,\underline{U}_{12}\\
\underline{I}_2 &= \mathrm{a}^2\mathrm{j}\,\omega\,C\underline{U}_{12} - \mathrm{j}\,\omega\,C\underline{U}_{12} = -\,\omega C\sqrt{3}\,\underline{U}_{12}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{a}\,\underline{I}_1\\
\underline{I}_3 &= \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega L}\,\mathrm{a}\,\underline{U}_{12} - \mathrm{j}\,\omega\,C\mathrm{a}^2\underline{U}_{12} = -\,\omega C\sqrt{3}\,\underline{U}_{12}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{a}^2\,\underline{I}_1.
\end{aligned} \tag{41.28}$$

14—1668

Se observă că în acest caz cei trei curenți formează un sistem simetric, dar de succesiune inversă (v. fig. 41.11, *b*).

Observații privitoare la receptoarele dezechilibrate:
a) Dacă impedanțele echivalente serie ale liniei de alimentare a unui receptor în triunghi nu sînt neglijabile, trebuie să se ia în considerare căderile de tensiune pe linie. În acest scop, receptorul în triunghi (fig. 41.12, *a*) trebuie transfigurat într-un receptor în stea (fig. 41.12, *b*), pentru a putea calcula impedanțe echivalente pe fiecare fază, prin însumarea celor două impedanțe în serie : a liniei și a receptorului echivalent. Se obține un receptor dezechilibrat în stea, care se studiază cu teorema potențialului punctului neutru.

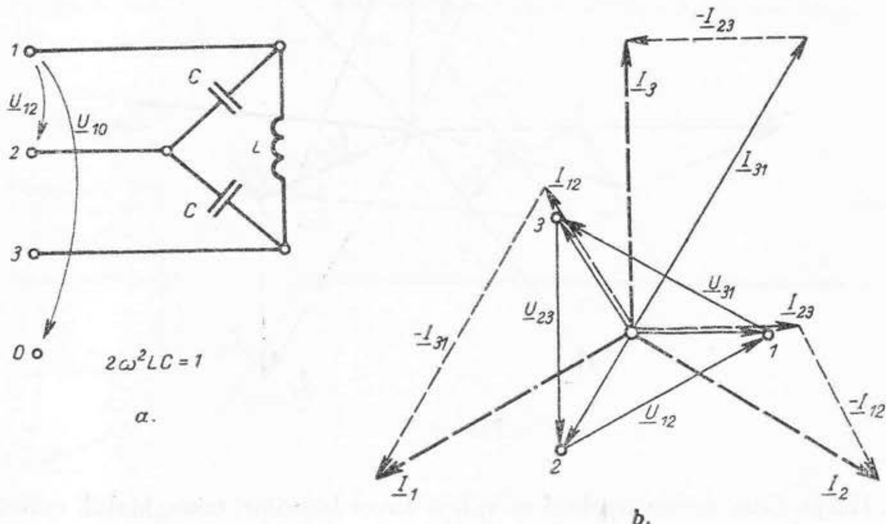


Fig. 41.11

b) Dacă există impedanțe mutuale între laturile receptorului, metodele prezentate în acest capitol nu sînt, în general, aplicabile și trebuie să se utilizeze teoremele lui Kirchhoff.

c) Dacă un generator alimentează mai multe receptoare dezechilibrate în stea, cu neutrele izolate, potențialele acestor neutre nu coincid și stelele nu pot fi conectate cu laturile omologe în paralel. În acest caz se pot transfigura stelele în triunghiuri, laturile omologe ale tuturor acestor triunghiuri fiind în paralel, ceea ce permite să se găsească un receptor echivalent în triunghi pentru întreaga rețea.

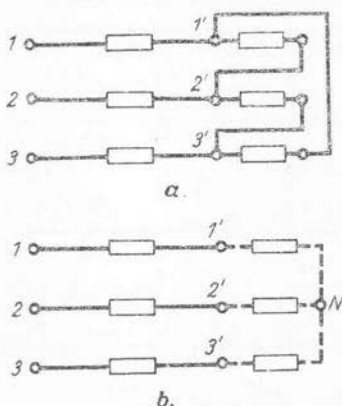


Fig. 41.12

41.5. Puteri în rețele trifazate dezechilibrate

41.5.1. Rețele trifazate cu fir neutru. În cazul sistemelor de transmisiune trifazate cu fir neutru, zise „cu patru fire" (v. fig. 41.13), *puterea complexă* (37.22) este :

$$\underline{S}_b = \underline{V}_1\underline{I}_1^* + \underline{V}_2\underline{I}_2^* + \underline{V}_3\underline{I}_3^* + \underline{V}_O(-\underline{I}_N^*) \quad (41.29)$$

și, cum

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3, \quad \text{iar} \quad \underline{V}_k - \underline{V}_O = \underline{U}_{kO} \ (k = 1, 2, 3),$$

se obține expresia:

$$\underline{S}_b = \underline{U}_{1O}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{2O}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{3O}\underline{I}_3^*. \tag{41.30}$$

Puterea activă e partea reală a acestei expresii,

$$P_b = U_{1O}I_1 \cos(\widehat{\underline{U}_{1O}\underline{I}_1}) + U_{2O}I_2 \cos(\widehat{\underline{U}_{2O}\underline{I}_2}) + U_{3O}I_3 \cos(\widehat{\underline{U}_{3O}\underline{I}_3}), \tag{41.31}$$

iar *puterea reactivă* e partea imaginară a acestei expresii,

$$Q_b = U_{1O}I_1 \sin(\widehat{\underline{U}_{1O}\underline{I}_1}) + U_{2O}I_2 \sin(\widehat{\underline{U}_{2O}\underline{I}_2}) + U_{3O}I_3 \sin(\widehat{\underline{U}_{3O}\underline{I}_3}). \tag{41.32}$$

În relațiile (41.30), (41.31), (41,32) numai sumele au o semnificație determinată: puterea primită pe la borne de receptorul considerat. În cazul general, fiecare termen în parte al acestor sume nu este localizabil, în sensul că nu se poate asocia unei anumite faze. Unii dintre termenii puterii active, de exemplu, pot fi negativi, întreaga putere fiind pozitivă așa cum e necesar, dacă receptorul e pasiv. Expresia (41.32) a puterii active corespunde măsurării acestei puteri cu trei wattmetri (fig. 41.13).

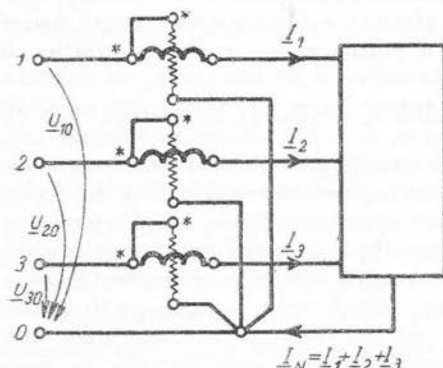


Fig. 41.13

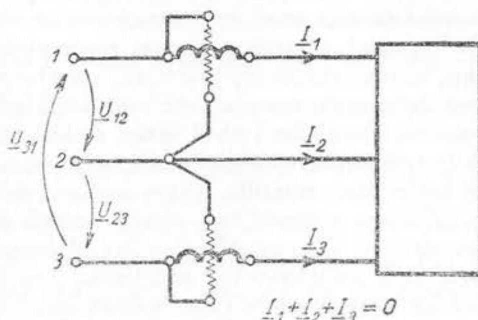


Fig. 41.14

41.5.2. **Rețele trifazate fără fir neutru.** În cazul sistemelor de transmisiune fără fir neutru, zise „cu trei fire“ (fig. 41.14), puterea complexă este:

$$\underline{S}_b = \underline{V}_1\underline{I}_1^* + \underline{V}_2\underline{I}_2^* + \underline{V}_3\underline{I}_3^*, \tag{41.33}$$

cu punct de referință arbitrar pentru potențiale. În montajul de măsurare a puterii active cu trei wattmetri, punctul comun al bobinelor lor de tensiune

poate fi legat oriunde în rețea sau poate fi lăsat liber. Dacă se alege una dintre faze, de exemplu faza 2, ca referință, se obțin expresiile :

$$S_b = \underline{U}_{12}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{32}\underline{I}_3^* = \underline{U}_{12}^*\underline{I}_1^* - \underline{U}_{23}^*\underline{I}_3^* \tag{41.34}$$

$$P_b = U_{12}I_1 \cos (\widehat{\underline{U}_{12}, \underline{I}_1}) + U_{32}I_3 \cos (\widehat{\underline{U}_{32}, \underline{I}_3}) \tag{41.35}$$

$$Q_b = U_{12}I_1 \sin (\widehat{\underline{U}_{12}, \underline{I}_1}) + U_{32}I_3 \sin (\widehat{\underline{U}_{32}, \underline{I}_3}). \tag{41.36}$$

Expresia (41.35) a puterii active corespunde măsurării acestei puteri cu doi wattmetri (fig. 41.14).

42. METODA COMPONENTELOR SIMETRICE

Calculul regimurilor trifazate nesimetrice [1] prezintă importanță practică în construcția și exploatarea sistemelor electroenergetice. Dimensionarea și protejarea rețelelor electrice trifazate necesită calculul unor regimuri de avarie nesimetrice (scurtcircuite între o fază și pămînt, scurtcircuite între două faze și pămînt, întreruperea unei faze etc.). Regimuri nesimetrice se creează uneori și în mod intenționat, de exemplu pentru pornirea sau reglarea turației la motoarele asincrone trifazate.

Studiul acestor regimuri nesimetrice într-o rețea cu un număr mare de linii, transformatoare electrice, generatoare și motoare electrice trifazate conduce la necesitatea rezolvării unui sistem de ecuații cu un număr mare de necunoscute. Rezolvarea unui astfel de sistem este îngreuiată considerabil de faptul că în prezența cuplajelor magnetice, mai ales între elementele mobile ale mașinilor electrice, relațiile dintre tensiuni și intensitățile curenților sînt complicate.

Pentru a simplifica aceste ecuații și schemele electrice echivalente corespunzătoare, electrotehnicienii au elaborat metode de calcul bazate pe utilizarea unor noi necunoscute, auxiliare. Aceste mărimi necunoscute auxiliare sînt numite componente (ale tensiunilor, curenților etc.). Prin trecerea la noile necunoscute, sistemul de ecuații se simplifică. Schemele electrice echivalente corespunzătoare se simplifică și ele. Cele mai răspîndite metode pentru calculul regimurilor trifazate nesimetrice ale unor circuite liniare sînt cele care utilizează ca mărimi de calcul auxiliare „componentele simetrice", „componentele α, β, O" sau „componentele d, q, O". În cele care urmează se expune *metoda componentelor simetrice*, care este cea mai răspîndită.

---

[1] În acest curs, termenii *simetric* și *nesimetric* se referă exclusiv la sistemele trifazate de *mărimi sinusoidale* (tensiuni, curenți etc.), respectiv la *regimurile* caracterizate prin aceste mărimi; iar termenii *echilibrat* și *dezechilibrat* se referă exclusiv la elementele trifazate *de rețea* : receptoare, generatoare, linii etc. (adică la sistemele de impedanțe).

Metoda componentelor simetrice se bazează pe descompunerea sistemelor de mărimi trifazate nesimetrice (tensiuni electromotoare etc.) în trei sisteme componente trifazate simetrice şi pe principiul suprapunerii efectelor (ea se poate aplica deci numai circuitelor liniare sau practic liniare). Astfel, calculul unui regim trifazat nesimetric se reduce, pentru circuite echilibrate sau porţiuni echilibrate de circuit, la calculul a trei regimuri simetrice (corespunzătoare cîte unuia dintre cele trei sisteme simetrice componente). Calculul regimurilor simetrice fiind mai simplu decît calculul regimurilor nesimetrice, metoda e avantajoasă atunci cînd numărul de elemente dezechilibrate e mic faţă de numărul de elemente echilibrate.

Cînd circuitul studiat conţine maşini electrice, metoda componentelor simetrice e singura practic utilizabilă, deoarece ecuaţiile şi schemele electrice echivalente ale maşinilor se exprimă mult mai simplu pentru componentele simetrice decît pentru sistemele nesimetrice de curenţi şi tensiuni. În particular, un generator electric trifazat, echilibrat, admite o schemă echivalentă (de ex. în stea) cu trei generatoare monofazate, cu impedanţe interne egale, necuplate inductiv între ele numai pentru curenţi de fază simetrici (v. Observaţia *b* de la par. 42.1.4, *b*).

42.1. Descompunerea unui sistem trifazat de mărimi în trei sisteme componente trifazate simetrice

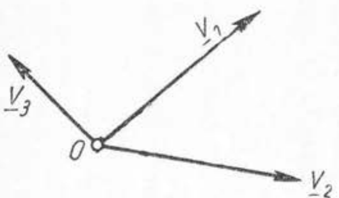
42.1.1. Teorema lui Fortescue. La baza metodei componentelor simetrice stă ideia descompunerii unui sistem trifazat, ordonat de mărimi sinusoidale (nesimetric) în trei sisteme de mărimi sinusoidale trifazate simetrice, adică avînd amplitudini egale şi defazaje relative egale, de valoare $+\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$ sau 0. Cele trei sisteme se numesc : sistemul de succesiune directă sau *sistemul direct* $\left(\text{în care fiecare dintre mărimi e defazată înaintea celei care îi succede cu } \frac{2\pi}{3}\right)$, introdus în paragraful 39.1; sistemul de succesiune inversă sau *sistemul invers* $\left(\text{în care fiecare dintre mărimi e defazată în urma celei care îi succede cu } \frac{2\pi}{3}\right)$, introdus, de asemenea, în paragraful 39.1; *sistemul omopolar*, care e un sistem ordonat de mărimi sinusoidale, cu amplitudini egale şi în fază.

În figura 42.1 e prezentată simbolic această descompunere, fiecare în reprezentare geometrică, sistemul oarecare nesimetric (*a*) are fiecare fazor egal cu suma fazorilor corespunzători ai unui sistem omopolar (*b*), direct(*c*), şi invers(*d*).

Descompunerea unui sistem ordonat trifazat nesimetric ($\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$) în sistemele sale componente simetrice este definită în complex de următoarele relaţii între mărimile acestor sisteme :

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= \underline{V}_{h1} + \underline{V}_{d1} + \underline{V}_{i1}\ ^{1} \\ \underline{V}_2 &= \underline{V}_{h2} + \underline{V}_{d2} + \underline{V}_{i2} \\ \underline{V}_3 &= \underline{V}_{h3} + \underline{V}_{d3} + \underline{V}_{i3} \end{aligned} \tag{42.1}$$

[1] Indicele *h* pentru „omopolar" provine de la grafia originară „homopolar".



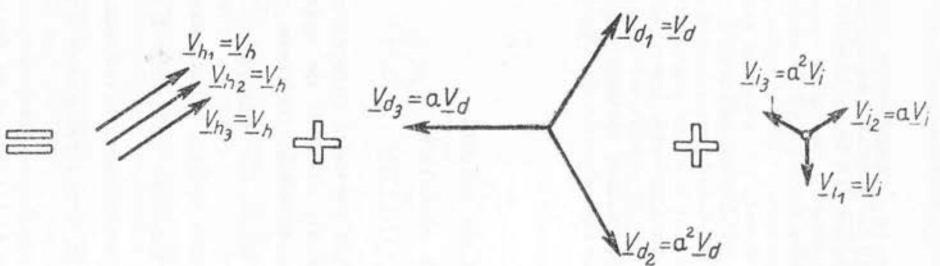


Fig. 42.1

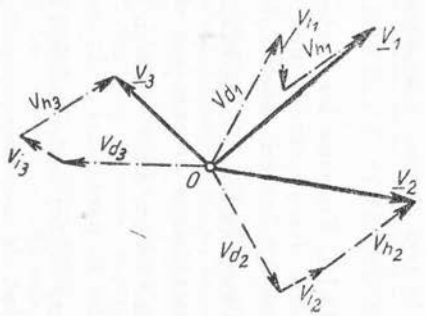


Fig. 42.2

Posibilitatea obținerii unui sistem de mărimi trifazat nesimetric prin compunerea a trei sisteme componente simetrice este ilustrată în figura 42.2, în care se prezintă operațiile grafice corespunzătoare relațiilor (42.1).

Cele trei mărimi ale fiecăruia dintre sistemele componente simetrice se pot exprima simplu, cu ajutorul operatorului $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$, în funcție de mărimea corespunzătoare fazei 1 a sistemului respectiv, numită mărime fundamentală a sistemului:

$$\underline{V}_{h1} = \underline{V}_h; \ \underline{V}_{h2} = \underline{V}_h; \ \underline{V}_{h3} = \underline{V}_h \tag{42.2}$$

$$\underline{V}_{d1} = \underline{V}_d; \ \underline{V}_{d2} = a^2\underline{V}_d; \ \underline{V}_{d3} = a\underline{V}_d \tag{42.3}$$

$$\underline{V}_{i1} = \underline{V}_i; \ \underline{V}_{i2} = a\underline{V}_i; \ \underline{V}_{i3} = a^2\underline{V}_i. \tag{42.4}$$

Mărimile fundamentale $\underline{V}_h$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$ se numesc respectiv componenta omopolară, componenta directă și componenta inversă a sistemului de mărimi trifazat nesimetric dat ($\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$).

Descompunerea unui sistem de mărimi trifazat în trei sisteme componente simetrice (42.1) se exprimă cu ajutorul componentelor simetrice sub forma:

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= \underline{V}_h + \underline{V}_d + \underline{V}_i \\ \underline{V}_2 &= \underline{V}_h + a^2\underline{V}_d + a\underline{V}_i \\ \underline{V}_3 &= \underline{V}_h + a\underline{V}_d + a^2\underline{V}_i. \end{aligned} \tag{42.5}$$

Deoarece determinantul sistemului de ecuații (42.5) este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = 3\sqrt{3}\,j,$$

diferit de zero, rezultă că se poate determina întotdeauna un sistem, și numai unul, de valori $\underline{V}_h$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$, care să satisfacă aceste ecuații.

Ca urmare, descompunerea oricărui sistem trifazat ordonat de mărimi sinusoidale în trei sisteme componente simetrice, unul omopolar, unul direct și unul invers, este unică și totdeauna posibilă (Teorema lui Fortescue, 1918).

42.1.2. **Calculul componentelor simetrice.** Calculul componentelor simetrice, corespunzătoare unui sistem dat de mărimi trifazat nesimetric, se face pe baza relațiilor (42.6). Aceste relații:

$$\begin{aligned} \underline{V}_h &= \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3) \\ \underline{V}_d &= \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3) \\ \underline{V}_i &= \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3) \end{aligned} \tag{42.6}$$

se obțin prin rezolvarea sistemului de ecuații (42.5) în raport cu $\underline{V}_h$, $\underline{V}_d$ și $\underline{V}_i$. Prima din ecuațiile (42.6) se obține adunînd cele trei ecuații (42.5) și observînd că $a^2 + a + 1 = 0$. A doua ecuație (42.6) se obține înmulțind a doua și a

treia ecuație din (42.5) cu $\underline{a}$, respectiv $\underline{a}^2$, și apoi adunînd ecuațiile astfel obținute. A treia ecuație se obține analog.

Aplicații : Să se determine componentele simetrice ale sistemnului de mărimi cu imaginile complexe :

$$\underline{V}_1 = V, \quad \underline{V}_2 = 0, \quad \underline{V}_3 = 0. \tag{42.7}$$

Aplicînd relațiile (42.6), se obține :

$$\underline{V}_h = \underline{V}_d = \underline{V}_i = \frac{V}{3}. \tag{42.8}$$

Acest caz corespunde, în particular, sistemului de curenți dintr-o linie care are fazele 2 și 3 întrerupte. Se recomandă ca exercițiu să se determine componentele simetrice ale curenților dintr-o linie la care se întrerup fazele 1 și 2.

2. *Să se calculeze componentele simetrice ale sistemului de tensiuni electrice cu valorile instantanee :*

$$u_1 = 10\sqrt{2}\sin 2\pi\cdot 50\cdot t \text{ V}$$

$$u_2 = u_3 = 10\sqrt{2}\sin\left(2\pi\cdot 50\cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}.$$

Reprezentarea în complex a acestor tensiuni este :

$$\underline{V}_1 = 10 \text{ V}, \qquad \underline{V}_2 = \underline{V}_3 = \text{j } 10 \text{ V}.$$

Valorile complexe ale componentelor simetrice se calculează cu ajutorul relațiilor (42.6) :

$$\underline{V}_h = \frac{1}{3}(10 + \text{j}\,10 + \text{j}10) = \frac{10}{3}(1 + \text{j}\,2) \text{ V}$$

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(10 + \text{a}\cdot\text{j}\,10 + a^2\cdot\text{j}\,10) = \frac{10}{3}(1 - \text{j}) \text{ V}$$

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3}(10 + a^2\cdot\text{j}\,10 + \text{a}\cdot\text{j}\,10) = \frac{10}{3}(1 - \text{j}) \text{ V}.$$

Valorile instantanee ale componentelor simetrice ale tensiunilor sînt :

$$u_h = \frac{10}{3}\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\sin(2\pi\cdot 50t + \text{arc tg } 2) \text{ V}$$

$$u_d = u_i = \frac{10}{3}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(2\pi\cdot 50t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}.$$

Valorile instantanee ale tuturor mărimilor sistemelor componente simetrice se obțin simplu, pe baza definiției acestor sisteme. De exemplu, sistemul de componente simetrice de succesiune directă este format din următoarele mărimi :

$$u_{d1} = \frac{10}{3}\sqrt{2}\sqrt{2}\sin\left(2\pi\cdot 50t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}$$

$$u_{d2} = \frac{10}{3}\sqrt{2}\sqrt{2}\sin\left(2\pi\cdot 50t - \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ V}$$

$$u_{d3} = \frac{10}{3}\sqrt{2}\sqrt{2}\sin\left(2\pi\cdot 50t - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ V}.$$

42.1.3. **Determinarea grafică a componentelor simetrice.** Fazorii componentelor simetrice se pot determina simplu și intuitiv prin realizarea grafică a operațiilor de însumare și rotire corespunzătoare relațiilor (42.6) sau a unor operații echivalente cu acestea. În figura 42.3 se indică obținerea fazorilor $3\underline{V}_0$, $3\underline{V}_d$ și $3\underline{V}_i$, pe baza unor operații care corespund respectiv cu prima, a doua și a treia ecuație din (42.6). S-au elaborat însă și metode grafice simplificate.

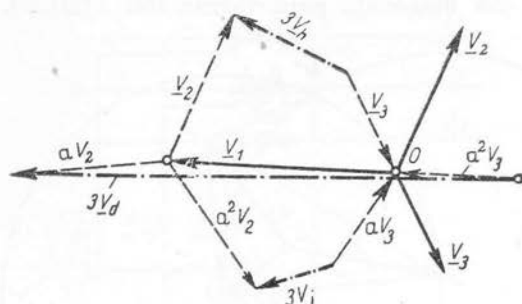


Fig. 42.3

1. *Metodă grafică simplificată pentru determinarea componentelor directă și inversă* : Această metodă se bazează pe exprimarea componentelor simetrice directe și inverse ale unui sistem $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$, în funcție de mărimile diferență :

$$\underline{V}_{12} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2, \quad \underline{V}_{23} = \underline{V}_2 - \underline{V}_3. \tag{42.9}$$

Utilizînd expresiile lui $\underline{V}_1$ și $\underline{V}_3$ care rezultă din relațiile precedente, a doua și a treia ecuație (42.6) se pot pune sub forma :

$$\begin{aligned} 3\underline{V}_d &= (\underline{V}_{12} + \underline{V}_2) + a\underline{V}_2 + a^2(\underline{V}_2 - \underline{V}_{23}) = \underline{V}_{12} + e^{j\frac{\pi}{3}}\,\underline{V}_{23} \\ 3\underline{V}_i &= (\underline{V}_{12} + \underline{V}_2) + a^2\underline{V}_2 + a(\underline{V}_2 - \underline{V}_{23}) = \underline{V}_{12} + e^{-j\frac{\pi}{3}}\,\underline{V}_{23} \end{aligned} \tag{42.10}$$

(s-a folosit identitatea $1 + a + a^2 = 0$).

Aceste relații arată că suma dintre fazorul diferență $\underline{V}_{12}$ și fazorul $\underline{V}_{23}$, rotit cu $\frac{\pi}{3}$ (în sens trigonometric direct), este egală cu $3\underline{V}_d$. Dacă la același fazor diferență $\underline{V}_{12}$ se adună fazorul $\underline{V}_{23}$, rotit cu $-\frac{\pi}{3}$ (adică în sens invers), se obține fazorul $3\underline{V}_i$. Construcțiile grafice respective sînt realizate în figura 42.4, *a*. Observînd că punctele M' și M'' sînt vîrfurile celor două triunghiuri echilaterale, care au segmentul $\overline{23}$ ca bază, construcția se reduce practic (fig. 42.4, *b*) la trasarea a două arce de cerc necesare determinării acestor vîrfuri și la construirea vectorilor $M'1$, $M''2$, care reprezintă mărimile $3\underline{V}_d$ și $3\underline{V}_i$. Pentru a distinge cei doi vectori, remarcăm că originea vectorului $3\underline{V}_d$ se află în originea vectorului $\underline{V}_{23}$, rotit în jurul extremității sale cu 60° în sens trigonometric.

2. *Metodă grafică simplificată pentru determinarea componentei omopolare :* Utilizînd mărimile diferență, prima ecuație din (42,6) se poate pune sub forma :

$$\underline{V}_h = \frac{1}{3}[(\underline{V}_{12} + \underline{V}_2) + \underline{V}_2 + (\underline{V}_2 - \underline{V}_{23})] = \underline{V}_2 + \frac{1}{3}(\underline{V}_{12} - \underline{V}_{23}). \tag{42.11}$$

Examinînd figura 42.5, se observă că vectorul BG, care reprezintă mărimea $\frac{1}{3}(\underline{V}_{12} - \underline{V}_{23})$, are extremitatea în centrul de greutate G al triunghiului ABC (Deoarece BG reprezintă o treime din diagonala paralelogramului $ABCD$).

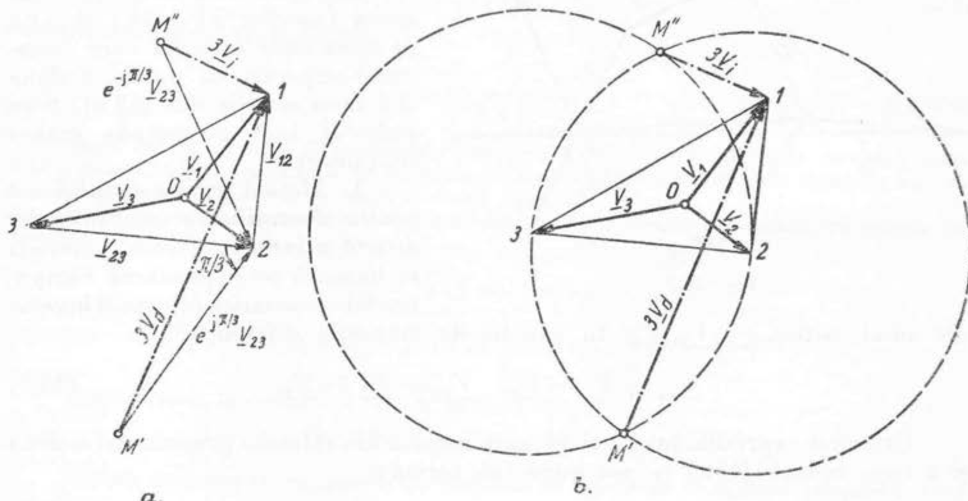


Fig. 42.4

Rezultă că pentru determinarea componentei omopolare $\underline{V}_b$ a unui sistem $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$ este suficient să se unească originea comună a acestor vectori cu centrul de greutate G al triunghiului, avînd ca vîrfuri extremitățile vectorilor dați.

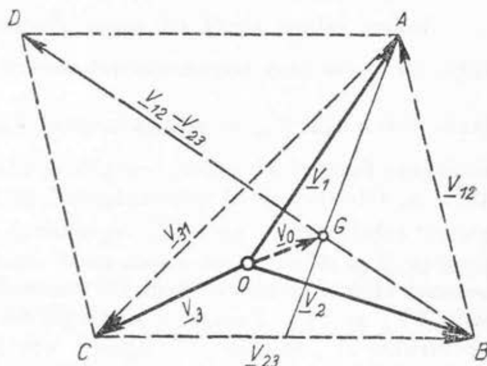


Fig. 42.5

42.1.4. Filtre de componente simetrice. În acest paragraf se vor prezenta cîteva exemple de circuite electrice, la a căror borne de ieșire se obțin componentele simetrice ale sistemului trifazat de mărimi, aplicat la bornele lor de intrare. Astfel de circuite electrice se numesc *filtre de componente simetrice.*

Mai general, acest nume se dă tuturor circuitelor electrice, la ale căror borne de ieșire se obțin mărimi sinusoidale cu valori efective proporționale cu valoarea efectivă a unei componente simetrice (corespunzătoare mărimilor aplicate la bornele de intrare).

Filtrele de componente simetrice se utilizează în numeroase instalații de protecție automată împotriva regimurilor nesimetrice de avarie, precum și în măsurări.

1. *Filtre de componente omopolare.* Cel mai simplu filtru pentru obținerea componentei omopolare a unui sistem de curenți e format din trei transformatoare de curent, cu înfășurările secundare legate în paralel (de ex. la bornele unui ampermetru) (fig. 42.6, *a*).

În figura 42.6, *b* se reprezintă un filtru pentru măsurarea componentei omopolare a unui sistem de tensiuni, format din trei transformatoare de tensiune, cu secundarele legate în serie. În aceste scheme, *k* este raportul de transformare al transformatoarelor respective.

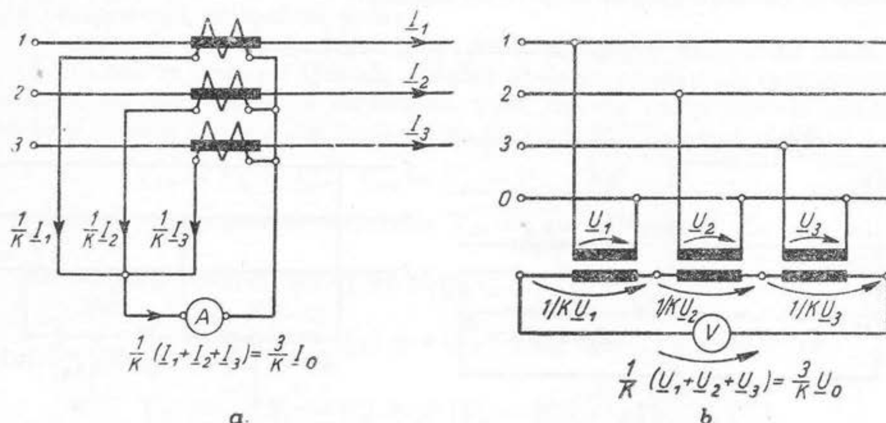


Fig. 42.6

2. *Filtru pentru componenta inversă (sau directă) a unui sistem de curenţi fără componentă omopolară* : În figura 42.7 este reprezentată schema unui filtru care permite determinarea componentei inverse a unui sistem de curenţi. Acest filtru funcţionează corect numai dacă componenta omopolară a sistemului de curenţi e nulă, adică dacă suma intensităţilor celor trei curenţi e nulă $i_1 + i_2 + i_3 = 3\ i_h = 0$ (de ex. curenţii de linie la un sistem trifazat fără fir neutru). Curentul măsurat de ampermetrul *A* se poate stabili cu teorema lui Thévenin.

Tensiunea în gol între bornele *M* şi *N* este egală cu

$$\underline{U}_{MN_0} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3.$$

În ipoteza făcută ($\underline{I}_h = 0$), exprimînd curenţii în funcţie de componentele lor simetrice, conform relaţiilor (42.5), se obţine :

$$\underline{U}_{MN_0} = \underline{Z}_1(\underline{I}_d + \underline{I}_i) + \underline{Z}_3 (\mathrm{a}\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i) = (\underline{Z}_1 + \mathrm{a}\underline{Z}_3)\underline{I}_d + (\underline{Z}_1 + \mathrm{a}^2\underline{Z}_3)\underline{I}_i.$$

Dacă impedanţele sînt astfel alese încît să satisface relaţia :

$$\underline{Z}_1 + \mathrm{a}\ \underline{Z}_3 = 0, \tag{42.12}$$

circuitul funcţionează ca filtru, care dă o tensiune $\underline{U}_{MN_0}$, proporţională cu componenta inversă $\underline{I}_i$. Conform teoremei lui Thévenin, intensitatea curentului $\underline{I}_A$ din ampermetrul conectat între bornele *MN* va fi proporţională cu $\underline{U}_{MN_0}$, şi deci cu componenta inversă $\underline{I}_i$.

Practic, un astfel de filtru se poate realiza, de exemplu, luînd un rezistor ca element de impedanţă $\underline{Z}_1 = r$ şi ca element de impedanţă $\underline{Z}_3 = \frac{1}{2} r + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2} r$, un rezistor de rezistenţă $\frac{r}{2}$ legat în serie cu o bobină de reactanţă $X = \frac{\sqrt{3}}{2} r$.

Dacă se asigură satisfacerea egalităţii $\underline{Z}_1 + \mathrm{a}^2\underline{Z}_3 = 0$, tensiunea de mers în gol $\underline{U}_{MN_0}$, şi deci curentul $\underline{I}_A$, sînt proporţionale cu componenta directă $\underline{I}_d$. Acelaşi rezultat se obţine cu filtrul din figura 42.7, dacă se intervertesc fazele 2 şi 3 (v. observaţia de la sfîrşitul acestui paragraf).

3. *Filtru pentru componenta directă (inversă) a unui sistem de tensiuni de linie*: Determinarea componentei inverse a unui sistem de tensiuni de linie se realizează adesea cu filtrul cu patru elemente, reprezentat în figura 42.8.
Tensiunea în gol între punctele M și N are expresia:

$$\underline{U}_{MN0} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{Z}_2 + \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}\underline{Z}_3.$$

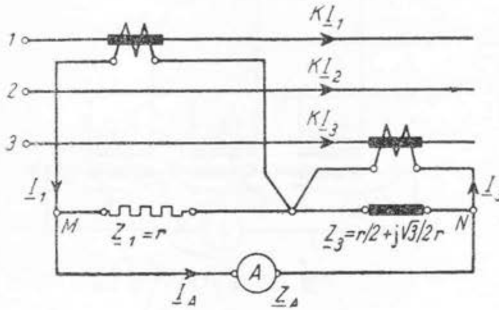


Fig. 42.7

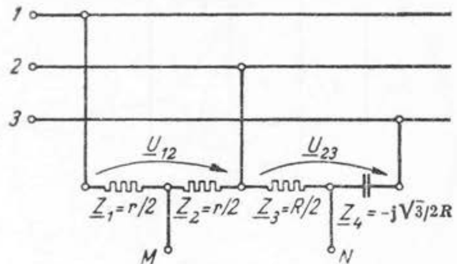


Fig. 42.8

Suma tensiunilor de linie fiind nulă, componenta lor omopolară e nulă și deci:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_d + \underline{U}_i, \quad \underline{U}_{23} = a^2\underline{U}_d + a\underline{U}_i.$$

Ca urmare, tensiunea $\underline{U}_{MN_0}$ se poate scrie sub forma:

$$\underline{U}_{MN0} = \left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + a^2\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}\right)\underline{U}_d + \left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + a\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}\right)\underline{U}_i.$$

Dacă cele patru impedanțe satisfac condiția:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + a\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = 0 \tag{42.13}$$

(care se verifică ușor pentru schema din fig. 42.8), tensiunea la ieșirea filtrului e proporțională cu $\underline{U}_d$.

În sarcină, conform teoremei lui Thévenin, curentul și tensiunea la ieșirea filtrului vor fi proporționali cu $\underline{U}_d$.

Observație: Din relația (42.6) rezultă că componenta directă $\underline{V}_d$ a sistemului trifazat $(\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3)$,

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3),$$

e egală cu componenta inversă $\underline{V}_i$ a sistemului (V_1, V_3, V_2),

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_3 + a\underline{V}_2).$$

Ca urmare, orice filtru care servește la măsurarea componentelor directe permite și măsurarea componentelor inverse: pentru aceasta e suficient să se inverseze, la intrarea filtrului, fazele 2 cu 3.

42.1.5. Cîteva proprietăți ale componentelor simetrice ale tensiunilor și curenților. *a*) **Prima ecuație din (42.6) arată că sistemele de mărimi trifazate, a căror sumă este zero, au o componentă omopolară egală cu zero.**

Din aceasta rezultă, în particular, că :

— sistemele de curenți din elemente de circuit trifazate cu conexiunea în stea cu punct neutru izolat (fără conductor neutru sau punere la pămînt) au o componentă omopolară nulă;

— sistemele de tensiuni de linie au componentă omopolară nulă.

b) În cele ce urmează, pentru a stabili unele proprietăți ale componentelor simetrice ale tensiunilor și curenților, vom calcula componentele simetrice directe și inverse V_{ld}, V_{li} ale unui sistem de mărimi diferențe de forma :

$$\underline{V}_{12} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2, \quad \underline{V}_{23} = \underline{V}_2 - \underline{V}_3, \quad \underline{V}_{31} = \underline{V}_3 - \underline{V}_1, \tag{42.14}$$

în funcție de componentele simetrice $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$ ale sistemului de mărimi $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$.

Cu ajutorul relației (42.6) se obține :

$$\underline{V}_{ld} = \frac{1}{3}[(\underline{V}_1 - \underline{V}_2) + a(\underline{V}_2 - \underline{V}_3) + a^2(\underline{V}_3 - \underline{V}_1)]$$

$$\underline{V}_{li} = \frac{1}{3}[(\underline{V}_1 - \underline{V}_2) + a^2(\underline{V}_2 - \underline{V}_3) + a(\underline{V}_3 - \underline{V}_1)].$$

Exprimînd mărimile $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$, în funcție de componentele lor simetrice, relațiile (42.5), se obține :

$$V_{ld} = (1 - a^2)\underline{V}_d = \sqrt{3}\, e^{j\frac{\pi}{6}}\underline{V}_d$$

$$V_{li} = (1 - a)\underline{V}_i = \sqrt{3}\, e^{-j\frac{\pi}{6}}\underline{V}_i. \tag{42.15}$$

Relațiile precedente se pot pune sub forma :

$$\underline{V}_d = \frac{1}{\sqrt{3}} V_{ld}\, e^{-j\frac{\pi}{6}} \qquad \underline{V}_i = \frac{1}{\sqrt{3}} V_{li}\, e^{j\frac{\pi}{6}}. \tag{42.16}$$

Aceste ultime relații exprimă, în particular, relațiile dintre componentele simetrice directe și inverse ale tensiunilor de fază și de linie la un circuit trifazat cu conexiunea în stea.

Pentru valorile efective ale acestor mărimi rezultă :

$$U_d = \frac{U_{ld}}{\sqrt{3}}, \qquad U_i = \frac{U_{li}}{\sqrt{3}}. \tag{42.17}$$

Ca urmare :

Toate circuitele trifazate conectate în stea la un același sistem de tensiune de linie au aceleași componente simetrice directe și inverse de tensiune, oricare ar fi punctul neutru la care se raportează.

c) Aceeași relație (42.15) se utilizează la calcularea componentelor simetrice directe și inverse ale curenților de linie, în funcție de curenții de fază la un circuit cu conexiunea în triunghi.

Pentru valorile efective ale acestor mărimi rezultă :

$$I_{ld} = \sqrt{3}\, I_d, \quad I_{li} = \sqrt{3}\, I_i. \tag{42.18}$$

d) Nesimetria sistemelor trifazate de mărimi se apreciază prin :

— *gradul de disimetrie* definit ca raportul dintre valoarea efectivă a componentei inverse și valoarea efectivă a componentei directe a sistemului de mărimi :

$$\varepsilon_i = \frac{V_i}{V_d} \tag{42.19}$$

— *gradul de asimetrie* definit ca raportul dintre valoarea efectivă a componentei omopolare și valoarea efectivă a componentei directe a sistemului de mărimi :

$$\varepsilon_h = \frac{V_h}{V_d}. \tag{42.20}$$

În practică, un sistem de curenți sau de tensiuni este considerat simetric, dacă are atît gradul de disimetrie cît și gradul de asimetrie mai mici decît 0,05.

42.2. Circuite trifazate echilibrate alimentate cu tensiuni nesimetrice

Dacă unui circuit trifazat echilibrat i se aplică un sistem de tensiuni trifazat simetric, atunci (v. par. 40) sistemul de curenți din circuit va fi și el simetric și va avea aceeași succesiune a fazelor ca și echilibrat de tensiuni. Este adevărată și afirmația inversă : într-un circuit echilibrat, un sistem de curenți simetric de o succesiune oarecare determină un sistem de tensiuni simetric și cu o aceeași succesiune ca și sistemul de curenți.

Calculul regimurilor nesimetrice al circuitelor liniare trifazate echilibrate se face pe baza teoremei superpoziției. Se studiază separat fiecare din regimurile corespunzătoare cîte unuia din sistemele componente simetrice ale tensiunilor, și apoi se suprapun efectele acestor sisteme de tensiuni.

Rezultă că în orice circuit echilibrat sistemele componente simetrice de succesiuni diferite sînt independente între ele.

Suprapunerea lor corespunde compunerii componentelor simetrice conform relațiilor (42.5).

Este important de remarcat că, datorită caracterului echilibrat al circuitelor studiate, este suficient să se considere cîte o singură fază (și conductorul neutru). Aceasta permite, după cum se va vedea mai jos, utilizarea unor scheme echivalente simple corespunzătoare relațiilor existente între componentele simetrice de o aceeași succesiune.

42.2.1. **Circuit trifazat echilibrat în stea fără cuplaje magnetice.** Considerăm un circuit trifazat echilibrat, format din trei elemente de impedanță $\underline{Z}$ legate în stea. Impedanța firului neutru o notăm cu $\underline{Z}_N$ (fig. 42.9, *a*).

Descompunînd sistemul de tensiuni în trei sisteme componente trifazate simetrice, aplicarea teoremei superpoziției conduce la studierea regimurilor simetrice (par. 40.1) corespunzătoare schemelor (*b*), (*c*), (*d*). Pentru aceste trei scheme, tensiunea fazei 1 a rețelei de alimentare $\underline{V}_{10}$ se exprimă, respectiv, prin relațiile :

$$\underline{U}_d = \underline{Z}\,\underline{I}_d, \quad \underline{U}_i = \underline{Z}\,\underline{I}_i, \quad \underline{U}_0 = (\underline{Z} + 3\underline{Z}_N)\,\underline{I}_h. \tag{42.21}$$

Acestor trei relații le corespund, respectiv, schemele (rețelele), echivalente monofilare (*a*), (*b*), (*c*), reprezentate în figura 42.10. Aceste scheme redau simplu și intuitiv relațiile dintre componentele simetrice de aceeași succesiune ale

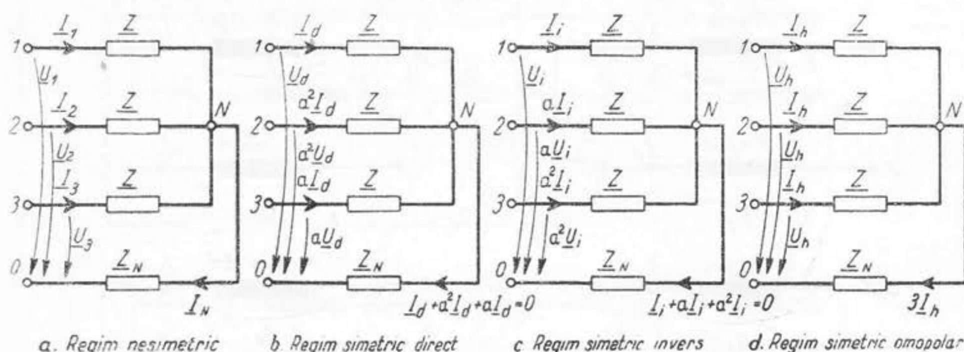


Fig. 42.9

curenților și tensiunilor; ele se numesc schema de succesiune directă, schema de succesiune inversă și schema de succesiune omopolară.

Impedanțele corespunzătoare sistemelor simetrice de curenți de succesiune directă, inversă și omopolară se numesc scurt impedanță directă $\underline{Z}_d$, impedanță inversă $\underline{Z}_i$ și impedanță omopolară $\underline{Z}_h$. Valorile lor sînt :

$$\underline{Z}_d = \underline{Z}, \quad \underline{Z}_i = \underline{Z}, \quad \underline{Z}_h = \underline{Z} + 3\underline{Z}_N. \tag{42.22}$$

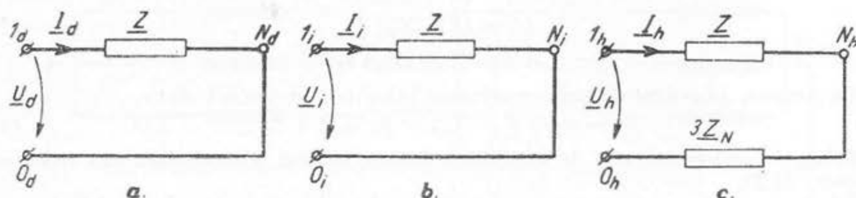


Fig. 42.10

Se remarcă faptul că impendanța firului neutru intervine numai în cea de-a treia ecuație din (42.21). Termenul $3\underline{Z}_N\underline{I}_h = \underline{Z}_N\underline{I}_N$ reprezintă căderea de tensiune de pe firul neutru.

Practic, rezolvarea circuitului studiat (fig. 42.9, *a*) pe baza metodei componentelor simetrice se face în felul următor :

a) se determină componentele simetrice ale tensiunilor aplicate (rel. 42.6);

b) se formează schemele rețelelor de succesiune directă, inversă și omopolară;

c) se determină componentele simetrice ale curenților și ale căderilor de tensiune pe baza utilizării acestor scheme;

d) se calculează curenții și căderile de tensiune căutate în funcție de componentele lor simetrice (rel. 42.5).

42.2.2. **Circuit trifazat echilibrat cu cuplaje magnetice între faze.** Considerăm un element trifazat de circuit, echilibrat, format din trei elemente monofazate, avînd fiecare o rezistență

R, o inductivitate proprie L şi o inductivitate mutuală M între faze (fig. 42.11) (conexiunea elementelor monofazate rămîne arbitrară : stea, triunghi etc.). Ne propunem să determinăm schemele de succesiune directă, inversă şi omopolară corespunzătoare. În acest scop presupunem că se stabileşte succesiv sistemul de curenţi direct, invers şi omopolar.

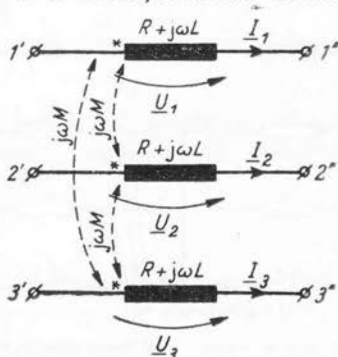


Fig. 42.11

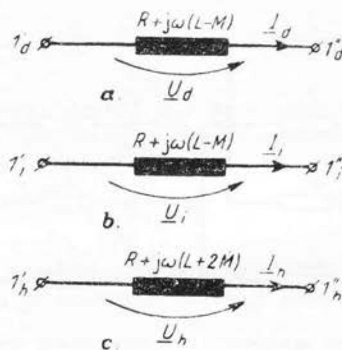


Fig. 42.12

Notînd impedanţele proprii cu $\underline{Z} = r + \mathrm{j}\omega L$ şi impedanţele mutuale cu $\underline{Z}_m = \mathrm{j}\omega M$ expresiile corespunzătoare căderilor de tensiune de pe faza 1 sînt :

$$\begin{aligned} \underline{U}_d &= \underline{Z}\,\underline{I}_d + \underline{Z}_m \mathrm{a}^2 \underline{I}_d + \underline{Z}_m \mathrm{a}\,\underline{I}_d \\ \underline{U}_i &= \underline{Z}\,\underline{I}_i + \underline{Z}_m \mathrm{a} \underline{I}_i + \underline{Z}_m \mathrm{a}^2\,\underline{I}_i \\ \underline{U}_h &= \underline{Z}\,\underline{I}_h + \underline{Z}_m \underline{I}_h + \underline{Z}_m \underline{I}_h. \end{aligned} \tag{42.23}$$

Observînd că $\mathrm{a}^2 + \mathrm{a} = -1$, relaţiile de mai sus se pot scrie sub forma :

$$\begin{aligned} \underline{U}_d &= (\underline{Z} - \underline{Z}_m)\,\underline{I}_d \\ \underline{U}_i &= (\underline{Z} - \underline{Z}_m)\,\underline{I}_i \\ U_h &= (Z + 2Z_m)\,I_h. \end{aligned} \tag{42.23'}$$

Ca urmare, impedanţele corespunzătoare celor trei succesiuni sînt :

$$\underline{Z}_d = \underline{Z}_i = \underline{Z} - \underline{Z}_m, \quad \underline{Z}_h = \underline{Z} + 2\underline{Z}_m. \tag{42.24}$$

Schemele corespunzătoare de succesiune directă, inversă şi omopolară sînt reprezentate în figura 42.12.

Observaţii : *a*) Datorită existenţei impedanţelor simetrice de cuplaj, impedanţa omopolară are o valoare diferită de valoarea comună $\underline{Z}_d = \underline{Z}_i$ a impedanţelor directă şi inversă.

b) În relaţiile (42.23) a intervenit aceeaşi impedanţă de cuplaj $\underline{Z}_m$ atît pentru curenţii de succesiune directă (prima relaţie) cît şi pentru curenţii de succesiune inversă (a doua relaţie). Aceasta se datoreşte faptului că am considerat un *circuit static* cu inductivităţi mutuale constante. În cazul circuitelor electrice ale maşinilor electrice rotative — numite *elemente dinamice* — apar, în realitate, inductivităţi variabile în timp. Pentru regimul sinusoidal, maşina admite scheme echivalente cu inductivităţi mutuale constante; dar valorile acestora depind de ordinea în care se succed înfăşurările fazelor interesate, faţă de sensul de rotaţie al rotorului. Ca urmare, căderea de tensiune produsă într-o fază (r, respectiv s) de curentul din altă fază (s, respectiv r) depinde şi de sensul mişcării rotorului faţă de aşezarea înfăşurărilor celor două faze şi rezultă :

$$\underline{U}_r = \underline{Z}_{m_{rs}} \cdot \underline{I}_s \quad \text{respectiv} \quad \underline{U}_s = \underline{Z}_{m_{sr}} \cdot \underline{I}_r,$$

cu impedanţe de cuplaj neegale :

$$\underline{Z}_{m_{rs}} \neq \underline{Z}_{m_{sr}} \qquad (s,\ r = 1,\ 2,\ 3) \tag{42.25}$$

Acest rezultat arată că la astfel de elemente dinamice *teorema reciprocităţii* (demonstrată numai pentru reţele cu elemente de circuit dipolare) *nu mai e valabilă*. Sistemul de trei impedanţe echivalente cu cuplaje nereciproce ale maşinii admit însă, la curenţi simetrici, o schemă echivalentă cu impedanţe egale necuplate. Dar valoarea comună a celor trei impedanţe egale

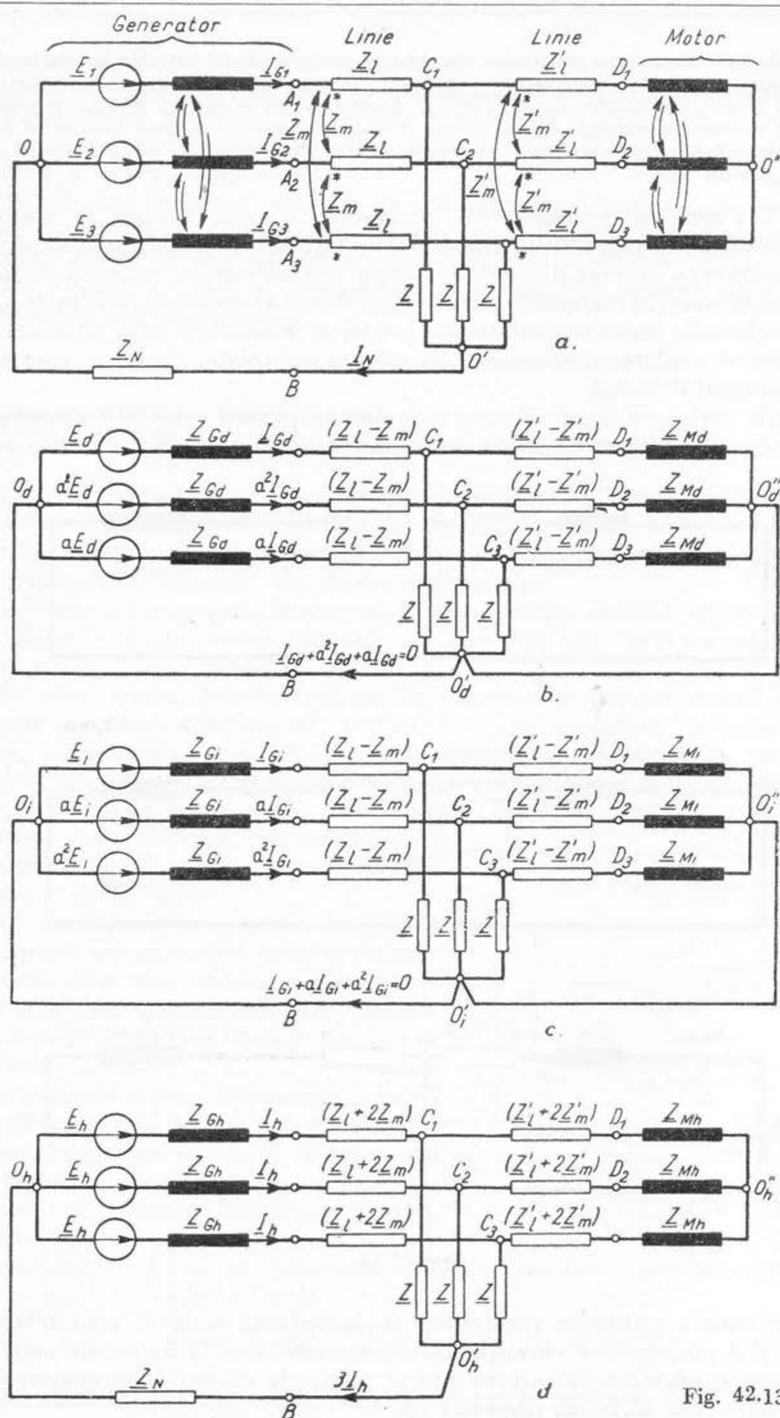


Fig. 42.13.

necuplate depinde de natura sistemului simetric de curenți considerat. De aceea, la mașinile electrice rotative trifazate (generatoare, motoare etc.), în schemele directe, inverse și omopolare apar impedanțe diferite $\underline{Z}_d \neq \underline{Z}_i \neq \underline{Z}_h$. Acest rezultat se explică intuitiv și prin faptul că cele trei sisteme de curenți, direct, invers și omopolar produc cîmpuri magnetice diferite: cîmp învîrtitor, în sensul de rotație al rotorului, cîmp învîrtitor în sens opus rotorului și cîmp alternativ „imobil".

42.2.3. **Formarea schemelor de succesiune directă, inversă și omopolară.** În cazul unui circuit complicat trifazat (de ex. fig. 42.13, *a*), echilibrat, schemele de succesiune directă, inversă și omopolară se pot obține simplu, pornind de la comportarea sistemului în regimurile simetrice de diferite succesiuni (schemele *b*, *c* și *d*).

În regimurile simetrice înlăturăm cuplajele magnetice prin înlocuirea părților de circuit cuplate cu elemente echivalente necuplate, conform celor prezentate în paragraful 42.3.2.

Pentru obținerea unor scheme monofazate pentru calculul componentelor simetrice directe și inverse, observăm că, în rețelele *b*, respectiv *c*, unirea tuturor

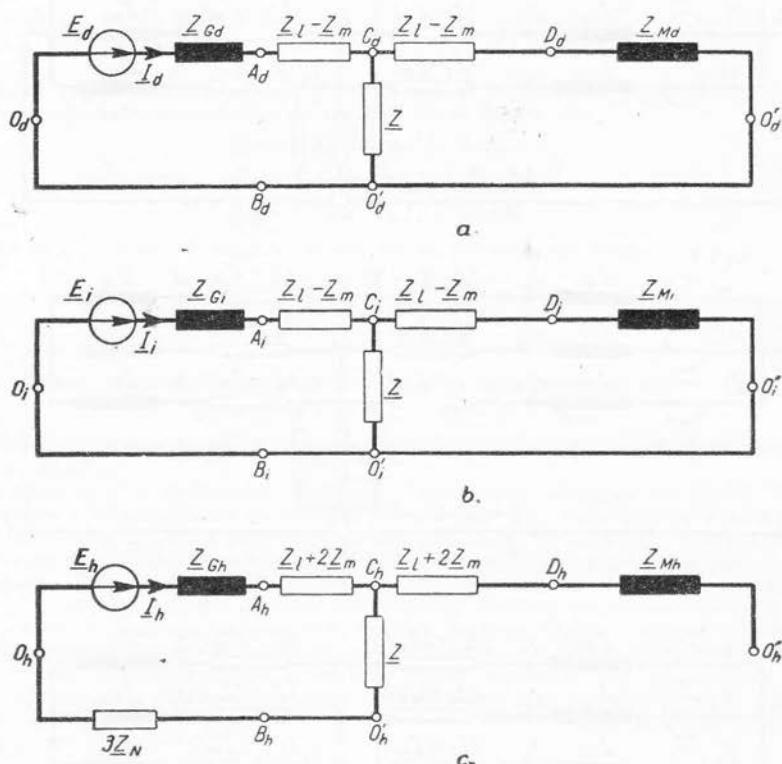


Fig. 42.14.

punctelor neutre printr-un conductor de impedanță nulă și apoi înlăturarea fazelor 2 și 3 nu modifică curenții din elementele fazei 1. Schemele astfel obținute le numim *schema de succesiune directă*, respectiv *schema de succesiune inversă* a rețelei date (fig. 42.14, *a*, respectiv *b*).

Pentru obținerea schemei monofazate corespunzătoare componentelor omopolare, observăm că, în rețeaua *d* (din fig. 42.13), triplarea impedanțelor de pe conductorul neutru și înlăturarea fazelor 2 și 3 nu modifică curenții din faza 1 a acestei rețele. Schema astfel obținută (fig. 42.14, *c*) o numim *schemă omopolară* a rețelei date.

Posibilitatea utilizării rețelelor directe, inverse și omopolare, formate așa cum s-a indicat mai sus, se poate demonstra și direct, scriind ecuațiile care decurg din aplicarea teoremelor lui Kirchhoff pentru rețelele trifazate, pentru schemele directă, inversă și omopolară (se constată că rezultă aceleași valori pentru componentele simetrice).

42.3. Circuite trifazate dezechilibrate

42.3.1. Reducerea problemei circuitelor trifazate dezechilibrate la problema rezolvării unor circuite echilibrate. Într-un element trifazat de circuit dezechilibrat, un sistem de curenți trifazat simetric produce căderi de tensiune care formează, în general, un sistem nesimetric.

Ca urmare, componentele simetrice de succesiuni diferite nu sînt independente. Relațiile dintre componentele simetrice sînt mult mai complicate decît în cazul elementelor echilibrate.

Din acest motiv, calculul regimurilor nesimetrice într-un circuit conținînd mai multe receptoare dezechilibrate se face, de obicei, echilibrînd circuitul pe baza teoremei compensației (par. 38.2.5), prin înlocuirea impedanțelor care produc nesimetrie prin tensiuni corespunzătoare. Aceste tensiuni apar ca necunoscute auxiliare, ale căror valori se determină astfel încît să fie satisfăcute ecuațiile de funcționare scrise separat, atît pentru partea simetrică de circuit cît și pentru partea nesimetrică de circuit.

42.3.2. Calculul unei rețele echilibrate care alimentează un singur receptor trifazat static nesimetric. Considerăm o rețea echilibrată (*R*), care alimentează un receptor static dezechilibrat fără cuplaje inductive între faze. În figura 42.15 s-a reprezentat rețeaua echilibrată prin dreptunghiul notat cu (*R*) și receptorul nesimetric prin impedanțele sale de fază $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ (fără a face vreo supoziție privitoare la modul de conexiune al acestor impedanțe: stea, triunghi etc.).

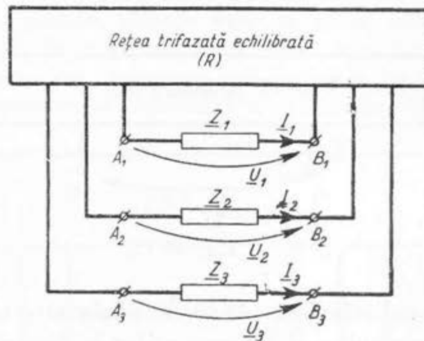


Fig. 42.15.

Înlocuind pe baza teoremei compensației cele trei impedanțe prin surse ideale, avînd tensiunile la borne:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1, \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2, \quad \underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3, \qquad (42.26)$$

se obține circuitul trifazat echilibrat reprezentat în figura 42.16.

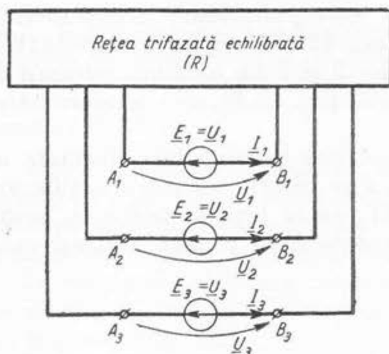


Fig. 42.16.

Determinarea relațiilor dintre componentele simetrice ale tensiunilor și curenților și în general, studiul rețelei simetrice (R) se face cu ajutorul schemelor de succesiune simetrice R_d, R_i, R_h ale acestei rețele (R). Aceste scheme sînt reprezentate în figura 42.17.

Relațiile dintre curent și tensiune la bornele acestor scheme se calculează prin oricare din metodele cunoscute din studiul circuitelor electrice monofazate și sînt de forma :

$$\underline{I}_d = -\underline{Y}_{ABd} \cdot \underline{U}_d + \underline{I}_{dsc}$$

$$\underline{I}_i = -\underline{Y}_{ABi} \cdot \underline{U}_i + \underline{I}_{ics}$$

$$\underline{I}_h = -\underline{Y}_{ABh} \cdot \underline{U}_h + \underline{I}_{hsc}. \tag{42.27}$$

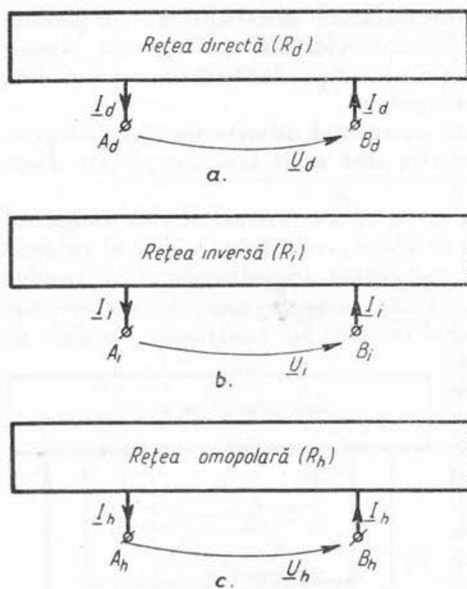


Fig. 42.17.

Mărimile $\underline{Y}_{ABd}$, $\underline{Y}_{ABi}$, $\underline{Y}_{ABh}$ reprezintă respectiv admitanțele echivalente ale schemelor de succesiune directă, inversă și omopolară pasivizate, iar $\underline{I}_{dsc}$, $\underline{I}_{isc}$, $\underline{I}_{hsc}$ sînt curenții de scurtcircuit debitați de aceste scheme, dacă se scurtcircuitează bornele $A_d - B_d$, $A_i - B_i$, $A_h - B_h$. Aceste admitanțe și acești curenți de scurtcircuit se determină în funcție de structura părții simetrice de rețea.

Pe de altă parte, un calcul simplu arată că din ecuațiile (42.26), cu ajutorul relațiilor (42.6), se obțin alte trei relații între componentele simetrice ale tensiunilor și ale curenților la bornele elementelor dezechilibrate :

$$\underline{U}_d = \underline{\xi}_h \underline{I}_d + \underline{\xi}_i \underline{I}_i + \underline{\xi}_d \underline{I}_h$$

$$\underline{U}_i = \underline{\xi}_d \underline{I}_d + \underline{\xi}_h \underline{I}_i + \underline{\xi}_i \underline{I}_h \tag{42.28}$$

$$\underline{U}_h = \underline{\xi}_i \underline{I}_d + \underline{\xi}_d \underline{I}_i + \underline{\xi}_h \underline{I}_h.$$

În aceste ecuații s-au notat cu $\underline{\xi}_d$, $\underline{\xi}_i$, $\underline{\xi}_h$ coeficienții (de natura unor impedanțe) ale căror expresii în funcție de impedanțele $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ care formează receptorul nesimetric sînt:

$$\underline{\xi}_h = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3),$$

$$\underline{\xi}_d = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3), \tag{42.29}$$

$$\underline{\xi}_i = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3).$$

Sistemele de ecuații (42.27) și (42.28) formează împreună un sistem de ecuații cu șase necunoscute, $\underline{U}_d$, $\underline{U}_i$, $\underline{U}_h$, $\underline{I}_d$, $\underline{I}_i$, $\underline{I}_h$, care reprezintă componentele simetrice ale tensiunilor și curenților la bornele receptorului nesimetric. Prin rezolvarea acestui sistem (42.27), (42.28), se pot determina deci aceste componente. Utilizînd relațiile (42.5), se calculează curenții și tensiunile la bornele receptorului nesimetric.

În continuare, cunoscînd tensiunile U_d, U_i, U_h de la bornele schemelor de succesiune R_d, R_i, R_h, reprezentate în figura. 42.16, determinarea componentelor simetrice ale curenților și tensiunilor din laturile rețelei simetrice (R) se face simplu, rezolvînd separat fiecare din aceste scheme.

42.3.3. **Calculul regimurilor de avarie nesimetrice ale unor rețele trifazate echilibrate.** În cazul unor scurtcircuite între o fază și pămînt, între două faze — cu sau fără punere la pămînt, ca în cazul întreruperii unei faze sau a două faze, apar regimuri de funcționare nesimetrică. Calculul unor astfel de regimuri prezintă importanță deosebită pentru protecția și dimensionarea sistemelor electrice trifazate.

Nesimetria corespunzătoare acestor scurtcircuite și întreruperi este echivalentă cu prezența unor receptoare statice simple, pentru care, în locul relațiilor (42.28), se obțin relații mult mai simple. Satisfacerea unor astfel de relații simple între componentele simetrice ale tensiunilor, respectiv curenților la locul nesimetriei, se face, de regulă, prin interconectarea adecvată a schemelor de succesiuni simetrice R_h, R_d, R_i. Studiem unele exemple tipice care se pot aplica la diferite situații practice.

1. *Scurtcircuit pe faza* 1, *cu întreruperea fazelor 2 și 3.* Pentru a putea aplica metoda componentelor simetrice, pe lîngă perechea de borne A_1 și B_1 (între care se realizează scurtcircuitul), s-au considerat și perechile de borne analoge A_2 — B_2 și A_3 — B_3, obținîndu-se un receptor trifazat dezechilibrat echivalent (fig. 42.18). Acest receptor are un conductor

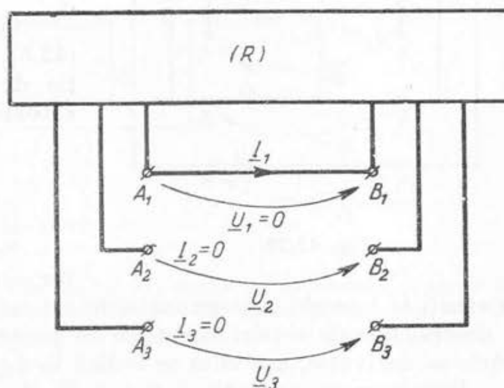


Fig. 42.18.

de impedanță nulă ($\underline{Z}_1 = 0$) pe faza 1 și două întreruperi pe fazele 2 și 3 (deci $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \infty$); ca urmare

$$\underline{U}_1 = 0;\ \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = 0. \tag{42.30}$$

Cu ajutorul relațiilor (42.5) și (42.6) se deduc relațiile corespunzătoare dintre componentele simetrice:

$$\underline{U}_h + \underline{U}_d + \underline{U}_i = 0 \qquad \underline{I}_h = \underline{I}_d = \underline{I}_i. \tag{42.31}$$

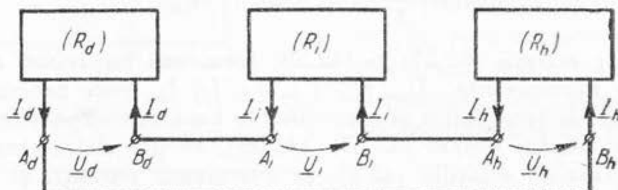


Fig. 42.19.

Se observă ușor că satisfacerea ultimelor ecuații de către curenții de la bornele schemelor R_d, R_i, R_h se poate asigura prin legarea în serie a dipolilor R_d, R_i, R_h (fig. 42.19). Pentru a satisface și prima ecuație de către tensiunile de la bornele acelorași scheme, este suficient să unim punctele A_d și B_h printr-un conductor de impedanță nulă.

Ca urmare, calculînd curenții din acest circuit, se obțin componentele simetrice ale curenților și tensiunilor.

2. *Scurtcircuit pe fazele 2 și 3, cu întreruperea fazei 1.* În figura 42.20 s-au notat cu $A_2 - B_2$, respectiv cu $A_3 - B_3$, perechile de borne scurtcircuitate și cu $A_1 - B_1$ bornele omologe (în gol) de pe faza *1*. Ecuațiile acestui receptor dezechilibrat sînt:

$$\underline{I}_1 = 0;\ \underline{U}_2 = \underline{U}_3 = 0. \tag{42.32}$$

Cu ajutorul relațiilor (42.5), respectiv (42.6), aceste condiții se exprimă în funcție de componentele simetrice corespunzătoare, astfel:

$$\begin{aligned} &\underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 0; \\ &\underline{U}_h = \underline{U}_d = \underline{U}_i. \end{aligned} \tag{42.33}$$

Fig. 42.20.

Se verifică ușor că satisfacerea acestor ecuații de către tensiunile și curenții ex stenți la bornele corespunzătoare ale rețelelor de succesiune directă, inversă și omopolară ale rețelei simetrice se poate face simplu, interconectînd aceste rețele în derivație, așa cum se indică în figura 42.21.

Prin urmare, curenții și tensiunile din rețelele de succesiuni simetrice ale părții echilibrate de rețea satisfac, datorită interconectării, și ecuațiile cores-

punzătoare părţii dezechilibrate; ca urmare, aceşti curenţi reprezintă componentele simetrice corespunzătoare regimului nesimetric studiat.

Pentru calculul unui scurtcircuit între două faze vom utiliza o conexiune echivalentă în stea, ca şi pentru orice element trifazat cu conexiune în triunghi. Aceasta se poate obţine, considerînd suprapuse punctele B_1, B_2, B_3, într-un punct neutru, artificial izolat 0.

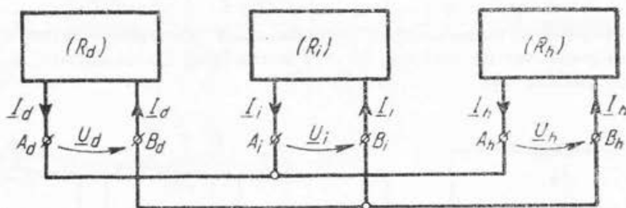


Fig. 42.21.

42.3.4. **Aplicaţii :** 1. *Scurtcircuit bifazat la bornele unui generator, fără punere la pămînt.* Considerăm un generator cu tensiuni electromotoare de fază simetrice $\underline{E}$, $a^2\underline{E}$, $a\underline{E}$, astfel că $\underline{E}_d = \underline{E}, \underline{E}_i = 0, \underline{E}_h = 0$ şi cu impedanţele : directă $\underline{Z}_d$, inversă $\underline{Z}_i$ şi omopolară $\underline{Z}_h$ (fig. 42.22, *a*), la care se produce un scurt circuit net între bornele 2 şi 3 fără legătură la pămînt.

Scurtcircuitul e echivalent cu un receptor trifazat dezechilibrat în stea, cu $\underline{Z}_1 = \infty$, $\underline{Z}_2 = 0$, $\underline{Z}_3 = 0$, $\underline{Z}_N = \infty$, ca în figura 42.22, *b*. Se obţine astfel cazul studiat în paragraful

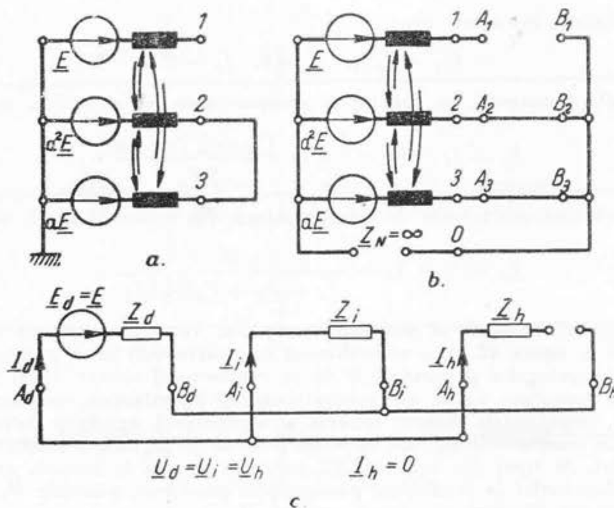


Fig. 42.22.

precedent, punctul 2, în care sînt valabile relaţiile (42.33) pentru componentele simetrice ale tensiunilor şi curenţilor receptorului şi schema echivalentă din figura 42.22, *c*, cu cele trei reţele de succesiune directă, inversă şi omopolară, conectate în paralel (cu $\underline{Z}_{h\,tot} = \underline{Z}_h + 3\,\underline{Z}_N = \infty$). Rezultă :

$$\underline{I}_d = -\underline{I}_i = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i}; \; \underline{I}_h = 0$$

şi cu relaţia (42.5):

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 0$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_h + a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i = (a^2 - a)\frac{\underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i} = -\,j\,\frac{\sqrt{3}\,\underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_h + a\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i = (a - a^2)\frac{\underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i} = j\,\frac{\sqrt{3}\,\underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i} = -\underline{I}_2.$$

2. *Punere la pămînt monofazată la bornele unui generator, printr-o impedanţă $\underline{Z}_p$*. Considerăm acelaşi generator de mai sus, la care borna fazei 1 e conectată la pămînt printr-o impedanţă $\underline{Z}_p$ (fig. 42.23, *a*).

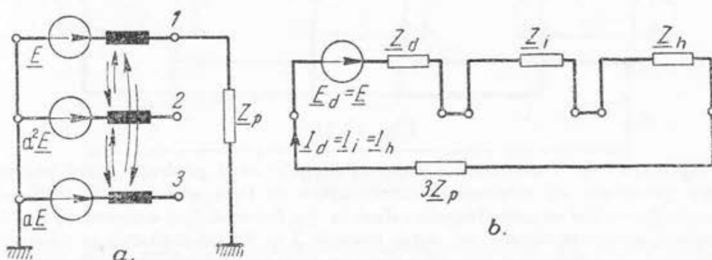


Fig. 42.23.

Relaţiile (42.26) sînt, în acest caz:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_p\underline{I}_1, \quad \underline{I}_2 = 0, \quad \underline{I}_3 = 0.$$

Înlocuind tensiunile şi curenţii, în funcţie de componentele lor simetrice, se obţin relaţiile:

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_h = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_p} = \frac{\underline{U}_d + \underline{U}_i + \underline{U}_h}{3\,\underline{Z}_p},$$

corespunzătoare schemei echivalente de interconexiune din figura 42.23, *b*, din care rezultă:

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_h = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_d + \underline{Z}_h + 3\underline{Z}_p}.$$

3. *Regim trifazat nesimetric al unei reţele complexe.* Vom presupune că în reţeaua simetrică, reprezentată în figura 42.13, *a* se realizează un scurtcircuit între punctul *A*, care reprezintă o bornă a generatorului şi punctul *B* de pe conductorul neutru, legat la pămînt.

Presupunînd cunoscute t.e.m. ale generatorului şi impedanţele circuitului (pentru elementele dinamice, impedanţele directe, inverse şi omopolare), urmărim determinarea curenţilor şi căderilor de tensiune. Observăm că scurtcircuitul de pe faza 1 e echivalent cu un receptor dezechilibrat, de tipul din figura 42.18, conectat în stea la bornele generatorului (fig. 42.24). Conform observaţiei de la sfîrşitul paragrafului precedent, punctele B_1, B_2, B_3 le presupunem suprapuse şi formînd un punct neutru *B*.

Conform celor expuse în paragraful precedent, reţelele directe, inverse şi omopolare (reprezentate în fig. 42.14) pentru acest tip de nesimetrie se leagă în serie (fig. 42.19), obţinîndu-se reţeaua de calcul monofazată din figura 42.25.

Determinarea componentelor simetrice ale curenţilor şi căderile de tensiune ale reţelei se reduce astfel la determinarea curenţilor şi căderilor de tensiune din această reţea de calcul. Această operaţie se poate face şi experimental, pe modele ale reţelei de calcul obţinute, realizate în laborator, ale căror tensiuni şi curenţi se măsoară direct. Compunînd componentele simetrice ale diferiteţilor curenţi sau tensiuni, cu ajutorul relaţiei (42.5), se obţin curenţii şi căderile de tensiune căutate din reţeaua cu scurtcircuit nesimetric. În generatoarele obişnuite, de construcţie echilibrată, $\underline{E}_d = \underline{E}$ şi $\underline{E}_i = 0$, $\underline{E}_h = 0$.

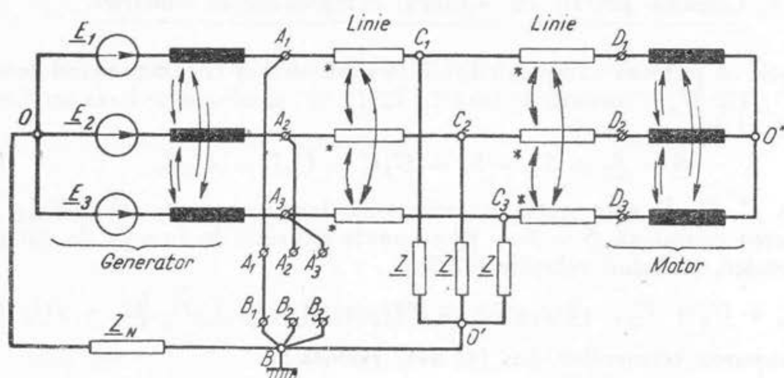


Fig. 42.24.

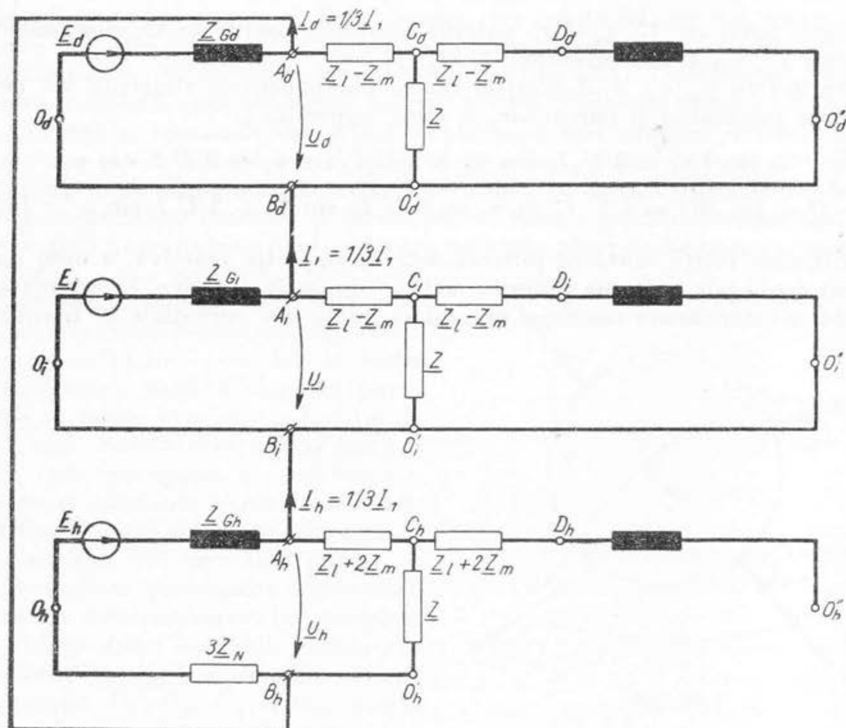


Fig. 42.25.

42.4. Calculul puterii cu ajutorul componentelor simetrice

Se știe că puterea complexă totală a unui sistem trifazat, avînd tensiunile de fază $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ și curenții de fază $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$, se calculează pe baza unei expresii de forma 41.30 :

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = \underline{U}_1\underline{I}_1^* + \underline{U}_2\underline{I}_2^* + \underline{U}_3\underline{I}_3^*, \tag{42.34}$$

unde, cu $\underline{I}_1^*, \underline{I}_2^*, \underline{I}_3^*$ s-au notat valorile complexe conjugate ale lui $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$.

Puterea complexă $\underline{S} = P + jQ$ se poate exprima în funcție de componentele simetrice, utilizînd relațiile (42.5) :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_h + \underline{U}_d + \underline{U}_i; \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_h + a^2\underline{U}_d + a\underline{U}_i; \quad \underline{U}_3 = \underline{U}_h + a\underline{U}_d + a^2\underline{U}_i$$

După gruparea termenilor din (42.34), rezultă :

$$\underline{S} = \underline{U}_h(\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_3^*) + \underline{U}_d(\underline{I}_1^* + a^2\underline{I}_2^* + a\underline{I}_3^*) + \underline{U}_i(\underline{I}_1^* + a\underline{I}_2^* + a^2\underline{I}_3^*).$$

Deoarece $a^2 = a^*$ și $a = a^{2*}$, rezultă :

$$\underline{S} = 3\ \underline{U}_h\underline{I}_h^* + 3\ \underline{U}_d\underline{I}_d^* + 3\ \underline{U}_i\underline{I}_i^*, \tag{42.35}$$

unde s-au notat cu $\underline{I}_h^*, \underline{I}_d^*$ și $\underline{I}_i^*$ valorile complexe conjugate ale componentelor simetrice $\underline{I}_h, \underline{I}_d, \underline{I}_i$ ale curenților $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$.

Notînd cu $\varphi_h, \varphi_d, \varphi_i$ defazajele dintre componentele simetrice de același nume ale tensiunilor și curenților, se obțin expresiile :

$$P = \text{Re}\ \{\underline{S}\} = 3\ U_hI_h \cos\varphi_h + 3\ U_dI_d \cos\varphi_d + 3\ U_iI_i \cos\varphi_i.$$

$$Q = \text{Im}\ \{\underline{S}\} = 3\ U_hI_h \sin\varphi_h + 3\ U_dI_d \sin\varphi_d + 3\ U_iI_i \sin\varphi_i. \tag{42.36}$$

Ultimele relații arată că puterea activă, respectiv reactivă, a unui circuit trifazat este egală cu suma puterilor active, respectiv reactive, corespunzătoare sistemelor componente simetrice de același nume ale curenților și tensiunilor.

CUADRIPOLI

43. CUADRIPOLI ELECTRICI

43.1. Cuadripoli generali

Un multipol electric (v. par. 38.2) cu patru borne de acces se numește *cuadripol general* sau *tetrapol*. Prin urmare, un cuadripol general este o rețea electrică cu patru borne de acces, ale cărei laturi interioare nu prezintă cuplaje inductive (inductivități mutuale) cu exteriorul (fig. 43.1). Un cuadripol general e o rețea neizolată, care constituie o parte a unei rețele mai mari, eventual izolată. Curenții și tensiunile din rețeaua exterioară sînt complet determinați de structura ei și de potențialele și curenții bornelor de acces ale cuadripolului. Interacțiunea cuadripolului cu exteriorul e deci complet caracterizată de cele patru potențiale ale bornelor și de cei patru curenți primiți din exterior. Alegerea originii potențialelor fiind arbitrară, se poate alege egal cu zero potențialul unei borne; suma curenților care intră într-o suprafață închisă fiind nulă [teorema continuității curentului electric de conducție — (31.10) — valabilă în regim cuasistaționar], unul dintre cei patru curenți se poate exprima în funcție de ceilalți trei. Există deci numai *șase variabile* (trei potențiale și trei curenți) necesare și suficiente pentru caracterizarea funcționării unui cuadripol general în rețeaua din care face parte.

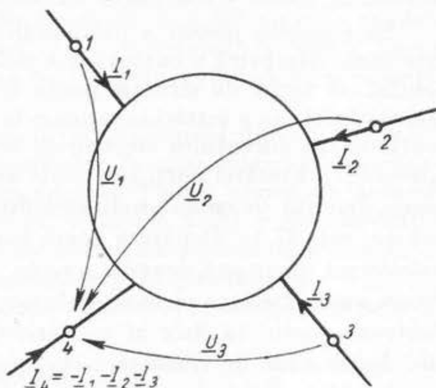


Fig. 43.1.

În regimul permanent sinusoidal, studiat cu reprezentarea în complex, se pot alege drept variabile caracteristice curenții $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ a trei dintre borne și tensiunile $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ dintre aceste borne și borna a patra. Dacă se aplică anumite tensiuni la borne, curenții sînt determinați și se pot calcula, ținînd seama de structura interioară a cuadripolului. Se obțin astfel trei relații :

$$\underline{I}_1 = f_1(\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3);\ \underline{I}_2 = f_2(\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3);\ \underline{I}_3 = f_3(\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3), \tag{43.1}$$

numite *ecuațiile caracteristice ale cuadripolului*, care sînt necesare și suficiente pentru studiul rețelei din care el face parte. Dacă se cunosc aceste ecuații, structura de detaliu a cuadripolului nu prezintă importanță. Un receptor trifazat cu fir neutru e un exemplu de cvadripol general.

Multipolii — și, în particular, cuadripolii generali — se pot clasifica din mai multe puncte de vedere. Multipolii pot fi *liniari*, *parametrici* sau *neliniari*, după cum parametrii elementelor de circuit ale schemelor echivalente sînt invariabili, sînt funcțiuni date de timp, sau depind de valorile curenților și tensiunilor; la multipolii liniari se aplică teorema superpoziției și ecuațiile caracteristice sînt ecuații liniare. Multipolii pot fi *activi* sau *pasivi*, după cum conțin sau nu surse de energie electromagnetică; la multipolii liniari și pasivi, curenții de regim permanent se anulează o dată cu tensiunile aplicate și ecuațiile caracteristice sînt liniare și omogene. Multipolii pot fi *disipativi* sau *nedisipativi*, după cum conțin sau nu elemente de circuit, care sînt sediul unei transformări ireversibile de energie în căldură (de ex. prin efect Joule-Lenz); multipolii disipativi au schemele echivalente, cu rezistențe nenule în laturi. Multipolii pot fi *reciproci sau nereciproci*, după cum admit sau nu proprietatea de reciprocitate : curentul $\underline{I}_i$ — care intră prin borna *i* cînd toate bornele sînt legate conductiv între ele, afară de borna *j* la care se aplică tensiunea $\underline{U}_j = \underline{U}$ față de celelalte — este egal cu curentul $\underline{I}_j$ — care intră prin borna *j* cînd toate bornele sînt legate conductiv între ele, afară de borna *i* la care se aplică tensiunea $\underline{U}_i = \underline{U}$ față de celelalte. În paragraful 38.3.5. am demonstrat această proprietate (teorema reciprocității) pentru rețele electrice liniare, constituite din elemente de circuit dipolare : generatoare, bobine, rezistoare, condensatoare, *Pentru rețele care conțin elemente de circuit multipolare* (de ex. mașini electrice trifazate), *proprietatea de reciprocitate poate să nu fie verificată, chiar dacă rețeaua este liniară.* În cazul multipolilor neliniari, teorema reciprocității nu are loc decît accidental, chiar dacă toate elementele de circuit sînt dipolare.

Se numește *poartă* a unui multipol o grupare de borne de acces pentru care suma algebrică a curenților e nulă oricare ar fi potențialele bornelor multipolului. O astfel de situație poate fi impusă numai de structura topologică a multipolului sau a rețelei exterioare la care e conectat, ca o consecință a teoremei continuității curentului electric de conducție (respectiv a primei teoreme a lui Kirchhoff). Fiecărei porți i se poate asocia în mod unic o anumită putere instantanee, definită de suma produselor dintre potențialele și curenții bornelor respective (v. rel. 37.1). Deoarece suma curenților e nulă, schimbarea originii potențialelor nu afectează această putere. Din acest motiv se consideră că transmisiunea puterii se face pe la bornele porții — deși în realitate e localizată în cîmpul electromagnetic ca flux al vectorului Poynting. O poartă concretizează, deci, una dintre căile de transfer a energiei electromagnetice între exteriorul și interiorul multipolului. În numeroase aplicații interesează porțile cu două borne, avînd curenți egali și opuși, care pot fi porți de intrare sau porți de ieșire.

Se numește *poartă de intrare* o poartă cu două borne (de ex. 1 , 1′ în fig. 43.2), la care tensiunea aplicată $\underline{U}_1$ și curentul $\underline{I}_1$ sînt asociați după regula de la receptoare. La o poartă de intrare, puterea complexă S_1 calculată cu aceste mărimi e o putere primită :

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1\underline{I}_1^* = \underline{V}_1\underline{I}_1^* - \underline{V}_{1'}\underline{I}_1^* = \underline{V}_{1'}\underline{I}_1^{(ex)*} + \underline{V}_{1'}\underline{I}_{1'}^{(ex)*} \quad (43.2)$$

(curenții primiți din exterior fiind $\underline{I}_1^{(ex)} = \underline{I}_1$ și $\underline{I}_{1'}^{(ex)} = -\underline{I}_1$).

Se numește *poartă de ieșire* o poartă cu două borne (de ex. 2, 2′ în fig. 43.2) la care tensiunea aplicată $\underline{U}_2$ și curentul $\underline{I}_2$ sînt asociați după regula de la generatoare. La o poartă de ieșire, puterea complexă $\underline{S}_2$ calculată cu aceste mărimi e o putere cedată,

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2\underline{I}_2^* = \underline{V}_2\underline{I}_2^* - \underline{V}_{2'}\underline{I}_{2'}^* =,$$
$$= -(\underline{V}_2\underline{I}_2^{(ex)*} + \underline{V}_{2'}\underline{I}_{2'}^{(ex)*}) \quad (43.3)$$

(curenții primiți din exterior fiind $\underline{I}_2^{(ex)} = -\underline{I}_2$ și $\underline{I}_{2'}^{(ex)} = \underline{I}_2$).

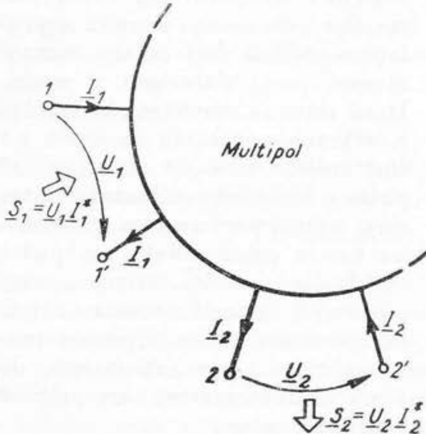


Fig. 43.2.

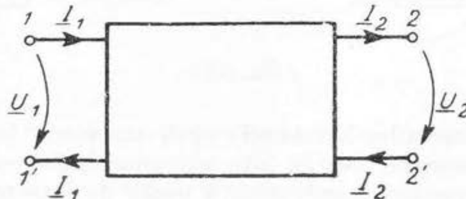


Fig. 43.3.

43.2 Cuadripoli diporți

Se numește *cuadripol diport*, sau numai *cuadripol*, un cuadripol general ale cărui borne sînt grupate în două porți. Prin urmare, în acest sens, un cuadripol e o rețea neizolată, fără cuplaje inductive cu exteriorul, cu patru borne de acces grupate în două perechi de borne (sau porți), avînd fiecare curenții egali și opuși (fig. 43.3).

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de cuadripolii diporți, deoarece aceștia sînt elementele fundamentale ale lanțurilor de transmisiune a energiei electromagnetice sau a semnalelor electromagnetice. Ținînd seama de această utilizare, una din porți e poarta de intrare (1, 1′ în fig. 43.3) — cu convenția de asociere a sensurilor de la receptoare — iar cealaltă e poarta de ieșire (2, 2′ în fig. 43.3) — cu convenția de asociere a sensurilor de la generatoare.

Interacțiunea unui astfel de cuadripol cu exteriorul e complet caracterizată de numai patru variabile :

$\underline{U}_1$ — tensiunea de la intrare (tensiunea primară),
$\underline{I}_1$ — curentul de la intrare (curentul primar),
$\underline{U}_2$ — tensiunea de la ieșire (tensiunea secundară),
$\underline{I}_2$ — curentul de la ieșire (curentul secundar).

În aplicații este foarte important să se verifice dacă cuadripolul e efectiv diport, adică dacă cei doi curenți de la bornele de intrare (sau de la cele de ieșire) sînt egali și de sens opus. Această condiție e sigur realizată, oricare ar fi

structura internă a cuadripolului, dacă rețeaua conectată la intrare și rețeaua conectată la ieșire sînt izolate una de alta (fără legături conductoare — fig. 43.4). În adevăr, în acest caz există o suprafață închisă Σ, care conține una din aceste rețele și e dusă numai prin dielectric, cu excepția a două puncte, unde e înțepată de cele două conductoare ale bornelor uneia dintre porți. Conform teoremei continuității, suma curenților care ies din această suprafață e nulă și deci cei doi curenți ai unei porți sînt egali și opuși. Dacă rețeaua conectată la intrare și rețeaua conectată la ieșire nu sînt izolate una de alta (au cel puțin o legătură conductoare între ele), numai prin analiza structurii lor sau a cuadripolului se poate stabili dacă cei doi curenți ai unei porți sînt în mod necesar (adică, exclusiv ca urmare a primei teoreme a lui Kirchhoff) egali și opuși. Această condiție e sigur satisfăcută, de exemplu, ori de cîte ori cuadripolul conține un transformator, care asigură separarea conductivă a porții de intrare de poarta de ieșire.

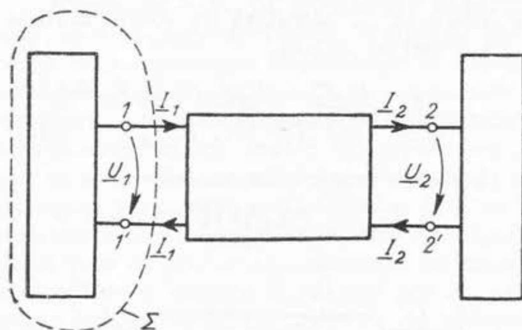


Fig. 43.4.

43.3. Ecuațiile și parametrii cuadripolilor liniari, pasivi și reciproci

Dintre cele patru variabile $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{U}_1$ și $\underline{U}_2$ care caracterizează interacțiunea cuadripolului cu exteriorul, numai două sînt independente din punctul de vedere al structurii interioare a cuadripolului. Dacă, de exemplu, se aplică la borne tensiuni $\underline{U}_1$ și $\underline{U}_2$ cunoscute, teoremele lui Kirchhoff permit determinarea unică a curenților $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$. Există deci între aceste patru variabile, două relații de forma :

$$F_1(\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{U}_1, \underline{U}_2) = 0 \qquad F_2(\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{U}_1, \underline{U}_2) = 0, \qquad (43.4)$$

numite *ecuațiile cuadripolului sub formă implicită*, a căror cunoaștere e suficientă pentru studiul comportării cuadripolului în rețeaua mai mare din care face parte.

Cuadripolul fiind prin ipoteză liniar și pasiv, aceste ecuații sînt neapărat liniare și omogene. Dacă ecuațiile nu ar fi liniare, nu s-ar verifica teorema superpoziției caracteristică rețelelor liniare. Dacă nu ar fi omogene, curenții nu s-ar anula pentru $\underline{U}_1 = 0$, $\underline{U}_2 = 0$, ceea ce ar implica existența unor surse interioare, care nu există în cuadripolii pasivi.

Coeficienții ecuațiilor liniare și omogene ale cuadripolilor reciproci mai trebuie să satisfacă teorema reciprocității (par. 38.3.5) aplicată rețelei izolate, obținută scurtcircuitînd bornele fiecăreia dintre cele două porți. Curentul secundar $\underline{I}_2'$ produs de o sursă ideală de t.e.m. $\underline{E}$ conectată între bornele primare cu sensul lui $\underline{I}_1$ (astfel că $\underline{U}_1' = \underline{E}$), bornele secundare fiind scurtcircuitate

($\underline{U}'_2 = 0$, v. fig. 43.5, *a*), trebuie să fie egal cu curentul primar $\underline{I}''_1$ produs de aceeaşi sursă ideală de t.e.m. $\underline{E}$, conectată între bornele secundare cu sensul $\underline{I}_2$ (astfel că $\underline{U}''_2 = -\underline{E}$, v. fig. 43.5, *b*), bornele primare fiind scurtcircuitate ($\underline{U}''_1 = 0$),

$$\underline{I}'_2 = (\underline{I}_2)_{\substack{\underline{U}_1=\underline{E}\\ \underline{U}_2=0}} = (\underline{I}_1)_{\substack{\underline{U}_1=0\\ \underline{U}_2=-\underline{E}}} = \underline{I}''_1. \quad (43.5)$$

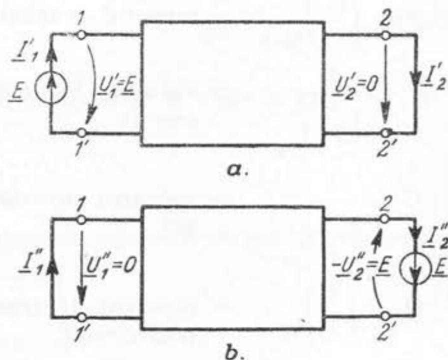


Fig .43.5.

Relaţia dintre coeficienţi impusă de această egalitate (valabilă pentru orice valoare a tensiunii $\underline{E}$) se numeşte *condiţia de reciprocitate.*

Ecuaţiile cuadripolilor (43.4) au diferite forme explicite, obţinute alegînd cîte o anumită pereche de variabile ca variabile independente : $\underline{U}_2$ şi $\underline{I}_2$, $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_1$, $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$, $\underline{U}_1$ şi $\underline{U}_2$ etc. În aceste forme explicite, celelalte două variabile sînt exprimate ca funcţii liniare şi omogene de cele două variabile independente, cei patru coeficienţi complecşi ai acestor funcţii numindu-se *parametrii cuadripolului* sau *constantele cuadripolului.* Condiţia de reciprocitate (43.5) impune o relaţie între aceşti patru parametri : Un cuadripol diport, liniar, pasiv şi reciproc e caracterizat prin numai trei parametri complecşi independenţi (sau prin şase parametri reali). Toţi cuadripolii care au aceiaşi parametri sînt echivalenţi între ei şi pot fi substituiţi unul altuia, fără ca această substituţie să afecteze starea reţelei mai mari din care fac parte.

Caracterul pasiv al cuadripolului (asociat valorilor pozitive sau nule ale rezistenţelor laturilor lui) mai impune satisfacerea condiţiei ca puterea activă totală primită de cuadripol să nu fie negativă, oricare ar fi valorile variabilelor independente :

$$\underline{P} = \underline{P}_1 - \underline{P}_2 = \mathrm{Re}\,\{\underline{U}_1\underline{I}_1^* - \underline{U}_2\underline{I}_2^*\} \geqslant 0, \quad (43.6)$$

egalitatea corespunzînd cuadripolilor nedisipativi.

Cei trei parametri complecşi independenţi nu pot avea deci valori arbitrare, ci numai valorile compatibile cu *condiţia de pasivitate* (43.6).

43.3.1. **Forma fundamentală a ecuaţiilor cuadripolului şi parametrii fundamentali.** Deoarece funcţiunea cea mai importantă a cuadripolilor e aceea de element al unui lanţ de transmisiune a energiei electromagnetice sau a semnalelor electromagnetice, forma fundamentală a ecuaţiilor cuadripolilor e aceea în care mărimile de intrare $\underline{U}_1$, $\underline{I}_1$ sînt exprimate în funcţiune de mărimile de ieşire $\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$ prin relaţii liniare şi omogene de forma :

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{A}\,\underline{U}_2 + \underline{B}\,\underline{I}_2\\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\,\underline{U}_2 + \underline{D}\,\underline{I}_2\end{aligned}} \quad (43.7)$$

Coeficienţii $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ ai acestor relaţii se numesc *parametrii fundamentali* ai cuadripolului. $\underline{A}$ şi $\underline{D}$ sînt coeficienţi adimensionali, $\underline{B}$ e o impedanţă, iar

$\underline{C}$ o admitanță. Parametrii fundamentali au următoarele interpretări experimentale :

$$\begin{cases} \underline{A} = \left(\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} & = \text{raportul de transformare al tensiunilor la mersul în gol} \\ \underline{B} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{U}_2=0}} & = \text{valoarea inversă a admitanței de transfer de scurtcircuit} \\ \underline{C} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0}} & = \text{valoarea inversă a impedanței de transfer la mers în gol} \\ \underline{D} = \left(\dfrac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0} & = \text{raportul de transformare al curenților la mersul în scurtcircuit.} \end{cases} \qquad (43.8)$$

Cu ajutorul ecuațiilor (43.7), condiția (43.5) impune egalitatea :

$$(\underline{I}_2)_{\substack{\underline{U}_1=\underline{E}\\ \underline{U}_2=0}} = \frac{1}{\underline{B}}\underline{E} = (\underline{I}_1)_{\substack{\underline{U}_1=0\\ \underline{U}_2=-\underline{E}}} = \frac{\underline{A}\underline{D}-\underline{B}\underline{C}}{\underline{B}}\underline{E}$$

și cum $\underline{E}$ e arbitrar, rezultă *condiția de reciprocitate :*

$$\Delta \equiv \boxed{\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = 1}\,, \qquad (43.9)$$

exprimată cu parametrii fundamentali. Se observă că Δ e chiar determinantul sistemului (43.7) și conform cu (43.9) acest determinant nu poate fi nul. Ecuațiile (43.7) au deci o soluție unică, dacă sînt explicitate în raport cu $\underline{U}_2$ și $\underline{I}_2$. Folosind regula lui Cramer, se obține o altă formă fundamentală a ecuațiilor cuadripolilor, în care mărimile de ieșire $\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$ sînt exprimate în funcție de cele de intrare $\underline{U}_1$, $\underline{I}_1$:

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{D}\underline{U}_1 - \underline{B}\underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 &= -\underline{C}\underline{U}_1 + \underline{A}\underline{I}_1. \end{aligned} \qquad (43.10)$$

43.3.2. **Parametrii impedanță.** Dacă ecuațiile fundamentale (43.7) se pot explicita în raport cu tensiunile $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ (adică dacă $\underline{C} \neq 0$), se obține o altă formă a ecuațiilor cuadripolilor liniari și pasivi :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned}}\,, \qquad (43.11)$$

în care coeficienţii sînt *parametrii impedanţă* ai cuadripolului

$$\underline{Z}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} = \text{impedanţa de intrare la mers în gol}$$

$$\underline{Z}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{I}_1=0} = \frac{\underline{A}\underline{D}-\underline{B}\underline{C}}{\underline{C}} \tag{43.12}$$

$$\underline{Z}_{21} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{\underline{C}} = \text{impedanţa de transfer la mers în gol}$$

$$\underline{Z}_{22} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{I}_1=0} = -\frac{\underline{D}}{\underline{C}}.$$

Ţinînd seama de aceste expresii, *condiţia de reciprocitate* exprimată cu parametrii impedanţă se scrie:

$$\boxed{\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}}\,. \tag{43.13}$$

Determinantul sistemului (43.11) este:

$$\underline{\Delta}_z = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{12}^2. \tag{43.14}$$

Cu ajutorul parametrilor impedanţă, *condiţia de pasivitate* (43.6) se scrie:

$$P = \mathrm{Re}\,\{\underline{Z}_{11}I_1^2 - \underline{Z}_{22}I_2^2 + \underline{Z}_{12}(\underline{I}_2\underline{I}_1^* + \underline{I}_1\underline{I}_2^*)\} =$$

$$= \mathrm{Re}\,\{\underline{Z}_{11}I_1^2 - \underline{Z}_{22}I_2^2 + 2\underline{Z}_{12}I_1I_2\cos(\widehat{\underline{I}_1, \underline{I}_2})\} \geqslant 0.$$

Această condiţie poate fi satisfăcută pentru orice valori efective $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ şi pentru orice defazaj al curenţilor, dacă

$$\mathrm{Re}\,\{\underline{Z}_{11}\} \geqslant 0;\ \mathrm{Re}\,\{\underline{Z}_{22}\} \geqslant 0;\ \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\{\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22}\} \geqslant |\,\mathrm{Re}\,\{\underline{Z}_{12}\}\,| \geqslant 0. \tag{43.15}$$

43.3.3. **Parametrii admitanţă.** Dacă ecuaţiile fundamentale (43.7) se pot explicita în raport cu curenţii $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ (adică dacă $\underline{B} \neq 0$), se obţine o altă formă a ecuaţiilor cuadripolilor liniari şi pasivi:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{aligned}}\,, \tag{43.16}$$

în care coeficienţii sînt parametrii admitanţă ai cuadripolului:

$$\underline{Y}_{11} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{D}}{\underline{B}} = \text{admitanţa de intrare de scurtcircuit}$$

$$\underline{Y}_{12} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1=0} = -\frac{\underline{A}\underline{D}-\underline{B}\underline{C}}{\underline{B}} \tag{43.17}$$

$$\underline{Y}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{1}{\underline{B}} = \text{admitanţa de transfer de scurtcircuit}$$

$$\underline{Y}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1=0} = -\frac{\underline{A}}{\underline{B}}.$$



Ţinînd seama de aceste expresii, *condiţia de reciprocitate* (43.9) exprimată cu parametrii admitanţă se scrie:

$$\boxed{\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}}\ . \tag{43.18}$$

Determinantul sistemului (43.16) este:

$$\underline{\Delta}_y = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12}^2. \tag{43.19}$$

Cu ajutorul parametrilor admitanţă, *condiţia de pasivitate* (43.6) conduce la relaţiile:

$$\mathrm{Re}\{\underline{Y}_{11}\} \geqslant 0;\ \mathrm{Re}\,\{\underline{Y}_{22}\} \leqslant 0\,;\ \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\{\underline{Y}_{11} - \underline{Y}_{22}\} \geqslant |\,\mathrm{Re}\{\underline{Y}_{12}\}\,| \geqslant 0. \tag{43.20}$$

43.3.4. **Relaţii între diferitele categorii de parametri.** Dacă determinantul $\underline{\Delta}_z \neq 0$, parametrii admitanţă se pot exprima în funcţie de parametrii impedanţă prin relaţiile:

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{\Delta}_z};\ \underline{Y}_{12} = -\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{\Delta}_z};\ \underline{Y}_{21} = -\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{\Delta}_z};\ \underline{Y}_{22} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{\Delta}_z}, \tag{43.21}$$

iar dacă determinantul $\underline{\Delta}_y \neq 0$, parametrii impedanţă se pot exprima în funcţie de parametrii admitanţă prin relaţiile:

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{\Delta}_y};\ \underline{Z}_{12} = -\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{\Delta}_y};\ \underline{Z}_{21} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{\Delta}_y};\ \underline{Z}_{22} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{\Delta}_y}. \tag{43.22}$$

Se observă imediat că

$$\underline{\Delta}_z \cdot \underline{\Delta}_y = 1. \tag{43.23}$$

Dacă se dau parametrii admitanţă, respectiv impedanţă, şi dacă $\underline{Y}_{21} \neq 0$, respectiv $\underline{Z}_{21} \neq 0$, se pot calcula parametrii fundamentali:

$$\underline{A} = -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}\ ;\ \underline{B} = \frac{1}{\underline{Y}_{21}} = -\frac{\underline{\Delta}_z}{\underline{Z}_{21}};\ \underline{C} = -\frac{\underline{\Delta}_y}{\underline{Y}_{21}}\,\frac{1}{\underline{Z}_{21}};\ \underline{D} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} = -\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}. \tag{43.24}$$

Se numeşte cuadripol degenerat un cuadripol pentru care unul din determinanţii $\underline{\Delta}_z$, respectiv $\underline{\Delta}_y$, este nul. Pentru cuadripolii degeneraţi au sens numai unii dintre parametrii definiţi mai sus pentru un cuadripol oarecare, ceilalţi parametri fiind infiniţi sau nedeterminaţi (v. şi par. 43.4.1.).

43.3.5. **Cuadripoli simetrici.** Un cuadripol poate fi alimentat pe la bornele secundare, care constituie, în acest caz, bornele de intrare şi poate debita pe la bornele primare, care constituie, în acest caz, bornele de ieşire. Aceasta e alimentarea inversă a cuadripolului (fig. 43.6), care corespunde, în ecuaţii, schimbării sensului de referinţă al curentului

$$\underline{U}'_1 = \underline{U}_1;\ \underline{U}'_2 = \underline{U}_2;\ \underline{I}'_1 = -\underline{I}_1 = \underline{I}'_2 = -\underline{I}_2. \tag{43.25}$$

Ecuaţiile cuadripolului la alimentare inversă se obţin cu (43.25) din (43.10):

$$\begin{aligned} \underline{U}'_2 &= \underline{D}\underline{U}'_1 + \underline{B}\underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 &= \underline{C}\underline{U}'_1 + \underline{A}\underline{I}'_1. \end{aligned} \tag{43.26}$$

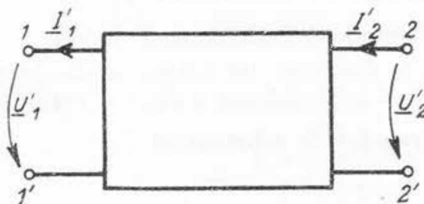


Fig. 43.6.

Se numeşte *cuadripol simetric* un cuadripol la care intervertirea porţilor de intrare şi de ieşire nu afectează exteriorul. Pentru aceasta e necesar şi suficient ca prin substituţia $1 \rightleftarrows 2$, ecuaţiile la alimentarea inversă să coincidă cu ecuaţiile obişnuite (43.7). Condiţia de simetrie necesară şi suficientă rezultă a fi

$$\boxed{\underline{A} = \underline{D}}\,. \tag{43.27}$$

Cu ajutorul parametrilor impedanţa, respectiv admitanţă, condiţia de simetrie se scrie (v. 43.24):

$$\underline{Z}_{22} = -\underline{Z}_{11}, \text{ respectiv } \underline{Y}_{22} = -\underline{Y}_{11}. \tag{43.27'}$$

Un cuadripol simetric reciproc are numai doi parametri independenţi, iar *condiţia de reciprocitate* pentru cuadripoli simetrici se scrie:

$$\underline{A}^2 = 1 + \underline{B}\underline{C}. \tag{43.28}$$

43.4. Determinarea parametrilor cuadripolilor

Principalul obiectiv al studiului unui cuadripol consistă în determinarea parametrilor, care sînt suficienţi şi necesari pentru caracterizarea funcţionării cuadripolului în reţeaua mai mare din care face parte. Această determinare se face analitic sau experimental. În paragraful 44.3 vom prezenta metode matriceale pentru determinarea parametrilor unui cuadripol de structură mai complicată, care poate fi prezentat ca o asociaţie de cuadripoli mai simpli, cu parametri cunoscuţi.

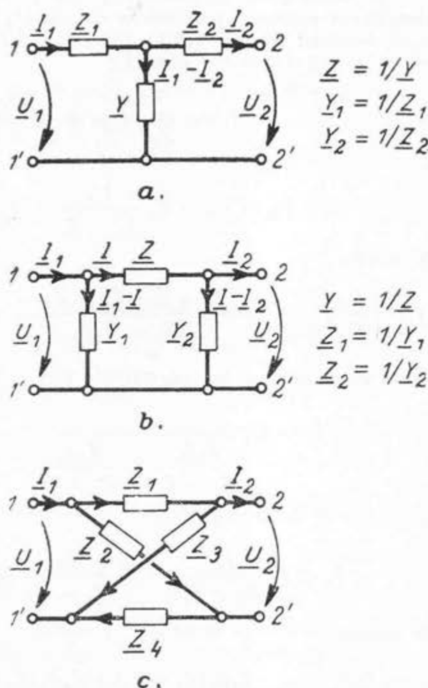


Fig. 43.7.

43.4.1. Determinarea analitică. Dacă se cunoaşte structura interioară a cuadripolului, ecuaţiile fundamentale (sau altele) se pot obţine cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff, eliminînd succesiv curenţii laturilor interioare şi presupunînd date tensiunile $\underline{U}_1$ şi $\underline{U}_2$. Parametrii cuadripolului rezultă atunci prin identificare. Se pot folosi şi direct relaţiile (43.8), (43.12), (43.17), studiind regimuri particulare de mers în gol şi scurtcircuit.

Aplicaţii: 1. *Cuadripolul în T* (fig. 43.7,*a*). Scriind ecuaţiile lui Kirchhoff pe cele două ochiuri, se obţin relaţiile:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}_1\ (\underline{Z}(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) = (\underline{Z}_1 + \underline{Z})\underline{I}_1 - \underline{Z}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = -\underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{Z}(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) = \underline{Z}\underline{I}_1 - (\underline{Z}_2 + \underline{Z})\underline{I}_2, \end{cases}$$

în care apar direct parametrii impedanță

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z},\quad \underline{Z}_{12} = -\underline{Z},\quad \underline{Z}_{21} = \underline{Z},\quad \underline{Z}_{22} = -(\underline{Z}_2 + \underline{Z}). \tag{43.29}$$

Cu relația (43.24), parametrii fundamentali sînt (cu $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$):

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1\underline{Y},\ B = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Y}\underline{Z}_1\underline{Z}_2,\ \ \underline{C} = \underline{Y},\ \underline{D} = 1 + \underline{Z}_2\underline{Y}, \tag{43.30}$$

iar cu relația (43.21) se pot obține parametrii admitanță.

2. *Cuadripol în* Π (fig. 43.7, *b*). Scriind ecuația a doua a lui Kirchhoff pe ochiul central, rezultă:

$$0 = -\underline{U}_1 + \underline{Z}\underline{I} + \underline{U}_2,\quad \underline{I} = \underline{Y}(\underline{U}_1 - \underline{U}_2)$$

și

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_1\underline{U}_1 + \underline{I} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y})\,\underline{U}_1 - \underline{Y}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{Y}_2\underline{U}_2 = \underline{Y}\underline{U}_1 - (\underline{Y}_2 + \underline{Y}) + \underline{U}_2. \end{cases}$$

Acestea sînt ecuațiile în care apar parametrii admitanță:

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y},\quad \underline{Y}_{12} = -\underline{Y},\quad \underline{Y}_{21} = \underline{Y},\quad \underline{Y}_{22} = -(\underline{Y}_2 + \underline{Y}). \tag{43.31}$$

Cu relația (43.24), parametrii fundamentali sînt (cu $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$):

$$\underline{A} = 1 + \underline{Y}_2\underline{Z},\quad \underline{B} = \underline{Z},\quad \underline{C} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Z}\underline{Y}_1\underline{Y}_2,\quad \underline{D} = 1 + \underline{Y}_1\underline{Z}, \tag{43.32}$$

iar cu relația (43.22) se pot obține parametrii impedanță.

3. *Cuadripolul în punte* (fig. 43.7, *c*). La structuri mai complicate e preferabil să studiem direct regimuri particulare de gol ($\underline{I}_2 = 0$ sau $\underline{I}_1 = 0$) și scurtcircuit ($\underline{U}_2 = 0$ sau $\underline{U}_1 = 0$), folosind relațiile (43.8), (43.12), (43.17). În cazul cuadripolului în punte, dacă secundarul e în gol ($\underline{I}_2 = 0$), rezultă:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} = \underline{U}_1\left(\frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4}\right)$$

și

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 - \underline{Z}_1\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} - \underline{Z}_4\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} = \underline{U}_1\frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1\underline{Z}_4}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}.$$

Se obține:

$$\underline{A} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_2\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1\underline{Z}_4};\quad \underline{C} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1\underline{Z}_4}. \tag{43.33}$$

Dacă secundarul e în scurtcircuit ($\underline{U}_2 = 0$), rezultă:

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1\frac{1}{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \dfrac{\underline{Z}_3\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}} = \underline{U}_1\frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}$$

și

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} - \underline{I}_1\frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \underline{U}_1\frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1\underline{Z}_4}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}.$$

Se obține

$$\underline{B} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_3\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_2\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1\underline{Z}_4};\ \underline{D} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_2\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1\underline{Z}_4}. \tag{43.33}$$

Ca verificare, se poate utiliza condiţia de reciprocitate (43.9). Ceilalţi parametri rezultă cu relaţiile (43.12) şi (43.17).

4. *Transformatorul liniar* (fără miez de fier). Considerăm transformatorul studiat în paragraful 36.3.2. şi care constituie un cuadripol cu ecuaţiile (36.24), care se pot scrie:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (R_1 + \mathrm{j}\,\omega \underline{L}_1)\, \underline{I}_1 - \mathrm{j}\,\omega \underline{L}_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \mathrm{j}\,\omega \underline{L}_{21} \underline{I}_1 - (R_2 + \mathrm{j}\,\omega \underline{L}_2)\, \underline{I}_2. \end{cases}$$

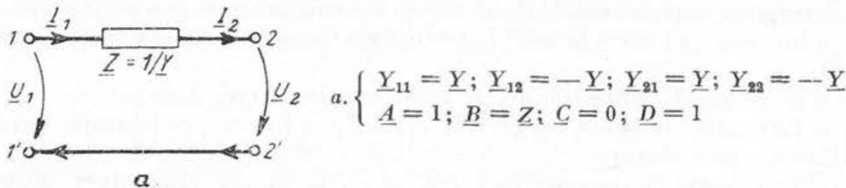
Se constată imediat că acestea sînt ecuaţiile care conţin parametrii impedanţă:

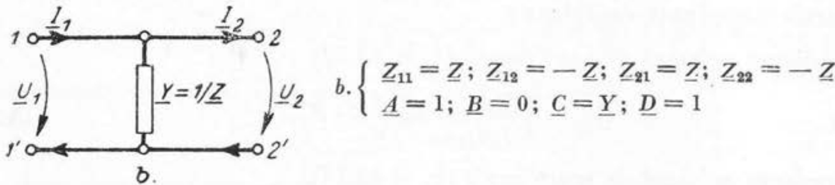
$$\underline{Z}_{11} = R_1 + \mathrm{j}\,\omega \underline{L}_1,\quad \underline{Z}_{12} = -\mathrm{j}\,\omega \underline{L}_{12},\quad \underline{Z}_{21} = \mathrm{j}\,\omega \underline{L}_{21},\quad \underline{Z}_{22} = -(R_2 + \mathrm{j}\,\omega L_2). \tag{43.34}$$

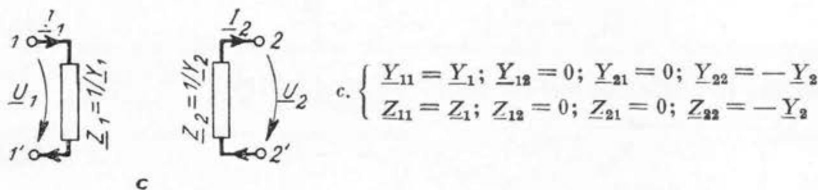
Cu relaţia (43.24) rezultă parametrii fundamentali:

$$\underline{A} = \frac{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}{\mathrm{j}\omega L_{21}};\ \underline{B} = \frac{\omega^2 L_{12}^2 + (R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)(R_2 + \mathrm{j}\omega L_2)}{\mathrm{j}\omega L_{21}};\ \underline{C} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_{21}};\ \underline{D} = \frac{R_2 + \mathrm{j}\omega L_2}{\mathrm{j}\omega L_{21}}. \tag{43.35}$$

5. *Cuadripoli degeneraţi.* În figura 43.8 sînt indicate cîteva tipuri de cuadripoli degeneraţi, împreună cu parametrii corespunzători (care au sens). Parametrii au fost deduşi din ecua-







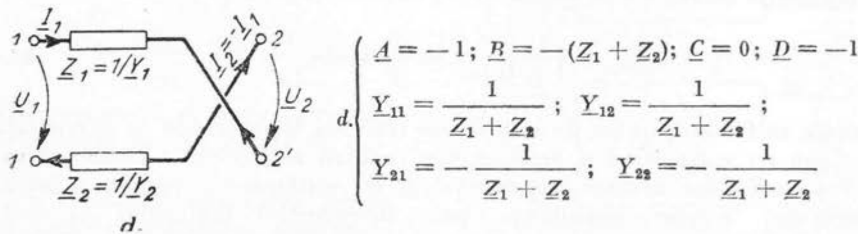


Fig. 43.8

ţiile de mai jos, scrise pentru schemele *a*, *b*, *c*, *d*, în ipoteza că cei doi curenţi ai fiecărei perechi de borne sînt egali şi opuşi (cuadripoli diporţi).

$$\begin{aligned}
&a)\ \underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}\underline{I}_2;\quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 && \text{(ecuaţiile fundamentale)}\\
&b)\ \underline{U}_1 = \underline{U}_2;\quad \underline{I}_1 = \underline{Y}\underline{U}_2 + \underline{I}_2 && \text{(ecuaţiile fundamentale)}\\
&c)\ \underline{U}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}_1;\quad \underline{U}_2 = -\underline{Z}_2\underline{I}_2 && \text{(ecuaţiile cu parametrii impedanţă)}\\
&d)\ \underline{U}_1 = -\underline{U}_2 - (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{I}_2;\ \underline{I}_1 = -\underline{I}_2 && \text{(ecuaţiile fundamentale)}
\end{aligned} \tag{43.36}$$

În cazurile *a* şi *d* nu au sens (sînt infiniţi) parametrii impedanţă, deoarece $\underline{C} = 0$ şi $\underline{\Delta}_y = 0$; în cazul *b* nu au sens (sînt infiniţi) parametrii admitanţă, deoarece $\underline{B} = 0$ şi $\underline{\Delta}_z = 0$; în cazul *c* nu au sens parametrii fundamentali, deoarece $\underline{Y}_{12} = 0$ şi $\underline{Z}_{12} = 0$, iar cuadripolul nu poate realiza nici un transfer de energie între primar şi secundar.

43.4.2. **Determinarea experimentală.** Fără a cunoaşte structura internă a cuadripolului, valorile numerice ale parametrilor săi (la o frecvenţă dată) se pot determina experimental. De obicei se fac următoarele încercări:

— o încercare de mers în gol ($\underline{I}_2 = 0$), cu alimentare directă (pe la bornele primare);

— o încercare de scurtcircuit ($\underline{U}_2 = 0$), cu alimentare directă;

— o încercare de mers în gol ($\underline{I}'_1 = -\underline{I}_1 = 0$), cu alimentare inversă (pe la bornele secundare);

— o încercare de scurtcircuit ($\underline{U}'_1 = \underline{U}_1 = 0$), cu alimentare inversă.

Sînt suficiente trei din aceste patru încercări, în care se măsoară trei dintre următoarele impedanţe complexe:

Impedanţa primară de mers în gol (v. şi 43.12)

$$\underline{Z}_{1_0} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} = \underline{Z}_{11}. \tag{43.37}$$

Impedanţa primară de scurtcircuit (v. şi 43.17)

$$\underline{Z}_{1_{sc}} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}}. \tag{43.38}$$

Impedanţa secundară de mers în gol (v. 43.26 şi 43.12)

$$\underline{Z}_{2_0} = \left(\frac{\underline{U}'_2}{\underline{I}'_2}\right)_{\underline{I}'_1=0} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}} = -\underline{Z}_{22}. \tag{43.39}$$

Impedanţa secundară de scurtcircuit (v. 43.26 şi 43.17)

$$\underline{Z}_{2_{sc}} = \left(\frac{\underline{U}'_2}{\underline{I}'_2}\right)_{\underline{U}'_1=0} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} = -\frac{1}{\underline{Y}_{22}}. \tag{43.40}$$

Măsurările se fac cu puntea de impedanţe (puntea Wheatstone de curent alternativ); sau cu voltmetrul şi ampermetrul (pentru măsurarea valorilor efective şi deci a modulelor acestor impedanţe) şi cu wattmetrul (pentru măsurarea argumentului acestor impedanţe, prin intermediul factorului de putere $\cos\varphi = P/UI$).

Din (43.38...43.40) rezultă că cele patru impedanțe sînt legate prin relația

$$\underline{Z}_{1_0}\underline{Z}_{2_{sc}} = \underline{Z}_{2_0}\underline{Z}_{1_{sc}}, \qquad (43.40')$$

din care cauză numai trei valori independente. Parametrii fundamentali se determină din relațiile de mai sus și din condiția de reciprocitate $\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = 1$. Se obțin expresiile :

$$\left.\begin{aligned} &\underline{C} = \pm \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{2_0}(\underline{Z}_{1_0} - \underline{Z}_{1_{sc}})}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1_0}(\underline{Z}_{2_0} - \underline{Z}_{2_{sc}})}}; \quad \underline{A} = \underline{C}\underline{Z}_{10} \\ &\underline{D} = \underline{C}\underline{Z}_{2_0}; \quad \underline{B} = \underline{C}\underline{Z}_{2_0}\underline{Z}_{1_{sc}} = \underline{C}\underline{Z}_{1_0}\underline{Z}_{2_{sc}} \end{aligned}\right\} \qquad (43.41)$$

Cele două semne de mai sus arată că există doi cuadripoli — cu parametrii fundamentali diferiți prin semn — care au aceleași impedanțe de gol și scurtcircuit. Această ambiguitate provine din faptul că, la măsurarea impedanțelor complexe, bornele de intrare respective pot fi intervertite, fără ca rezultatul măsurării să fie afectat. Ambiguitatea se poate înlătura, dacă se măsoară și defazajul tensiunilor la mersul în gol, adică

$$\alpha = \arg\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} \qquad (43.42)$$

după marcarea prealabilă a bornelor cu 1, 1' și 2, 2'.

Observație : La cuadripoli simetrici, $\underline{A} = \underline{D}$, $\underline{Z}_{1_0} = \underline{Z}_{2_0}$, $\underline{Z}_{1_{sc}} = \underline{Z}_{2_{sc}}$ și relațiile (43.41) capătă forma :

$$\underline{A} = \underline{D} = \pm\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1_0}}{\underline{Z}_{1_0} - \underline{Z}_{1_{sc}}}} = \pm\sqrt{\frac{1}{1 - \underline{Y}_{1_0}\underline{Z}_{1_{sc}}}}; \quad \underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{1_0}}; \quad \underline{B} = \underline{A}\underline{Z}_{1_{sc}}. \qquad (43.43)$$

Pentru exemplificare, a se vedea paragraful 43.6.3, aplicația 2.

43.5. Impedanțe caracteristice

Un cuadripol alimentat direct (pe la bornele primare), care funcționează în sarcină cu o impedanță $\underline{Z}_2 = \underline{U}_2/\underline{I}_2$, conectată la bornele secundare (v. fig. 43.9, *a*), prezintă la bornele de alimentare o impedanță echivalentă complexă (v. rel. 43.7) :

$$\underline{Z}_{e_1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2}{\underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_2 + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_2 + \underline{D}}, \qquad (43.44)$$

numită *impedanță de intrare primară* și dependentă de impedanța de sarcină $\underline{Z}_2$.

Un cuadripol alimentat invers (pe la bornele secundare), care funcționează în sarcină cu o impe-

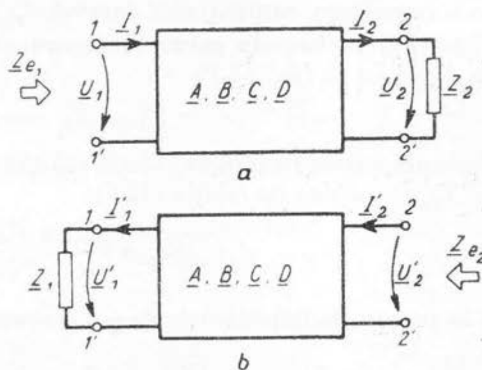


Fig. 43.9

danță $\underline{Z}_1 = \underline{U}_1'/\underline{I}_1'$, conectată la bornele primare (v. fig. 43.9, *b*), prezintă la bornele de alimentare o impedanță echivalentă complexă (v. rel. 43.26):

$$\underline{Z}_{e_2} = \frac{\underline{U}_2'}{\underline{I}_2'} = -\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{D}\underline{U}_1' + \underline{B}\underline{I}_1'}{\underline{C}\underline{U}' + \underline{A}\underline{I}_1'} = \frac{\underline{D}\,\underline{Z}_1+\underline{B}}{\underline{C}\,\underline{Z}_1+\underline{A}}, \tag{43.45}$$

numită *impedanță de intrare secundară* și dependentă de impedanța de sarcină $\underline{Z}_1$. În general, $\underline{Z}_{e_1} \neq \underline{Z}_2$ și $\underline{Z}_{e_2} \neq \underline{Z}_1$.

43.5.1. **Impedanțe caracteristice (iterative).** Se numesc *impedanțe caracteristice iterative* ale unui cuadripol o pereche de impedanțe $\underline{Z}_{c_1}$ și $\underline{Z}_{c_2}$, definite cum urmează:

Impedanța caracteristică directă $\underline{Z}_{c_1}$ e impedanța de sarcină, care trebuie conectată la bornele secundare, pentru ca impedanța de intrare primară să fie egală cu ea (fig. 43.10, *a*):

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{c_1} \longrightarrow \underline{Z}_{e_1} = \underline{Z}_{c_1}. \tag{43.46}$$

Înlocuind aceste valori în relația (43.44) și rezolvînd ecuația obținută în raport cu Z_{c_1}, se obține cu relația (43.9)·

$$\underline{Z}_{c_1} = \frac{\underline{A} - \underline{D} \pm \sqrt{(\underline{A} + \underline{D})^2 + 4}}{2\,\underline{C}} \tag{43.47}$$

și în funcție de impedanțele de gol și scurtcircuit, cu relațiile (43.41),

$$\underline{Z}_{c_1} = \frac{1}{2}[\underline{Z}_{1_0} - \underline{Z}_{2_0} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{1_0} - \underline{Z}_{2_0})^2 + 4\underline{Z}_{2_0}\underline{Z}_{1_{sc}}}]. \tag{43.48}$$

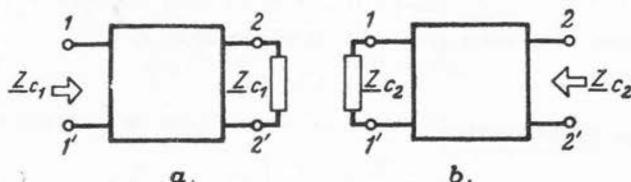


Fig. 43.10

Impedanța caracteristică inversă $\underline{Z}_{c_2}$ e impedanța de sarcină, care trebuie conectată la bornele primare, pentru ca impedanța de intrare secundară să fie egală cu ea (fig. 43.10, *b*),

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{c_2} \longrightarrow \underline{Z}_{e_2} = \underline{Z}_{c_2}. \tag{43.49}$$

Înlocuind aceste valori în relația (43.45) și rezolvînd ecuația obținută în raport cu $\underline{Z}_{c_2}$, se obține cu relația (43.9),

$$\underline{Z}_{c_2} = \frac{\underline{D} - \underline{A} \pm \sqrt{(\underline{A} + \underline{D})^2 + 4}}{2\,\underline{C}} \tag{43.50}$$

și în funcție de impedanțele de gol și scurtcircuit, cu relațiile (43.41),

$$\underline{Z}_{c_2} = \frac{1}{2}\,[\underline{Z}_{2_0} - \underline{Z}_{1_0} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{1_0} - \underline{Z}_{2_0})^2 + 4\underline{Z}_{2_0}\underline{Z}_{1_{sc}}}]. \tag{43.51}$$

În expresiile de mai sus se alege semnul care asigură valori pozitive sau nule pentru părţile reale ale impedanţelor caracteristice. Numai astfel aceste impedanţe sînt realizabile în concret. Impedanţele caracteristice iterative prezintă importanţă în problema *conservării* condiţiilor de adaptare a sarcinei la generator, cînd între sarcină şi generator trebuie să se intercaleze un cuadripol cu anumite funcţiuni (de exemplu, pentru separarea componentelor de curent continuu din circuitele generatorului şi sarcinii). Pentru ca intercalarea unui cuadripol să nu modifice condiţiile de adaptare dintre sarcină şi generator, e necesar ca impedanţa lui caracteristică directă să fie egală cu impedanţa de sarcină (în care caz impedanţa lui de intrare va fi de asemenea egală cu impedanţa de sarcină, iar generatorul va funcţiona în exact aceleaşi condiţii ca în prezenţa sarcinei conectată direct), iar impedanţa caracteristică inversă să fie egală cu impedanţa interioară a generatorului (în care caz impedanţa interioară a generatorului de tensiune echivalent ansamblului generator + cuadripol va fi de asemenea egală cu impedanţa interioară a generatorului dat, iar sarcina va fi alimentată în aceleaşi condiţii de adaptare ca în prezenţa generatorului conectat direct).

Aplicaţie: Considerăm cuadripolul din figura 43.11, la care $\omega L = R$. Impedanţele de gol şi scurtcircuit sînt:

$$\underline{Z}_{1_0} = \mathrm{j}\,\omega L + R = R\,(1 + \mathrm{j}); \qquad \underline{Z}_{2_0} = R$$

$$\underline{Z}_{1_{sc}} = \mathrm{j}\,\omega L = \mathrm{j}R; \quad \underline{Z}_{2_{sc}} = \mathrm{j}\,\omega L R/(R + \mathrm{j}\,\omega L) = \frac{\mathrm{j}R}{2}\ (1 + \mathrm{j}),$$

iar impedanţele caracteristice rezultă:

$$\underline{Z}_{c_1} = \frac{1}{2}(\mathrm{j}\,\omega L \pm \sqrt{4\mathrm{j}\,\omega L R - \omega^2 L^2}) = R\left[\frac{\mathrm{j}}{2} + \sqrt{\mathrm{j} - \frac{1}{2}}\right] \approx R(0{,}556 + \mathrm{j}\,1{,}4)$$

$$\underline{Z}_{c_2} = \frac{1}{2}(-\mathrm{j}\,\omega \underline{L} \pm \sqrt{4\mathrm{j}\,\omega \underline{L}\underline{R} - \omega^2 \underline{L}^2}) = \underline{R}\left[-\frac{\mathrm{j}}{2} + \sqrt{\mathrm{j} - \frac{1}{2}}\right] \approx R\,(0{,}556 + \mathrm{j}0{,}4).$$

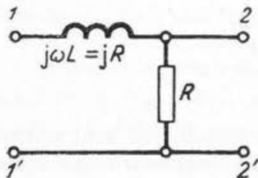


Fig. 43.11

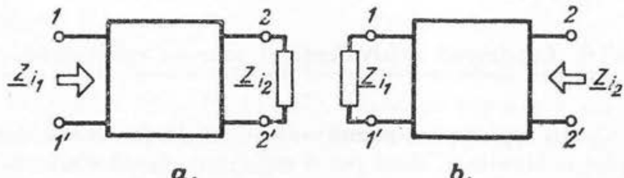


Fig. 43.12

43.5.2. Impedanţe imagini. Se numesc *impedanţe imagini* ale unui cuadripol o pereche de impedanţe $\underline{Z}_{i_1}$ şi $\underline{Z}_{i_2}$, astfel încît prima e impedanţa primară de intrare, dacă a doua e impedanţa de sarcină conectată la bornele secundare, iar a doua e impedanţa secundară de intrare, dacă prima e impedanţa de sarcină conectată la bornele primare (fig. 43.12):

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{i_2} \to \underline{Z}_{e_1} = \underline{Z}_{i_1} \quad \text{şi} \quad \underline{Z}_1 = \underline{Z}_{i_1} \to \underline{Z}_{e_2} = \underline{Z}_{i_2}. \tag{43.52}$$

Introducînd aceste condiţii în relaţiile (43.44) (43.45), se obţine cu relaţia (43.9) *impedanţa imagine primară:*

$$\underline{Z}_{i_1} = \pm\sqrt{\frac{\underline{A}\underline{B}}{\underline{C}\underline{D}}} = \pm\sqrt{\underline{Z}_{1_0}\underline{Z}_{1_{sc}}}. \tag{43.53}$$

şi *impedanţa imagine secundară:*

$$\underline{Z}_{i_2} = \pm\sqrt{\frac{\underline{D}\underline{B}}{\underline{C}\underline{A}}} = \pm\sqrt{\underline{Z}_{2_0}\underline{Z}_{2_{sc}}}. \tag{43.54}$$

Semnul se alege astfel ca partea reală a acestor impedanţe să nu fie negativă, asigurîndu-se astfel posibilitatea de a le realiza în concret. Impedanţele imagini prezintă importanţă în problema *realizării* condiţiei de adaptare a sarcinii la generator din punctul de vedere al egalităţii impedanţei de sarcină cu impedanţa interioară a generatorului, prin intercalarea unui cuadripol între generator şi sarcină. Pentru aceasta e suficient ca impedanţa imagine primară să fie egală cu impedanţa interioară a generatorului, iar impedanţa imagine secundară să fie egală cu impedanţa de sarcină.

Aplicaţie: În cazul cuadripolului din figura 43.12 se obţine:

$$\underline{Z}_{i_1} = \pm \sqrt{(R + \mathrm{j}\,\omega L)\,\mathrm{j}\,\omega L} = R(0{,}453 + \mathrm{j}\ 1{,}098);$$

$$\underline{Z}_{i_2} = \pm \sqrt{\frac{\mathrm{j}\,\omega L R^2}{R+\mathrm{j}\,\omega L}} = \frac{R}{\sqrt{2}}(1{,}098 + \mathrm{j}\ 0.453).$$

43.5.3. **Impedanţa caracteristică a unui cuadripol simetric.** În cazul unui cuadripol simetric $\underline{A} = \underline{D}$, $\underline{Z}_{1_0} = \underline{Z}_{2_0}$, $\underline{Z}_{1_{sc}} = \underline{Z}_{2_{sc}}$ şi toate impedanţele caracteristice şi imagine, definite mai sus, coincid. Se obţine astfel impedanţa caracteristică $\underline{Z}_c$ a unui cuadripol simetric, egală cu impedanţa de sarcină, care, fiind conectată la una dintre perechile de borne, asigură o impedanţă de intrare egală cu ea la cealaltă pereche de borne. Din relaţia (43.48) rezultă:

$$\underline{Z}_c = \pm \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \pm \sqrt{\underline{Z}_{1_0}\underline{Z}_{1_{sc}}} \tag{43.55}$$

cu

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_c \rightarrow \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_c. \tag{43.55'}$$

43.6. Cuadripoli echivalenţi şi scheme echivalente

În regim permanent sinusoidal de frecvenţă dată, doi cuadripoli sînt complet echivalenţi, *dacă pot fi substituiţi unul altuia în reţeaua mai mare din care fac parte, fără ca să se modifice curenţii şi tensiunile din această reţea.* Determinarea unui cuadripol echivalent cu un cuadripol dat este o operaţie de *transfigurare* (v. par. 38.2). Pentru ca doi cuadripoli să fie complet echivalenţi, e necesar şi suficient să aibă aceleaşi ecuaţii caracteristice — adică aceiaşi parametri ($\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$) sau ($\underline{Z}_{11}$, $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{21}$, $\underline{Z}_{22}$) sau ($\underline{Y}_{11}$, $\underline{Y}_{12}$, $\underline{Y}_{21}$, $\underline{Y}_{22}$), în cazul cuadripolilor diporţi. Verificarea caracterului diport al cuadripolilor constituie în acest caz o operaţie strict necesară, prealabilă analizei valorilor parametrilor [1].

Se numeşte *schemă echivalentă* a unui cuadripol dat reprezentarea în desen a structurii unui cuadripol fictiv, care ar avea aceiaşi parametri, fără ca realizarea în concret a acestei structuri cu elemente dipolare pasive de circuit (rezistoare, bobine, condensatoare) să fie neapărat posibilă. În particular, nu e realizabilă în concret o schemă echivalentă, care conţine impedanţe cu parte reală negativă. Dacă o schemă echivalentă este realizabilă în concret, pe baza ei se poate construi un *cuadripol echivalent* cuadripolului dat.

[1] Deoarece caracterul diport al unui cuadripol poate depinde de reţeaua exterioară în care e conectat (v. par. 43.2), echivalenţa a doi cuadripoli diporţi e relativă la această reţea şi poate să nu mai subsiste în cazul altei reţele exterioare. Din acest punct de vedere, numai echivalenţa cuadripolilor generali are un caracter absolut.

Echivalenţa cuadripolilor este considerată aici la o frecvenţă dată şi poate să nu subsiste la o altă frecvenţă, dacă cei doi cuadripoli admit diferite dependenţe de frecvenţă pentru parametrii corespunzători. Se pot considera şi cuadripoli echivalenţi la orice frecvenţă, după cum se pot considera echivalenţe parţiale — valabile cu aproximaţie — în anumite limite de variaţie a condiţiilor de funcţionare. În sfîrşit, în anumite cazuri (de ex. la transformatoare şi maşini electrice), se pot considera scheme echivalente reduse, în care curenţii, tensiunile şi parametrii diferă de valorile lor reale prin anumiţi factori numerici (de reducere) bine determinaţi.

Deoarece un cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc are trei parametri complecşi independenţi, schemele echivalente, determinabile pentru orice cuadripol nedegenerat din această clasă trebuie să corespundă unor structuri cu cel puţin trei impedanţe complexe. Cele mai simple scheme de acest fel sînt cele în T şi în π. În aplicaţii se mai folosesc şi alte scheme mai complicate — de exemplu schema în punte (v. aplicaţia 3 de la par. 43.4.1), pentru care se poate demonstra că există o structură realizabilă în concret, oricare ar fi cuadripolul liniar pasiv şi reciproc dat.

43.6.1. **Schema echivalentă în T.** În paragraful 43.4.1 am studiat cuadripolul în T (fig. 43.7, *a*), cu parametrii (43.29), (43.30). Dacă se consideră un cuadripol dat, cu parametrii fundamentali $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, impedanţele şi admitanţele schemei echivalente în T rezultă din relaţiile (43.30) :

$$\underline{Y} = \underline{C}, \ \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{C}}, \ \underline{Z}_2 = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{C}}. \tag{43.56}$$

Pentru cuadripolii simetrici $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$.

43.6.2. **Schema echivalentă în Π.** În paragraful 43.4.1. am studiat cuadripolul în Π (fig. 43.7, *b*), cu parametrii (43.31), (43.32). Dacă se consideră un cuadripol dat, cu parametrii fundamentali $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, impedanţele şi admitanţele echivalente în Π rezultă din relaţiile (43.32) :

$$\underline{Z} = \underline{B}, \ \ \underline{Y}_1 = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{B}}, \ \ \underline{Y}_2 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{B}}. \tag{43.57}$$

Pentru cuadripolii simetrici $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2$.

43.6.3. **Aplicaţii :** **1.** *Schemele echivalente ale unui transformator fără miez de fier.* Considerăm transformatorul din figura 43.13, *a*, la care presupunem că s-au ales astfel bornele 2, 2′, încît $L_{12} > 0$ (dacă 1 şi 2 sînt bornele polarizate ale înfăşurărilor). Deoarece la orice transformator $L_{12} \leqslant \sqrt{L_1 L_2}$, mai admitem că, în acest caz, $L_1 > L_{12} > L_2$. Ecuaţiile transformatorului sînt (36.24), iar parametrii impedanţă sînt (43.34). Cu relaţiile (43.57) şi (43.24) rezultă parametrii schemei echivalente în T (notaţi aici cu accent, pentru a evita confuzia cu impedanţele transformatorului) din figura 43.13, *b* :

$$\underline{Z}_1' = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{21} = R_1 + \mathrm{j}\,\omega\,(L_1 - L_{21}) \quad ; \quad \underline{Z}_2' = -\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{21} = R_2 - \mathrm{j}\,\omega\,(L_{21} - L_2)$$
$$\underline{Z}' = \underline{Z}_{21} = \mathrm{j}\,\omega\, L_{12}. \tag{43.58}$$

În figura 43.13, *d* e indicată realizarea în concret a acestei scheme cu rezistoare, bobine (pentru reactanţele pozitive) şi condensatoare (pentru reactanţele negative).

Cu relațiile (43.58) și (43.35) rezultă parametrii schemei echivalente în π (notați aici cu dublu accent), din figura 43.13, c. Calculăm numai impedanța ramurii din mijloc:

$$\underline{Z}'' = \underline{B} = -\frac{R_1R_2 - \omega^2(L_1L_2 - L_{12}^2) + j\,\omega\,(L_1R_2 + L_2R_1)}{j\,\omega\,L_{21}} = -\frac{L_1R_2 + L_2R_1}{L_{21}} +$$

$$+ j\,\omega\,\frac{R_1R_2 - \omega^2(L_1L_2 - L_{12}^2)}{\omega^2 L_{21}}. \tag{43.59}$$

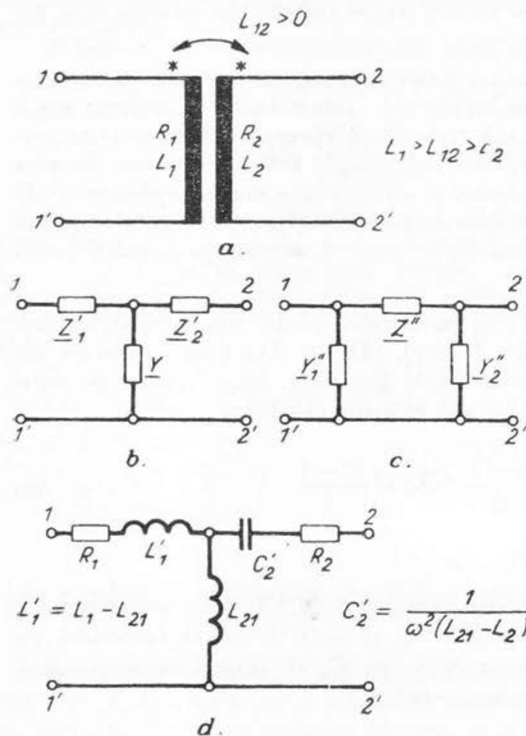


Fig. 43.13

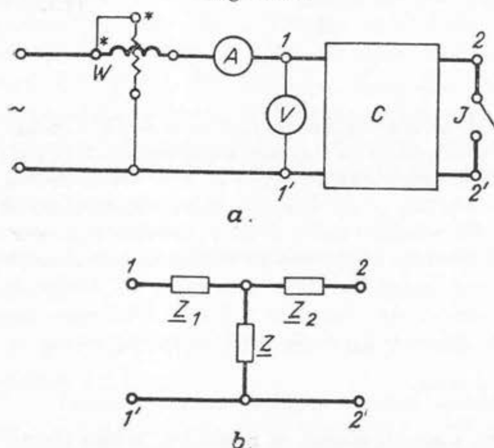


Fig. 43.14

Deoarece Re $\{\underline{Z}''\} < 0$, schema echivalentă în π a unui transformator nu poate fi realizată în concret.

Observație: Pentru transformatoare se folosesc frecvent scheme echivalente reduse.

2. *Determinarea experimentală a parametrilor și schemei echivalente în T a unui cuadripol simetric.* Cu montajul din figura 43.14, *a* s-au făcut încercări de mers în gol ($\mathfrak{J}$ deschis) și în scurtcircuit ($\mathfrak{J}$ închis) la un cuadripol simetric *C*, alimentat pe la bornele primare. La încercarea de mers în gol, s-au măsurat:

$$U_{1_0} = 200\ \text{V},\quad I_{1_0} = 20\ \text{A},$$

$$P_{1_0} = 2\,400\ \text{W}\quad \text{(inductiv)}$$

La încercarea de mers în scurtcircuit s-au măsurat:

$$U_{1_{sc}} = 102{,}6\ \text{V},\quad I_{1_{sc}} = 10\ \text{A},$$

$$P_{1_{sc}} = 984\ \text{W}\quad \text{(inductiv)}.$$

Rezultă: $Z_{1_0} = \dfrac{U_{1_0}}{I_{1_0}} = 10\ \Omega$;

$$\cos\varphi_{1_0} = \frac{P_{1_0}}{U_{1_0}I_{1_0}} = 0{,}6\ ;$$

$$\sin\varphi_{1_0} = 0{,}8$$

$$Z_{1_{sc}} = \frac{U_{1_{sc}}}{I_{1_{sc}}} = 10{,}26\ \Omega\ ;$$

$$\cos\varphi_{1_{sc}} = \frac{P_{1_{sc}}}{U_{1_{sc}}I_{1_{sc}}} = 0{,}96;$$

$$\sin\varphi_{1_{sc}} = 0{,}28.$$

Impedanțele complexe primare de mers în gol și în scurtcircuit sînt deci:

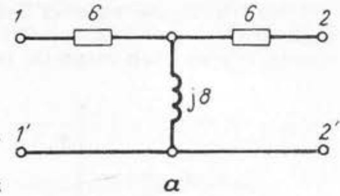
$$\underline{Z}_{1_0} = Z_{1_0}e^{j\varphi_{1_0}} = 6 + j\,8\ \Omega,$$

$$\underline{Z}_{1_{sc}} = Z_{1_{sc}}e^{j\varphi_{1_{sc}}} = 9{,}84 + j\,2{,}88\ \Omega.$$

Cu relaţia (43.41), parametrii fundamentali sînt:

$$\underline{A} = \underline{D} = \pm \sqrt{\frac{6 + j\,8}{-3{,}84 + j\,5{,}12}} = \pm (1 - 0{,}75\,j);$$

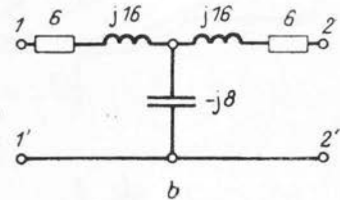
$$\underline{B} = \underline{Z}_{1_{sc}}\underline{A} = \pm (12{,}01 - 4{,}48\,j); \quad \underline{C} = \underline{A}/\underline{Z}_{1_0} = \mp 0{,}125\,j.$$



a

Cu relaţia (43.56), impedanţele cuadripolului în T echivalent din figura 43.14, *b* sînt:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{C}} = \pm 8\,j; \quad \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \begin{cases} 6 \\ 6 + j\,16. \end{cases}$$



b

Fig. 43.15

Există deci două scheme echivalente în T, ambele realizabile în concret (fig. 43.15, a şi b), compatibile cu măsurările efectuate. Aceasta, deoarece măsurările de impedanţe au rezultate invariante la permutarea bornelor primare (1 → 1', 1' → 1). Cei doi cuadripoli din figura 43.15 au parametrii egali şi de semn schimbat şi nu sînt echivalenţi între ei decît după permutarea bornelor uneia dintre porţi.

43.7. Cuadripoli nereciproci

Prezentăm mai jos exemple de cuadripoli nereciproci, care au patru parametri independenţi, relaţiile (43.9), (43.13), (43.18) nefiind valabile. În cazul reţelelor liniare, astfel de cuadripoli nu se pot realiza cu elemente de circuit dipolare (pentru care s-a demonstrat teorema reciprocităţii), ci numai cu elemente de circuit multipolare.

43.7.1. **Giratorul.** Se numeşte *girator* un cuadripol pasiv şi liniar zis „antireciproc", pentru că admite relaţiile de antireciprocitate:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}\ , \quad \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}, \quad \underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = -1. \tag{43.60}$$

Se numeşte *girator ideal* (cu simbolul grafic din fig. 43.16) un girator cu ecuaţiile caracteristice:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \pm r_g \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \pm r_g \underline{I}_1 \end{aligned}\right\} \ (r_g > 0), \tag{43.61}$$

în care semnul depinde de notarea bornelor. Giratorul ideal are deci parametrii de cuadripol:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{Z}_{11} = 0; \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \pm r_g\ ; \quad \underline{Z}_{22} = 0 \\ &\underline{A} = 0; \quad \underline{B} = \pm r_g\ ; \quad \underline{C} = \pm \frac{1}{r_g}\,; \ \underline{D} = 0 \\ &\underline{Y}_{11} = 0; \quad \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = \pm \frac{1}{r_g}; \quad \underline{Y}_{12} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{43.62}$$

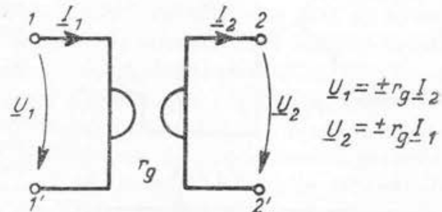


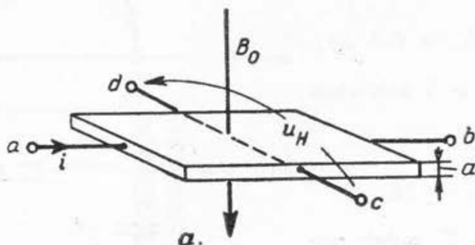
Fig. 43.16

care depind de un singur parametru distinct, rezistenţa de giraţie $r_g > 0$.

43.7.2. Girator cu efect Hall. Se poate realiza un girator, dacă se utilizează efectul Hall, conform căruia, cînd un curent i străbate o plăcuţă conductoare de grosime a (fig. 43.17, a), situată într-un cîmp magnetic transversal de inducţie B_0, apare o tensiune transversală u_H (tensiune Hall):

$$u_H = -k_H \frac{iB_0}{a} = r_g i, \quad (43.63)$$

cu un astfel de sens de referinţă, încît cele trei sensuri ale mărimilor i, B_0, u_H formează un triedru drept. Constanta k_H se numeşte *constanta Hall* şi e negativă pentru efectul Hall normal, care se poate interpreta cu mijloacele fizicii clasice, ca fiind efectul forţelor pe care cîmpul magnetic le exercită asupra electorilor de conducţie în mişcare.



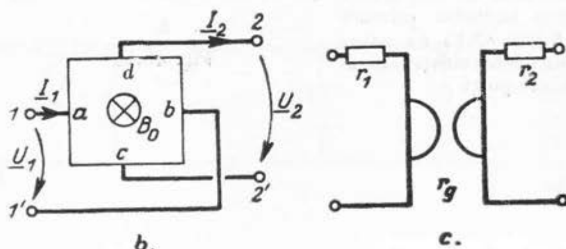


Fig. 43.17.

Dacă vom considera acum o plăcuţă Hall constituind un cuadripol, ca în figura 43.17, b, tensiunea primară $\underline{U}_1 = \underline{U}_{1'} = \underline{U}_{ab}$ va fi suma dintre căderea de tensiune $r_1\underline{I}_1$, în care $r_1 = r_{ab}$ e rezistenţa plăcuţei în sensul ab şi căderea de tensiune Hall $-r_g\underline{I}_2$ (produsă de curentul $\underline{I}_2 = \underline{I}_{cd}$) cu sensul, determinat după regula de mai sus, de la b la a, adică opus curentului I_1:

$$\underline{U}_1 = r_1\underline{I}_1 - r_g\underline{I}_2.$$

Tensiunea secundară $\underline{U}_2 = \underline{U}'_{2'} = -\underline{U}_{cd}$ va fi egală şi de semn contrar cu suma dintre căderea de tensiune $r_2\underline{I}_2$ (în care $r_2 = r_{cd}$ e rezistenţa plăcuţei în sensul cd) şi căderea de tensiune Hall $r_g\underline{I}_1$ (produsă de curentul $\underline{I}_1$),

$$-\underline{U}_2 = r_2\underline{I}_2 + r_g\underline{I}_1.$$

Ecuaţiile giratorului cu efect Hall sînt deci:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= r_1\underline{I}_1 - r_g\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= -r_g\underline{I}_1 - r_2\underline{I}_2 \end{aligned}\right\} \quad (43.64)$$

şi verifică condiţia de antireciprocitate $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -r_g$. Schema echivalentă a giratorului cu efect Hall (fig. 43.17, c) cuprinde un girator ideal cu rezistenţele r_1, respectiv r_2, în serie în circuitul primar, respectiv secundar.

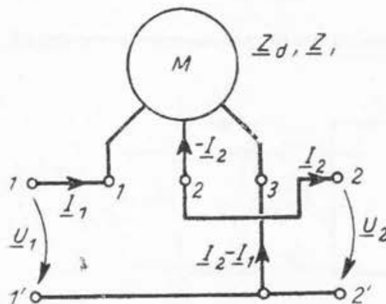


Fig. 43.18.

43.7.3. Cuadripol nereciproc realizat cu o maşină asincronă. Considerăm un motor asincron, care reprezintă un receptor trifazat practic echilibrat, cu impedanţa directă $\underline{Z}_d = \frac{1}{\underline{Y}_d}$ şi impedanţa inversă $\underline{Z}_i = \frac{1}{\underline{Y}_i}$, conectat ca în figura 43.18, astfel încît să constituie un cuadripol diport. Tensiunea directă, respectiv inversă, rezultă cu relaţia (42.6):

$$\underline{U}_d = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a\underline{U}_2); \quad \underline{U}_i = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2), \quad (43.65)$$

deoarece pentru calculul componentei *directă* și *inversă* a unui sistem de tensiuni stelate se poate alege un punct neutru arbitrar (v. 42.1.5, *b*), de exemplu borna 3, astfel că $\underline{U}_{13} = \underline{U}_1$, $\underline{U}_{23} = \underline{U}_2$, $\underline{U}_{33} = 0$.

Curentul direct, respectiv invers, rezultă :

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}_d} = \frac{\underline{U}_1 + a\underline{U}_2}{3}\underline{Y}_d; \quad \underline{I}_i = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}_i} = \frac{\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2}{3}\underline{Y}_i, \quad (\underline{I}_h = 0) \tag{43.66}$$

Curenții de fază sînt, în acest caz, $\underline{I}_1$, $-\underline{I}_2$, $\underline{I}_2 - \underline{I}_1$ și se pot calcula din relația (43.66) :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_d + \underline{I}_i = \underline{U}_1\left(\dfrac{\underline{Y}_d + \underline{Y}_i}{3}\right) + \underline{U}_2\left(\dfrac{a\underline{Y}_d + a^2\underline{Y}_i}{3}\right) \\ \underline{I}_2 = -(-\underline{I}_2) = -(a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i) = -\underline{U}_1\left(\dfrac{a^2\underline{Y}_d + a\underline{Y}_i}{3}\right) - \underline{U}_2\left(\dfrac{\underline{Y}_d + \underline{Y}_i}{3}\right). \end{cases} \tag{43.67}$$

Se observă că parametrii admitanță ai acestui cuadripol sînt :

$$\left.\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \frac{1}{3}(\underline{Y}_d + \underline{Y}_i); & \underline{Y}_{12} &= \frac{1}{3}(a\underline{Y}_d + a^2\underline{Y}_i) \\ \underline{Y}_{21} &= -\frac{1}{3}(a^2\underline{Y}_d + a\underline{Y}_i); & \underline{Y}_{22} &= -\frac{1}{3}(\underline{Y}_d + \underline{Y}_i) \end{aligned}\right\}. \tag{43.68}$$

Cuadripolul e simetric ($\underline{Y}_{11} = -\underline{Y}_{22}$), dar nereciproc $\underline{Y}_{12} \neq -\underline{Y}_{21}$ (deoarece $\underline{Y}_d \neq \underline{Y}_i$).

44. UTILIZAREA CALCULULUI MATRICEAL

Studiul rețelelor electrice liniare — și în particular al cuadripolilor — se poate face în mod sistematic cu ajutorul calculului matriceal.

Deși relațiile fundamentale ale acestor rețele (teoremele lui Kirchhoff) sînt ecuații algebrice de gradul întîi, rezolvarea rețelelor devine foarte dificilă în cazul unui număr mare de ecuații și de necunoscute. Metodele în care se utilizează reducerea numărului de ecuații (v. par. 38.3 și 38.4) sau simplificarea lor, prin efectuarea unor schimbări de variabile — ca și metodele în care se utilizează interconexiunea unor rețele mai simple, cunoscute, pentru a deduce parametrii unei rețele mai complicate — se dezvoltă deosebit de sistematic în scrierea matriceală. Pe această cale, „mecanizarea" calculului e atît de avansată, încît aplicarea unor reguli bine determinate de operare face inutilă urmărirea atentă a diferitelor convenții, utilizate în formularea relațiilor (de ex. a convențiilor de semne), sau referirea la figuri ajutătoare. De aceea, metodele matriceale sînt deosebit de apte pentru efectuarea operațiilor cu calculatoare electronice. Totodată, extrema concizie și eleganța de formulare a raționamentelor în scrierea matriceală asigură eficacitatea acestei scrieri în cercetările teoretice. Fără a pierde din vedere aceste avantaje, trebuie însă să nu se uite că metodele matriceale nu aduc nimic nou din punctul de vedere al proprie-

tăților fundamentale ale rețelelor liniare. *Orice problemă rezolvată matriceal e rezolvabilă și numai cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff.* În cele ce urmează vom prezenta numai aplicațiile calculului matriceal la studiul cuadripolilor.

44.1. Matrice și operații algebrice cu matrice

44.1.1. Definiții. O matrice p-dimensională e un ansamblu de elemente cu p indici $a_{k_1 k_2 \ldots k_p}$, ordonat după fiecare indice în parte într-o configurație p-dimensională, pentru care se definesc operații de adunare, amplificare cu un scalar și înmulțire (v. par. 44.1.2) [1].

În aplicarea calculului matriceal la studiul rețelelor electrice interesează *matricele bidimensionale*, ale căror elemente a_{ij} au doi indici $i = 1, 2, \ldots, m$ și $j = 1, 2, \ldots, n$ și sînt ordonabile într-un tablou dreptunghiular cu m linii (primul indice e al liniei) și n coloane (al doilea e al coloanei):

$$\|a\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \qquad (44.1)$$

Pentru simbolul unei matrice vom folosi simbolul elementului ei generic, pus între bare duble verticale. Explicit, matricea se reprezintă prin tabloul elementelor ei, puse între aceleași bare duble. Pentru a evita confuziile care se pot face prin așezarea prea apropiată a elementelor (care pot avea expresii mai complicate), se reprezintă matricele și ca în figura 44.1, prin tablouri împărțite în căsuțe. Elementele unei matrice pot fi numere (reale sau complexe, ca în exemplele pe care le vom da), dar și funcții, operatori etc. — cu singura condiție ca pentru aceste elemente operațiile de adunare, amplificare cu un scalar și înmulțire să fi fost definite în prealabil. Elementele unei matrice pot fi, la rîndul lor, matrice. Numerele de linii (m) și de coloane (n) definesc ordinul matricei, notat $m \times n$.

Se definesc următoarele tipuri particulare de matrice (v. fig. 44.2): *a) matrice dreptunghiu-*

$\|a\| =$

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}

Fig. 44.1.

a.

7	-5	0	1+j
0	j	3	1,2

b.

7	-5	0
0	j	3
18	7	7

c.

-4	+4	-j	+j

d.

-4
0
j5

e.

3	1+j	-j	3+j
1+j	-2	4	18
-j	4	0	0
3+j	18	0	j5

f.

4	0	0	0
0	j	0	0
0	0	1+j	0
0	0	0	-3

g.

1	0	0
0	1	0
0	0	1

h.

0	0	0
0	0	0
0	0	0

i.

7

Fig. 44.2.

[1] Uneori, în literatura tehnică, se confundă conceptul de matrice cu acela de tensor. Un tensor de ordinul p e o mărime geometrică, definită într-un spațiu m-dimensional, care caracterizează o proprietate fizică sau geometrică intrinsecă în acest spațiu. În raport cu fiecare sistem de coordonate din acest spațiu, tensorul are m^p componente scalare, care constituie o *matrice* p-dimensională. La schimbarea sistemului de coordonate, matricea componentelor tensorului se schimbă (deși tensorul e același) după anumite transformări liniare, asociate transformării coordonatelor.

lară, cu $m \neq n$; *b) matrice pătratică*, cu $m = n$ (matrice pătratică de ordinul n); *c) matrice linie*, cu $m = 1$ și $n \neq 1$, ale cărei elemente b_{1k} au primul indice egal cu unitatea, din care cauză acest indice nu se mai scrie :

$$b_{1k} = b_k \quad (k = 1, 2, ..., n);$$

d) matrice coloană, cu $m \neq 1$, $n = 1$, ale cărei elemente c_{j1} au al doilea indice egal cu unitatea, din care cauză acest indice nu se mai scrie :

$$c_{j1} = c_j \quad (j = 1, 2, ..., m);$$

e) matrice simetrică, cu elementele simetrice față de diagonala principală egale între ele : $a_{ik} = a_{ki}$; *f) matrice diagonală*, cu toate elementele cu indici distincți egale cu zero : $a_{ik} = 0$ $(i \neq k)$; *g) matrice unitate*, $\|1\|$ sau $\|\delta\|$, cu toate elementele nule, afară de cele cu indici egali (diagonala principală), care sînt egale cu unitatea : $\delta_{ik} = 0$ $(i \neq k)$, $\delta_{ii} = 1$; *h) matrice nulă*, $\|0\|$ notată și fără bare cu cifra 0, cu toate elementele nule; *i) matrice cu un singur element*, cu $m = 1$, $n = 1$ (și care nu trebuie identificată cu unicul ei element).

Fiecărei matrice pătratice $\|a\|$ i se poate asocia un determinant : determinantul

$$\Delta = |a| = \det \|a\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (44.2)$$

$$\|a\| = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \|a\|_t$$

Fig. 44.3.

format cu elementele ei. Dacă acest determinant e nul, matricea se numește *matrice degenerată*.

Se numește *matrice transpusă* a unei matrice $\|a\|$ date, de ordinul $m \times n$, cu elementele a_{ik}, o altă matrice $\|b\| = \|a\|_t$ de ordinul $n \times m$, ale cărei elemente $b_{ik} = (a_{ik})_t$ sînt :

$$b_{ik} = (a_{ik})_t = a_{ki}. \quad (44.3)$$

Dacă $\|b\|$ e transpusa lui $\|a\|$, rezultă că $\|a\|$ e transpusa lui $\|b\|$ și cele două matrice (fig. 44.3) provin una din cealaltă prin schimbarea liniilor în coloane.

Observație : Determinantul transpusei e egal cu determinantul matricei (patratice) date, deoarece schimbarea liniilor în coloane nu afectează valoarea unui determinant.

44.1.2. Operații algebrice cu matrice. Două matrice de același ordin $m \times n$ sînt *egale*, dacă au elementele omologe egale

$$\|a\| = \|b\|, \text{ dacă și numai dacă } a_{ik} = b_{ik} \begin{cases} i = 1,2, \ldots, m \\ k = 1,2, \ldots, n. \end{cases} \quad (44.4)$$

Egalitatea a două matrice de ordinul $m \times n$ e echivalentă cu mn egalități între elementele ei.

Observație : Egalitatea matricelor pătratice atrage după sine egalitatea determinanților lor, dar reciproca nu e adevărată.

Operațiile algebrice fundamentale caracteristice matricelor sînt adunarea, amplificarea cu un scalar și înmulțirea. Alte operații sînt derivate din acestea : scăderea se definește prin adunarea unei matrice cu o a doua, amplificată cu -1, împărțirea cu un scalar μ se definește prin amplificarea cu $\frac{1}{\mu}$, ridicarea la o putere întreagă, prin înmulțirea repetată cu ea însăși (v. și par. 44.1.3.).

Adunarea matricelor de același ordin e operația definită de adunarea elementelor omologe, două cîte două, și conduce la o matrice de același ordin :

$$\|c\| = \|a\| + \|b\|,$$

$$\text{numai dacă } \boxed{c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}}. \quad (44.5)$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \\ 1+j & j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 4j \\ 0 & 1-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4+4j \\ 1+j & 1 \end{bmatrix}$$

Fig. 44.4.

În figura 44.4 e exemplificată adunarea a două matrice de ordinul 3×2.

Observație: Determinantul sumei a două matrice pătratice nu e egal cu suma determinanților lor.

Amplificarea unei matrice cu un scalar λ e operația definită de amplificarea tuturor elementelor matricei cu acel scalar și conduce la o matrice de același ordin:

$$\|d\| = \lambda \|a\|, \text{ dacă și numai dacă } \boxed{d_{ik} = \lambda a_{ik}}. \tag{44.6}$$

În figura 44.5 sînt exemplificate amplificările unei matrice de ordinul 2×3, cu scalarul 3, respectiv $\frac{1}{2}$. Ultima se mai numește împărțirea matricei cu scalarul 2.

Observație: Determinantul matricei pătratice $\lambda \|a\|$ de ordinul n nu e egal cu produsul prin λ al determinantului lui $\|a\|$:

$$\det (\lambda \|a\|) = \lambda^n \det \|a\| \neq \lambda \det \|a\|.$$

La un determinant, un factor comun multiplică numai elementele unei linii sau ale unei coloane, pe cînd la o matrice multiplică toate elementele ei.

Înmulțirea matricelor $\|a\|$ *și* $\|b\|$ (în această ordine) e operația care duce la o matrice $\|c\|$, avînd numărul de linii al primei matrice și numărul de coloane al celei de-a doua, fiecare element c_{ik} al *matricei produs* fiind obținut prin însumarea tuturor produselor dintre elementele liniei i a primei matrice și elementele omologe ale coloanei k a celei de-a doua matrice (conform schemei din figura 44. 6):

$$\|c\| = \|a\| \cdot \|b\|, \qquad \text{dacă } c_{ik} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rk}. \tag{44.7}$$

$$3 \cdot \begin{Vmatrix} -4 & 1 & 1+j \\ 0 & 4 & 10 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -12 & 3 & 3+j3 \\ 0 & 12 & 30 \end{Vmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{Vmatrix} -4 & 1 & 1+j \\ 0 & 4 & 10 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1+j}{2} \\ 0 & 2 & 5 \end{Vmatrix}$$

Fig. 44.5.

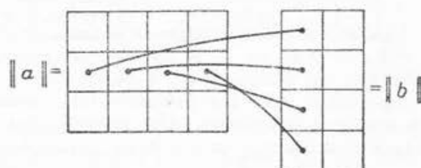


Fig. 44.6.

O matrice de ordinul $x \times n$ se poate deci înmulți numai cu o matrice de ordinul $n \times y$ (în această ordine). O matrice $\|a\|$ de ordinul $m \times n$ se poate înmulți cu o matrice $\|b\|$ de ordinul $n \times m$ și în ordinea dată $\|a\| \cdot \|b\|$ și în oidinea inversă:

$$\|d\| = \|b\| \cdot \|a\| \qquad \text{cu} \qquad d_{ik} = \sum_{s=1}^{n} b_{is} a_{sk}. \tag{44.8}$$

În general însă $\|a\| \cdot \|b\| \neq \|b\| \cdot \|a\|$, adică produsul matricelor nu este comutativ. În figura 44.7 se dau exemple care ilustrează modul de calcul al produsului și necomutativitatea lui. Se demonstrează fără dificultăți că produsul matricelor este asociativ :

$$(\|a\| \cdot \|b\|) \cdot \|c\| = \|a\| \cdot (\|b\| \cdot \|c\|) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\| \qquad (44.9)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & j & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & j \\ 0 & 1 \\ -1 & -j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\times2+3\times0+0\times(-1) & 1\times j+3\times1+0\times(-j) \\ 0\times2+j\times0+1\times(-1) & 0\times j+j\times1+1\times(-j) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3+j \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

a

$$\begin{vmatrix} 2 & j \\ 0 & 1 \\ -1 & -j \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & j & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\times1+j\times0 & 2\times3+j\times j & 2\times0+j\times1 \\ 0\times1+1\times0 & 0\times3+1\times j & 0\times0+1\times1 \\ -1\times1+(-j)\times0 & -1\times3+(-j)\times j & -1\times0+(-j)\times1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & j \\ 0 & j & 1 \\ -1 & -2 & -j \end{vmatrix}$$

b.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} j \\ 1 \\ -j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\times j+3\times1+0\times(-j) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+j \end{vmatrix}$$

c

$$\begin{vmatrix} j \\ 1 \\ -j \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j & 3j & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -j & -3j & 0 \end{vmatrix}$$

d.

Fig. 44.7.

(ceea ce permite să se suprime parantezele la produsele de mai mulți factori, ordinea efectuării lor neprezentînd importanță) și distributiv față de adunare,

$$\|a\| \cdot (\|b\| + \|c\|) = \|a\| \cdot \|b\| + \|a\| \cdot \|c\|. \qquad (44.10)$$

Produsul unei matrice cu matricea zero e egal cu matricea zero, dar produsul a două matrice poate fi matricea zero (fig. 44.8), fără ca vreunul din factori să fie matricea zero (există divizori ai lui zero).

Determinantul matricei produs a două matrice pătratice e egal cu produsul determinanților respectivi, deoarece regula (44.7) coincide cu aceea a înmulțirii determinanților. Produsul unei matrice cu matricea unitate (și numai cu ea) e egal cu matricea dată (fig. 44.9), oricare ar fi ordinea factorilor.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

Fig. 44.8.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & j & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & j & 1 \end{vmatrix}$$

Fig. 44.9.

Transpusa produsului a două matrice e egală cu produsul în ordine inversă al transpuselor lor :

$$(\| a \| \cdot \| b \|)_t = \| b \|_t \cdot \| a \|_t. \qquad (44.11)$$

44.1.3. **Inversiunea matricelor.** Algebra matricelor nu coincide cu algebra numerelor, în principal din cauza necomutativității produsului și a existenței divizorilor lui zero. De aici rezultă că există mai multe matrice, care, înmulțind o matrice dată, conduc la același produs. Aceasta înseamnă că ecuația matriceală $\| x \| \cdot \| a \| = \| b \|$ nu are, în general, o soluție unică în $\| x \|$ (v. de ex. fig. 44.10). De aceea, pentru matrice nu se poate defini împărțirea, care la numere e definită ca operație inversă a înmulțirii. În cazul matricelor pătratice $\| a \|$, nedegenerate ($\det \| a \| \neq 0$), se poate înlocui împărțirea prin înmulțirea cu matricea inversă.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\| x \| \times \| a \| = \| b \|$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Fig. 44.10.

Se numește *matrice inversă* a unei matrice $\| a \|$ date, nedegenerate, o matrice patratică de același ordin $\| b \| = \| a \|^{-1}$, al cărei produs cu $\| a \|$ e matricea unitate :

$$\| a \|^{-1} \cdot \| a \| = \| 1 \|. \qquad (44{\cdot}12)$$

Acest produs e comutativ. În adevăr înmulțind ambii membri ai acestei egalități la stînga cu $\| a \|$, se obține :

$$\| a \| \cdot (\| a \|^{-1} \cdot \| a \|) = (\| a \| \cdot \| a^{-1} \|) \cdot \| a \| = \| a \| \cdot \| 1 \| = \| a \|,$$

adică

$$\| a \| \cdot \| a \|^{-1} = \| 1 \|. \qquad (44.12')$$

Determinantul inversei e egal cu valoarea inversă a determinantului matricei date :

$$\det \| a \|^{-1} = (\det \| a \|)^{-1}. \qquad (44.13)$$

Inversa inversei unei matrice e egală cu ea însăși :

$$(\| a \|^{-1})^{-1} = \| a \|. \qquad (44.14)$$

Elementele matricei inverse $\| b \| = \| a \|^{-1}$ se mai notează $b_{ik} = (a_{ik})^{-1}$. Se demonstrează că există o singură matrice inversă a unei matrice nedegenerate date.

Calculul matricei inverse. Se consideră sistemul de n ecuații liniare cu n necunoscute :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}\right\}, \qquad (44.15)$$

care se scrie strîns :

$$y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_k.$$

Se observă imediat că dacă se introduc matricele :

$$\| y \| = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix}; \qquad \| a \| = \begin{Vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{Vmatrix}; \qquad \| x \| = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \qquad (44.16)$$

relațiile (44.15) nu reprezintă altceva decît o înmulțire de matrice de forma (44.7), în care produsul și al doilea factor sînt matrice coloană (ale căror elemente au un al doilea indice egal cu unitatea, care nu se mai scrie):

$$\|y\| = \|a\| \cdot \|x\|. \tag{44.17}$$

Presupunînd determinantul sistemului diferit de zero, sistemul se poate rezolva cu regula lui Cramer, ceea ce permite, pînă la urmă, exprimarea necunoscutelor x_j ca funcții de termenii liberi y_k. Se obține sistemul:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n \end{array}\right\}, \tag{44.18}$$

care se scrie strîns:

$$x_k = \sum_{l=1}^{n} b_{kl}y_l \tag{44.18'}$$

și ai cărui coeficienți sînt (în baza regulii lui Cramer):

$$b_{kl} = \frac{A_{lk}(-1)^{l+k}}{\det \|a\|}, \tag{44.19}$$

unde A_{ij} e minorul elementului a_{ij} din det $\|a\|$, adică subdeterminantul obținut suprimînd linia i și coloana j. Se observă imediat că introducînd matricea:

$$\|b\| = \left\| \begin{array}{l} b_{11}b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21}b_{22} \ldots b_{2n} \\ b_{n1}b_{n2} \ldots b_{nn} \end{array} \right\|, \tag{44.20}$$

relațiile (44.18) reprezintă produsul de matrice:

$$\|x\| = \|b\| \cdot \|y\|. \quad (44.21$$

Înmulțind această relație la stînga cu $\|a\|$, se obține cu relația (44·17)

$$\|a\| \cdot \|x\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \|y\| = \|y\|,$$

de unde rezultă că:

$$\|a\| \cdot \|b\| = \|1\|,$$

adică — matricea inversă fiind unică —

$$\|b\| = \|a\|^{-1}. \tag{44.22}$$

Matricea inversă a unei matrice date e deci matricea coeficienților sistemului de ecuații liniare (44.18), care reprezintă soluția sistemului de ecuații liniare (44.18), care reprezintă soluția sistemului de ecuații liniare (44.15), ai cărui coeficienți formează matricea dată. Regula (44.19) reprezintă chiar regula de calcul a matricei inverse, se poate scrie:

$$b_{kl} = (a_{kl})^{-1} = \frac{1}{\det \|a\|} (A_{kl})_t (-1)^{l+k} \tag{44.23}$$

și comportă următoarele etape (v. fig. 44.11):

a) Se scrie matricea dată $\|a\|$ de elemente a_{kl}.
b) Se scrie matricea transpusă $\|a\|_t$ de elemente a_{lk}.
c) Se înlocuieşte fiecare element al transpusei cu minorul corespunzător $A_{lk} = (A_{kl})_t$.
d) Se înmulţeşte fiecare element al matricei $\|A\|_t$ astfel obţinute cu $(-1)^{k+l}$.
e) Se împarte matricea astfel obţinută cu $\det \|a\|$.
f) Se verifică calculul cu relaţiile (44.12) sau (44.12′).

$$\|a\| = \begin{vmatrix} 2 & j & -j \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ j & -2 & 0 \\ -j & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & -j \\ -2 & 2j & 2+j \\ 4 & -2j & -4-j \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & -j \\ 2 & 2j & -2-j \\ 4 & 2j & -4-j \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ j & -1 & -j+0{,}5 \\ 2j & -1 & -2j+0{,}5 \end{vmatrix} = \|a\|^{-1}$$

a. b. c. d. e.

$$\|a\| \cdot \|a\|^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & j & -j \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ j & -1 & -j+0{,}5 \\ 2j & -1 & -2j+0{,}5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \|1\|$$

$(\det \|a\| = -2j)$

f.

Fig. 44.11.

44.2. Matricele cuadripolilor şi forma matriceală a ecuaţiilor

Ecuaţiile caracteristice ale cuadripolilor diporţi, liniari şi pasivi (v. par. 43.3) se pot scrie sub formă matriceală, deoarece sînt sisteme de ecuaţii liniare de forma (44.15) cu $n = 2$. Parametrii cuadripolilor care sînt coeficienţii acestor ecuaţii vor forma matrice caracteristice cuadripolilor respectivi.

44.2.1. **Matricea fundamentală.** Ecuaţiile fundamentale (43.7) se scriu matriceal sub forma :

$$\begin{Vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Vmatrix}, \tag{44.24}$$

sau

$$\begin{Vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{Vmatrix} = \|A\| \cdot \begin{Vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{Vmatrix} \tag{44.24'}$$

în care

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{Vmatrix} \tag{44.25}$$

e *matricea fundamentală*, ale cărei elemente sînt legate la cuadripolii reciproci prin relaţia (43.9).

În adevăr, efectuînd produsul (44.24), se obţine egalitatea de matrice :

$$\begin{Vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2 \\ \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2 \end{Vmatrix},$$

care, conform cu relaţia (44.4), duce la ecuaţiile (43.7).

44.2.2. **Matricea impedanță.** Ecuațiile cu parametrii impedanță (43.11) se obțin din ecuațiile fundamentale, explicitînd tensiunile $\underline{U}_1$ și $\underline{U}_2$. Matriceal, aceste ecuații se scriu sub forma :

$$\begin{Vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Vmatrix} \quad (44.26)$$

sau

$$\begin{Vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Vmatrix} = \|Z\| \cdot \begin{Vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Vmatrix}, \quad (44.26')$$

în care

$$\|Z\| = \begin{Vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{Vmatrix} \quad (44.27)$$

e *matricea impedanță* a cuadripolului (la cuadripoli reciproci $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$), ale cărei elemente se exprimă în funcție de parametrii fundamentali prin relațiile (43.12). Înmulțind la stînga cu $\| \underline{Z} \|^{-1}$ ecuația (44.26′), se obține :

$$\|Z\|^{-1} \begin{Vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Vmatrix} = \|Z\|^{-1} \cdot \|Z\| \cdot \begin{Vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Vmatrix} \quad (44.28)$$

44.2.3. **Matricea admitanță.** Ecuațiile cu parametrii admitanță (43.16) se obțin din ecuațiile fundamentale, explicitînd curenții $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$. Matriceal, aceste ecuații se scriu sub forma :

$$\begin{Vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Vmatrix} \quad (44.29)$$

sau

$$\begin{Vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Vmatrix} = \|Y\| \cdot \begin{Vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Vmatrix}, \quad (44.29')$$

în care

$$\|Y\| = \begin{Vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{Vmatrix} \quad (44.30)$$

e *matricea admitanță* a cuadripolului (la cuadripoli reciproci, $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$), ale cărei elemente se exprimă în funcție de parametrii fundamentali, prin relațiile (43.17). Comparînd relația (44.29) cu relația (44.28), rezultă imediat că matricele impedanță și admitanță sînt inverse una alteia :

$$\|Y\| = \|Z\|^{-1} \quad \text{și} \quad \|Z\| = \|Y\|^{-1}. \quad (44.31)$$

În studiul conexiunilor cuadripolilor mai intervin și alte două matrice, pe care le vom numi *matrice mixte.*

44.2.4. **Matricea mixtă directă.** Ecuaţiile cuadripolului se pot prezenta şi explicitînd variabilele $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_2$ ca funcţiuni de $\underline{U}_2$ şi $\underline{I}_1$. Din (43.7) rezultă ecuaţiile :

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{A}\,\underline{D} - \underline{B}\,\underline{C}}{\underline{D}}\,\underline{U}_2 + \frac{\underline{B}}{\underline{D}}\,\underline{I}_1 = \underline{D}_{11}\underline{U}_2 + \underline{D}_{12}\underline{I}_1$$

$$\underline{I}_2 = -\frac{\underline{C}}{\underline{D}}\,\underline{U}_2 + \frac{1}{\underline{D}}\,\underline{I}_1 = \underline{D}_{21}\underline{U}_2 + \underline{D}_{22}\underline{I}_1, \qquad (44.32)$$

care se scriu matriceal sub forma :

$$\begin{Vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \underline{D}_{11} & \underline{D}_{12} \\ \underline{D}_{21} & \underline{D}_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 \end{Vmatrix} \qquad (44.33)$$

sau

$$\begin{Vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Vmatrix} = \|D\| \cdot \begin{Vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 \end{Vmatrix}, \qquad (44.33')$$

în care

$$\|D\| = \begin{Vmatrix} \underline{D}_{11} & \underline{D}_{21} \\ \underline{D}_{21} & \underline{D}_{22} \end{Vmatrix} \qquad (44.34)$$

e *matricea mixtă (directă)* a cuadripolului cu elementele :

$$\underline{D}_{11} - \frac{\underline{A}\,\underline{D} - \underline{B}\,\underline{C}}{\underline{D}}; \quad \underline{D}_{12} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}; \quad \underline{D}_{21} = -\frac{\underline{C}}{\underline{D}}; \quad \underline{D}_{12} = \frac{1}{\underline{D}} \qquad (44.35)$$

(la cuadripoli reciproci, $\underline{D}_{11} = \underline{D}_{22} = 1/\underline{D}$).

44.2.5. **Matricea mixtă inversă.** Înmulţind la stînga ecuaţia matriceală (44.33) cu inversa matricei $\| D \|$,

$$\| D \|^{-1} = \| F \| = \begin{Vmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{Vmatrix} \qquad (44.36)$$

se obţin ecuaţiile cuadripolului, sub forma în care $\underline{U}_2$ şi $\underline{I}_1$ sînt exprimate în funcţie de $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_2$:

$$\begin{Vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Vmatrix} \qquad (44.37)$$

sau :

$$\begin{Vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \| F \| \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Vmatrix}. \qquad (44.37')$$

Matricea $\| F \| = \| D \|^{-1}$ e *matricea mixtă inversă* şi are elementele :

$$\underline{F}_{11} = \frac{1}{\underline{A}}; \quad \underline{F}_{12} = -\frac{\underline{B}}{\underline{A}}; \quad \underline{F}_{21} = \frac{\underline{C}}{\underline{A}}; \quad \underline{F}_{22} = \frac{\underline{A}\,\underline{D} - \underline{B}\,\underline{C}}{\underline{A}} \qquad (44.38)$$

(la cuadripoli reciproci, $\underline{F}_{11} = \underline{F}_{22} = 1/\underline{A}$).

44.3. Conexiunile cuadripolilor diporți

Cuadripolii de structură mai complicată pot fi considerați ca rezultînd din conexiunea unor cuadripoli de structură mai simplă. Tipurile fundamentale de conexiune sînt conexiunea în lanț (în cascadă — fig. 44.12), conexiunea în serie (fig. 44.13), conexiunea în paralel (fig. 44.14), conexiunea serie-paralel (fig. 44.15) și conexiunea paralel-serie (fig. 44.16). În cele ce urmează vom arăta cum se determină matricele cuadripolilor obținuți prin conexiunile indicate, din matricele cuadripolilor componenți. Vom considera mereu cazul a doi cuadripoli, dar rezultatele sînt valabile pentru un număr oarecare de cuadripoli diporți, conectați în modul arătat.

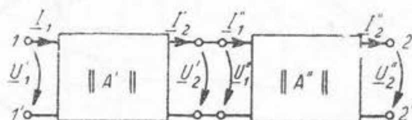


Fig. 44.12.

Vom presupune că prin conexiunea a doi cuadripoli diporți nu se afectează caracterul diport al fiecăruia. În practică, această presupunere trebuie verificată în funcție de structura cuadripolilor considerați și, dacă nu e corectă, trebuie introdus la intrarea sau la ieșirea unuia dintre cei doi cuadripoli un transformator ideal, cu raportul de transformare egal cu unitatea, care asigură separarea conductivă a perechilor de borne în cauză. Mărimile referitoare la cei doi cuadripoli vor fi notate cu simplu accent (′) respectiv cu dublu accent (″).

44.3.1. **Conexiunea în lanț.** În cazul acestei conexiuni (fig. 44.12), între mărimile celor doi cuadripoli și ale cuadripolului rezultant se impun relațiile :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1'; \ \underline{I}_1 = \underline{I}_1'; \ \underline{U}_2' = \underline{U}_1''; \ \underline{I}_2' = \underline{I}_1''; \ \underline{U}_2 = \underline{U}_2''; \ \underline{I}_2 = \underline{I}_2''. \quad (44.39)$$

Ecuațiile fundamentale ale cuadripolilor componenți și ale celui rezultant sînt :

$$\left\|\begin{matrix}\underline{U}_1'\\ \underline{I}_1'\end{matrix}\right\| = \|A'\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{U}_2'\\ \underline{I}_2'\end{matrix}\right\|; \quad \left\|\begin{matrix}\underline{U}_1''\\ \underline{I}_1''\end{matrix}\right\| = \|A''\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{U}_2''\\ \underline{I}_2''\end{matrix}\right\|; \quad \left\|\begin{matrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_1\end{matrix}\right\| = \|A\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{U}_2\\ \underline{I}_2\end{matrix}\right\|. \quad (44.40)$$

Cu relațiile (44.39) se obține :

$$\left\|\begin{matrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\underline{U}_1'\\ \underline{I}_1'\end{matrix}\right\| = \|A'\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{U}_2'\\ \underline{I}_2'\end{matrix}\right\| = \|A'\| \cdot \|A''\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{U}_2''\\ \underline{I}_2''\end{matrix}\right\| = \|A''\| \cdot \|A''\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{U}_2\\ \underline{I}_2\end{matrix}\right\|$$

și, comparînd cu relația (44.40), rezultă regula de compunere a matricelor :

$$\boxed{\|A\| = \|A'\| \cdot \|A''\|}. \quad (44.41)$$

Matricea fundamentală a cuadripolului rezultant e produsul matricelor fundamentale ale cuadripolilor componenți, conectați în lanț.

44.3.2. **Conexiunea în serie.** În cazul acestei conexiuni (fig. 44.3) se impun relațiile :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1' + \underline{U}_1'' \; ; \; \underline{I}_1 = \underline{I}_1' = \underline{I}_1''; \; \underline{I}_2 = \underline{I}_2' = \underline{I}_2'' \; ; \; \underline{U}_2 = \underline{U}_2' + \underline{U}_2''. \quad (44.42)$$

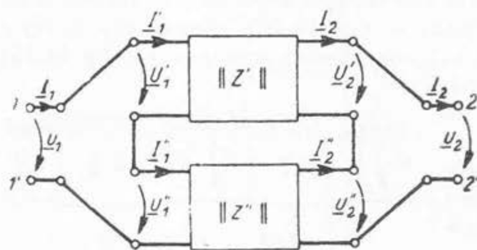


Fig. 44.13.

Ecuațiile cu parametrii impedanță ale cuadripolilor componenți și a celui rezultant sînt :

$$\left\|\begin{matrix}\underline{U}_1'\\ \underline{U}_2'\end{matrix}\right\| = \|\underline{Z}'\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{I}_1'\\ \underline{I}_2'\end{matrix}\right\|;$$

$$\left\|\begin{matrix}\underline{U}_1''\\ \underline{U}_2''\end{matrix}\right\| = \|\underline{Z}''\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{I}_1''\\ \underline{I}_2''\end{matrix}\right\|;$$

$$\left\|\begin{matrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{matrix}\right\| = \|\underline{Z}\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{matrix}\right\|. \quad (44.43)$$

Cu relațiile (44.42) se obține :

$$\left\|\begin{matrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\underline{U}_1'\\ \underline{U}_2'\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}\underline{U}_1''\\ \underline{U}_2''\end{matrix}\right\| = \|Z'\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{I}_1'\\ \underline{I}_2'\end{matrix}\right\| + \|Z''\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{I}_1''\\ \underline{I}_2''\end{matrix}\right\| = [\|Z'\| + \|Z''\|] \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}\end{matrix}\right\|$$

și, comparînd cu relația (44.43), rezultă regula de compunere a matricelor :

$$\|Z\| = \|Z'\| + \|Z''\|. \quad (44.44)$$

Matricea impedanță a cuadripolului rezultant e suma matricelor impedanță ale cuadripolilor componenți, conectați în serie. Se reține analogia cu regula de calcul a impedanței echivalente a doi dipoli conectați în serie.

44.3.3. **Conexiunea în paralel.** În cazul acestei conexiuni (fig. 44.14) se impun relațiile :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1' = \underline{U}_2' \; ; \; \underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_1''; \; \underline{I}_2 = \underline{I}_2' + \underline{I}_2''; \; \underline{U}_2 = \underline{U}_2' = \underline{U}_2''. \quad (44.45)$$

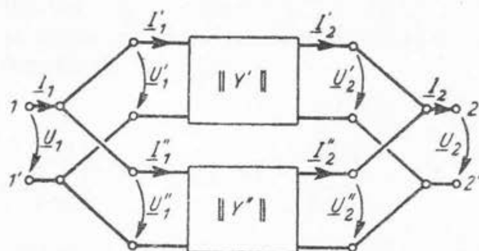


Fig. 44.14.

Ecuațiile cu parametrii admitanță ale cuadripolilor componenți și a celui rezultant sînt :

$$\left\|\begin{matrix}\underline{I}_1'\\ \underline{I}_2'\end{matrix}\right\| = \|\mathbf{Y}\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{U}_1'\\ \underline{U}_2'\end{matrix}\right\|$$

$$\left\|\begin{matrix}\underline{I}_1''\\ \underline{I}_2''\end{matrix}\right\| = \|\mathbf{Y}''\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{U}_1''\\ \underline{U}_2''\end{matrix}\right\|$$

$$\left\|\begin{matrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{matrix}\right\| = \|\mathbf{Y}\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{matrix}\right\|. \quad (44.46)$$

Cu relațiile (44.45) se obține :

$$\left\|\begin{matrix}\underline{I}_1'\\ \underline{I}_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\underline{I}_1'\\ \underline{I}_2'\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}\underline{I}_1''\\ \underline{I}_2''\end{matrix}\right\| = \|\mathbf{Y}'\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{U}_1'\\ \underline{U}_2'\end{matrix}\right\| + \|\mathbf{Y}''\| \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{U}_1''\\ \underline{U}_2''\end{matrix}\right\| = [\|\mathbf{Y}'\| + \|\mathbf{Y}''\|] \cdot \left\|\begin{matrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{matrix}\right\|$$

şi, comparînd cu (44.46), rezultă regula de compunere a matricelor

$$\|Y\| = \|Y'\| + \|Y''\|. \quad (44.47)$$

Matricea admitanţă a cuadripolului rezultant e suma matricelor admitanţă ale cuadripolilor componenţi conectaţi în paralel. Se reţine analogia cu regula de calcul a admitanţei echivalente a doi dipoli conectaţi în paralel.

44.3.4. **Conexiunea serie-paralel.** În cazul acestei conexiuni (fig. 44.15) se impun relaţiile:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1' + \underline{U}_1''; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_1' = \underline{I}_1''; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2' + \underline{I}_2''; \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_2' = \underline{U}_2''. \quad (44.48)$$

Cu relaţia (44.33′) raţionînd ca în cazurile precedente, se obţine regula

$$\|D\| = \|D'\| + \|D''\|. \quad (44.49)$$

Matricea mixtă (directă) a cuadripolului rezultant e suma matricelor mixte (directe) ale cuadripolilor componenţi, conectaţi în serie-paralel.

$\|D\| = \|D'\| + \|D''\|$

Fig. 44.15.

44.3.5. **Conexiunea paralel-serie.** În cazul acestei conexiuni (fig. 44.16) se impun relaţiile:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1' = \underline{U}_1''; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_1''; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2' = \underline{I}_2''; \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_2' + \underline{U}_2''. \quad (44.50)$$

Cu relaţia (44.37′) raţionînd ca în cazurile precedente, se obţine regula

$$\boxed{\|F\| = \|F'\| + \|F''\|}. \quad (44.51)$$

$\|F\| = \|F'\| + \|F''\|$

Fig. 44.16.

Matricea mixtă inversă a cuadripolului rezultant e suma matricelor mixte inverse ale cuadripolilor componenţi, conectaţi paralel-serie.

44.4. Aplicaţii

44.4.1. **Matricele unor cuadripoli simpli.** Determinăm matricele unor cuadripoli simpli, din care, prin compunere cu regulile stabilite mai sus, se pot determina matricele altor cuadripoli compuşi.

a. Cuadripolul degenerat cu impedanţă serie din fig. 43.8, *a*, cu ecuaţiile fundamentale (43.36, *a*), are matricea fundamentală şi matricea admitanţă.

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{şi} \quad \|Y\| = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\underline{Z}} & -\dfrac{1}{\underline{Z}} \\ \dfrac{1}{\underline{Z}} & -\dfrac{1}{\underline{Z}} \end{Vmatrix} \quad (44.52)$$

şi are matricea impedanţă improprie.

b. Cuadripolul degenerat cu admitanță paralel din figura 43.8, *b*, cu ecuațiile fundamentale (43.36, *b*), are matricea fundamentală și matricea impedanță

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{și} \quad \|Z\| = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\underline{Y}} & -\frac{1}{\underline{Y}} \\ \frac{1}{\underline{Y}} & -\frac{1}{\underline{Y}} \end{Vmatrix} \qquad (44.53)$$

și are matricea admitanță improprie.

44.4.2. **Cuadripolul în T.** Matricele cuadripolului în T pot fi determinate, observînd că un astfel de cuadripol (fig. 43.7, *a*) poate fi obținut conectînd în lanț un cuadripol degenerat cu impedanța serie $\underline{Z}_1$, cu un cuadripol degenerat cu admitanța paralel $\underline{Y}$ și cu un cuadripol degenerat cu impedanța serie $\underline{Z}_2$. Conform cu regula de compunere (44.41), rezultă matricea fundamentală a cuadripolului în T din matricele cuadripolilor componenți (44.52) și (44.53):

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} 1 & \underline{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \underline{Z}_2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1+\underline{Y}\,\underline{Z}_1 & \underline{Z}_1 \\ \underline{Y} & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \underline{Z}_2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} 1+\underline{Y}\,\underline{Z}_1 & \underline{Z}_2+\underline{Y}\,\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_1 \\ \underline{Y} & \underline{Y}\,\underline{Z}_2+1 \end{Vmatrix}, \qquad (44.54)$$

adică

$$\underline{A}_{11} = \underline{A} = 1+\underline{Y}\,\underline{Z}_1;\ \underline{A}_{12} = \underline{B} = \underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Y}\,\underline{Z}_1\underline{Z}_2;\ \underline{A}_{21} = \underline{C} = \underline{Y};\ \underline{A}_{22} = \underline{D} = 1+\underline{Y}\,\underline{Z}_2.$$

Am obținut parametrii fundamentali (43.30), determinați direct pe cale analitică.

44.4.3. **Cuadripolul în π.** Un astfel de cuadripol (fig. 43.7, *b*) poate fi obținut conectînd în lanț un cuadripol degenerat cu admitanța paralel $\underline{Y}_1$, cu un cuadripol degenerat cu impedanța serie $\underline{Z}$ și cu un cuadripol degenerat cu admitanța paralel $\underline{Y}_2$. Conform cu relația (44.41) rezultă matricea fundamentală a cuadripolului în π din matricele cuadripolilor componenți (44.53) și (44.52):

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y}_1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y}_2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \underline{Z} \\ \underline{Y}_1 & 1+\underline{Y}_1\underline{Z} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y}_2 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} 1+\underline{Y}_2\underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Z}\,\underline{Y}_1\underline{Y}_2 & 1+\underline{Y}_1\underline{Z} \end{Vmatrix}, \qquad (44{\cdot}55)$$

adică

$$\underline{A}_{11} = \underline{A} = 1+\underline{Y}_2\underline{Z};\ \underline{A}_{12} = \underline{B} = \underline{Z};\ \underline{A}_{21} = \underline{C} = \underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Z}\,\underline{Y}_1\underline{Y}_2;\ \underline{A}_{22} = \underline{D} = 1+\underline{Y}_1\underline{Z}.$$

Am obținut parametrii fundamentali (43.32), determinați direct pe cale analitică.

44.4.4. **Cuadripolul în T șuntat** (fig. 44.17, *a*). Acest cuadripol pe care nu l-am studiat pînă acum e foarte utilizat ca atenuator (pentru a reduce într-un raport determinat tensiunea aplicată la intrare).

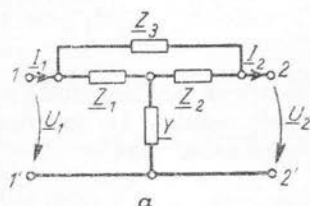
Din figura (44.17, *b* rezultă că el poate fi considerat ca rezultînd din compunerea în paralel a unui cuadripol în T cu unul degenerat, cu impedanța serie $\underline{Z}_3$. Conform cu relația (44.47), matricea admitanță $\|Y\|$ a cuadripolului în T șuntat va rezulta adunînd matricea $\|Y'\|$ a cuadripolului în T cu matricea $\|Y''\|$ a cuadripolului degenerat (44.52). Prima se obține observînd că elementele matricei impedanță $\|Z'\| = \|Y'\|^{-1}$ au fost determinate anterior (rel. 43.29), adică:

$$\|Z'\| = \begin{Vmatrix} \underline{Z}_1+\underline{Z} & -\underline{Z} \\ \underline{Z} & -(\underline{Z}_2+\underline{Z}) \end{Vmatrix}. \qquad (44.56)$$

Cu regula de inversiune a matricelor calculăm succesiv (v. par. 44.1.3.) det $\|\underline{Z}'\| = -\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ și matricele:

$$\begin{Vmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z} & \underline{Z} \\ -\underline{Z} & -(\underline{Z}_2 + \underline{Z}) \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} -(\underline{Z}_2 + \underline{Z}) & -\underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z}_1 + \underline{Z} \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} -(\underline{Z}_2 + \underline{Z}) & \underline{Z} \\ -\underline{Z} & (\underline{Z}_1 + \underline{Z}) \end{Vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \begin{Vmatrix} \underline{Z}_2 + \underline{Z} & -\underline{Z} \\ \underline{Z} & -(\underline{Z}_1 + \underline{Z}) \end{Vmatrix}.$$



Se obține astfel matricea admitanță a cuadripolului în T (cu $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$)

$$\|\underline{Y}'\| = \|\underline{Z}'\|^{-1} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \dfrac{1 + \underline{Y}\,\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 + \underline{Y}\,\underline{Z}_1\underline{Z}_2} & -\dfrac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Y}\,\underline{Z}_1\underline{Z}_2} \\ \dfrac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Y}\,\underline{Z}_1\underline{Z}_2} & -\dfrac{1 + \underline{Y}\,\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Y}\,\underline{Z}_1\underline{Z}_2} \end{Vmatrix} \quad (44.57)$$

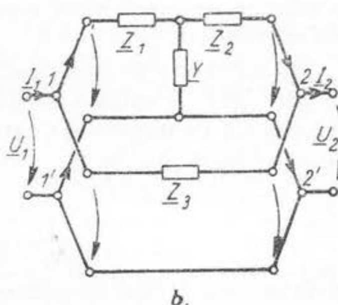


Fig. 44.17

Matricea cuadripolului degenerat cu impedanța serie $\underline{Z}_3$ rezultă din relația (44.52):

$$\|\underline{Y}''\| = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\underline{Z}_3} & -\dfrac{1}{\underline{Z}_3} \\ \dfrac{1}{\underline{Z}_3} & -\dfrac{1}{\underline{Z}_3} \end{Vmatrix}. \quad (44.58)$$

Cu relațiile (44.47), (44.57) și (44.58), matricea cuadripolului în T șuntat rezultă:

$$\|\underline{Y}\| = \|\underline{Y}'\| + \|\underline{Y}''\| = \begin{Vmatrix} \dfrac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Y}\,\underline{Z}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Y}\,\underline{Z}_1\underline{Z}_2)} & -\dfrac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Y}\,\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Y}\,\underline{Z}\,\underline{Z}_2)} \\ \dfrac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Y}\,\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Y}\,\underline{Z}_1\underline{Z}_2)} & -\dfrac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Y}\,\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Y}\,\underline{Z}_1\underline{Z}_2)} \end{Vmatrix} \cdot (44.59)$$

45. LANȚURI DE CUADRIPOLI ȘI FILTRE ELECTRICE

45.1. Lanț de cuadripoli

Transmisiunea energiei electromagnetice și, în special, transmisiunea semnalelor de telecomunicații se face prin instalații și circuite asimilabile unei succesiuni de cuadripoli conectați în cascadă sau în lanț. Întregul canal de trans-

misiune constituie deci un lanţ de cuadripoli şi poate fi echivalat cu un singur cuadripol — cuadripolul echivalent — ai cărui parametri se pot calcula ca la paragraful 44.3.1. Lanţul de cuadripoli se numeşte *omogen*, dacă toţi cei n cuadripoli componenţi sînt identici. Dacă

$$\|A_k\| = \begin{Vmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{Vmatrix} = \|\underline{A}\| \quad (k = 1,2,..., n) \tag{45.1}$$

e matricea fundamentală a fiecăruia dintre cuadripolii componenţi, din relaţia (44.41) rezultă că matricea întregului lanţ, egală cu produsul matricelor componente, este

$$\|A_1\| \cdot \|A_2\| \cdots \|A_n\| = \|A\|^n. \tag{45.2}$$

În cele ce urmează vom considera numai *lanţuri omogene de cuadripoli simetrici şi reciproci.*

45.1.1. **Lanţ de cuadripoli simetrici adaptat.** Proprietăţile de transmisiune ale unui lanţ de cuadripoli sînt optime, dacă impedanţa de sarcină a întregului lanţ e egală cu impedanţa caracteristică $\underline{Z}_c$ a cuadripolilor simetrici componenţi (v. par. 43.5):

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}. \tag{45.3}$$

În acest caz, lanţul se numeşte *adaptat*[1]. Considerăm un astfel de lanţ cu n cuadripoli (fig. 45.1), la care folosim notaţiile indicate în figură.

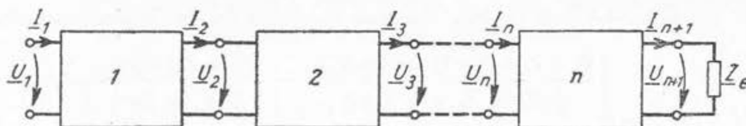


Fig. 45.1

Conform definiţiei impedanţei caracteristice, dacă impedanţa de sarcină a ultimului cuadripol e $\underline{Z}_c$ şi impedanţa lui de intrare e tot $\underline{Z}_c$. Impedanţa de intrare a ultimului cuadripol e însă impedanţa de sarcină a penultimului, şi de aceea şi impedanţa de intrare a acestuia va fi tot $\underline{Z}_c$. Din aproape în aproape, constatăm astfel că pentru un lanţ adaptat impedanţele de sarcină şi impedanţele de intrare ale tuturor cuadripolilor componenţi sînt egale cu $\underline{Z}_c$, adică

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = ... = \frac{\underline{U}_n}{\underline{I}_n} = \frac{\underline{U}_{n+1}}{\underline{I}_{n+1}} = \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}.^{2} \tag{45.4}$$

[1] Condiţia de adaptare considerată aici nu coincide în general cu condiţia de adaptare, din punctul de vedere al transferului maxim de putere (v. par. 37.4).

[2] În faţa radicalului se alege semnul care asigură parte reală pozitivă pentru $\underline{Z}_c$ care trebuie să fie realizabilă în concret, pentru a putea fi o impedanţă de sarcină.

Ecuaţiile cuadripolului simetric (scrise pentru cuadripolul de ordin k) fiind:

$$\begin{aligned} \underline{U}_k &= \underline{A}\,\underline{U}_{k+1} + \underline{B}\,\underline{I}_{k+1} \\ \underline{I}_k &= \underline{C}\,\underline{U}_{k+1} + \underline{A}\,\underline{I}_{k+1}, \end{aligned} \tag{45.5}$$

rezultă cu relaţia (45.4), înlocuind pe $\underline{I}_{k+1} = \underline{U}_{k+1}/\underline{Z}_c$ în prima ecuaţie pe $\underline{U}_{k+1} = \underline{Z}_c \underline{I}_{k+1}$ în a doua, egalităţile:

$$\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}_{k+1}} = \frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{k+1}} = \underline{A} + \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_c} = \underline{A} + \sqrt{\underline{B}\,\underline{C}}\,. \tag{45.6}$$

Deoarece la cuadripolii reciproci simetrici $\underline{A}^2 - \underline{B}\underline{C} = 1$, se mai poate scrie:

$$\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}_{k+1}} = \frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{k+1}} = \underline{A} + \sqrt{\underline{B}\,\underline{C}} = \frac{1}{\underline{A} - \sqrt{\underline{B}\,\underline{C}}}\,. \quad (\mathrm{k} = 1,2, \ldots, \mathrm{n}) \tag{45.7}$$

La un lanţ de cuadripoli adaptat, raportul a două tensiuni succesive sau a doi curenţi succesivi se păstrează constant de la element la element.

Se numeşte *exponent de transfer caracteristic* logaritmul natural al valorii raportului (45.6), adică mărimea complexă.

$$\underline{g} = a + \mathrm{j}b = \ln(\underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}}) = -\ln(\underline{A} - \sqrt{\underline{B}\underline{C}}). \tag{45.8}$$

Se observă că:

$$\mathrm{e}^{\underline{g}} = \underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}}; \quad \mathrm{e}^{-\underline{g}} = \underline{A} - \sqrt{\underline{B}\underline{C}}, \tag{45.9}$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\,\underline{g} &= \mathrm{ch}(a + \mathrm{j}b) = \mathrm{ch}\,a \cos b + \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\,a \sin b = \underline{A} \\ \mathrm{sh}\,\underline{g} &= \mathrm{sh}(a + \mathrm{j}b) = \mathrm{sh}\,a \cos b + \mathrm{j}\,\mathrm{ch}\,a \sin b = \sqrt{\underline{B}\underline{C}}. \end{aligned} \tag{45.10}$$

Cu aceste notaţii, raportul a două tensiuni succesive sau a doi curenţi succesivi se scrie:

$$\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}_{k+1}} = \frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{k+1}} e^{\underline{g}} = e^{a}\, e^{\mathrm{j}g} \tag{45.11}$$

sau

$$\begin{aligned} \underline{U}_{k+1} &= \underline{U}_k \mathrm{e}^{-\underline{g}} = \mathrm{e}^{-a} \underline{U}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}g} \\ \underline{I}_{k+1} &= \underline{I}_k \mathrm{e}^{-\underline{g}} = \mathrm{e}^{-a}\, \underline{I}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}g}. \end{aligned} \tag{45.12}$$

Vom arăta mai departe că $a \geqslant 0$, din care cauză, în lungul lanţului de cuadripoli adaptat, valorile efective ale tensiunilor şi curenţilor scad monoton exponenţial, fiecare cuadripol din lanţ introducînd un factor de atenuare subunitar, egal cu e^{-a} şi o întîrziere de fază suplimentară, egală cu b[1]. De aceea, mărimea:

$$a = \mathrm{Re}\,\{\underline{g}\} = \ln\left|\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}_{k+1}}\right| = \ln\left|\frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{k+1}}\right| \geqslant 0 \tag{45.13}$$

[1] dacă $b < 0$, are loc un avans de fază.

se numește *atenuarea caracteristică* a cuadripolului simetric adaptat, iar mărimea, redusă la intervalul $(-\pi, +\pi)$,

$$b = \text{Im}\{\underline{g}\} = \arg\left\{\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}_{k+1}}\right\} = \arg\left\{\frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{k+1}}\right\} \gtrless 0 \qquad (45.14)$$

se numește *defazajul caracteristic* al cuadripolului simetric adaptat. Din relația (45.12) se deduc pentru puteri relațiile :

$$\underline{S}_{k+1} = \underline{U}_{k+1}\underline{I}^*_{k+1} = \underline{U}_k\underline{I}^*_k e^{-\underline{g}-\underline{g}^*} = \underline{S}_k e^{-2a} \qquad (45.15)$$

$$P_{k+1} = \text{Re}\{\underline{S}_{k+1}\} = P_k e^{-2a} \qquad (45.16)$$

$$Q_{k+1} = \text{Im}\{\underline{S}_{k+1}\} = Q_k e^{-2a}, \qquad (45.17)$$

astfel că

$$a = \frac{1}{2}\ln\frac{\underline{S}_k}{\underline{P}_{k+1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{P_k}{P_{k+1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{Q_k}{Q_{k+1}}. \qquad (45.18)$$

Deoarece cuadripolii sînt pasivi și energia se transmite către receptor, puterea activă P_{k+1} la bornele de ieșire ale cuadripolului de ordinul k e mai mică decît puterea activă la bornele de intrare P_k, diferența acoperind pierderile de putere din cuadripol. În cazul idealizat al unor cuadripoli nedisipativi (cu elemente de circuit pur reactive), aceste două puteri pot fi egale și eventual nule, dacă impedanța caracteristică e imaginară și sarcina nu consumă putere activă. Rezultă că *pentru cuadripolii cu pierderi* (disipativi),

$$P_{k+1} < P_k, \quad \text{adică} \quad a > 0, \qquad (45.19)$$

iar pentru *cuadripolii fără pierderi* (nedisipativi), cu impedanță caracteristică reală

$$P_{k+1} = P_k \neq 0, \quad \text{adică} \quad a = 0. \qquad (45.20)$$

Înmulțind rapoarte succesive de forma relației (45.11) cu $k = 1, 2, ..., n$, rezultă că :

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{n+1}} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_{n+1}} = e^{n\underline{g}} = e^{na}\, e^{jnb}, \qquad (45.21)$$

adică pentru întregul lanț adaptat se obține *exponentul de transfer total*,

$$\underline{g}_t = n\underline{g} = \ln\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{n+1}} = \ln\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_{n+1}} = n\cdot\ln(\underline{A} + \sqrt{\underline{BC}}) \qquad (45.22)$$

și atenuarea totală, respectiv defazajul total,

$$a_t = na, \quad \text{respectiv} \quad b_t = nb. \qquad (45.23)$$

45.1.2. **Lanț de cuadripoli simetrici neadaptat.** În acest caz, lanțul de cuadripoli e conectat pe o sarcină oarecare :

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_{n+1} = \frac{\underline{U}_{n+1}}{\underline{I}_{n+1}} \neq \underline{Z}_c. \qquad (45.24)$$

Vom exprima ecuaţiile fundamentale (43.7) ale unuia dintre cuadripolii ($\underline{A} = \underline{D}$) ai lanţului cu ajutorul parametrilor $\underline{g}$(v. rel. 45.8) şi $\underline{Z}_c$ (rel. 45.3) ţinînd seama de relaţia 45.10):

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_k &= \underline{A}\underline{U}_{k+1} + \underline{B}\underline{I}_{k+1} = \underline{U}_{k+1}\,\mathrm{ch}\,\underline{g} + \underline{Z}_c\underline{I}_{k+1}\,\mathrm{sh}\,\underline{g} \\ \underline{I}_k &= \underline{C}\underline{U}_{k+1} + \underline{A}\underline{I}_{k+1} = \frac{\underline{U}_{k+1}}{\underline{Z}_c}\,\mathrm{sh}\,\underline{g} + \underline{I}_{k+1}\,\mathrm{ch}\,\underline{g} \end{aligned}\right\}. \tag{45.25}$$

Dacă înlocuim aici U_{k+1} şi I_{k+1} în funcţie de U_{k+2} şi I_{k+2} prin relaţiile analoge ale cuadripolului următor, rezultă:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_k &= \underline{U}_{k+2}\,\mathrm{ch}\,2\underline{g} + \underline{Z}_c\,\underline{I}_{k+2}\,\mathrm{sh}\,2\underline{g} \\ \underline{I}_k &= \frac{1}{\underline{Z}_c}\,\underline{U}_{k+2}\,\mathrm{sh}\,2\underline{g} + \underline{I}_{k+2}\,\mathrm{ch}\,2\underline{g} \end{aligned}\right\}$$

şi, prin recurenţă, pentru întregul lanţ de n cuadripoli:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_{n+1}\,\mathrm{ch}\,n\underline{g} + \underline{Z}_c\underline{I}_{n+1}\,\mathrm{sh}\,n\underline{g} \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_c}\,\underline{U}_{n+1}\,\mathrm{sh}\,n\underline{g} + \underline{I}_{n+1}\,\mathrm{ch}\,n\underline{g}. \end{aligned}\right\}. \tag{45·26}$$

Trecerea de la un cuadripol la n cuadripoli identici se face prin simpla înmulţire a exponentului de transfer cu numărul n al cuadripolilor.

Dacă cuadripolii au pierderi ($a = \mathrm{Re}\{\underline{g}\} > 0$) şi dacă numărul lor e foarte mare ($n \to \infty$), atunci:

$$\mathrm{ch}\,na \to \frac{1}{2}\,e^{na}; \qquad \mathrm{sh}\,na \to \frac{1}{2}e^{na}$$

$$\mathrm{ch}\,n\underline{g} = \mathrm{ch}\,na\cos nb + \mathrm{j}\,\mathrm{sh}\,na\sin b \to \frac{1}{2}\,e^{n\underline{g}}$$

$$\mathrm{sh}\,n\underline{g} = \mathrm{sh}\,na\cos nb + \mathrm{j}\,\mathrm{ch}\,na\sin b \to \frac{1}{2}\,e^{n\underline{g}},$$

astfel că

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_c, \text{ deşi } \frac{\underline{U}_{n+1}}{\underline{I}_{n+1}} = \underline{Z}_s \neq \underline{Z}_c. \tag{45.27}$$

Datorită existenţei atenuării, efectul neadaptării de la capătul lanţului se resimte din ce în ce mai puţin şi cuadripolii suficient de depărtaţi de capăt (raţionamentul se poate face nu numai pentru $k = 1$, ci pentru orice $k \ll n$) funcţionează adaptat.

Observaţie: Unitatea de atenuare se numeşte neper (Np), dacă se utilizează relaţiile de definiţie (45,13) sau (45.18)[1]. Se mai utilizează unităţile bel (B) şi, în special, decibel ($1\ \mathrm{dB} = \frac{1}{10}\ \mathrm{B}$), corespunzătoare relaţiilor de calcul:

$$a = 2\log\left|\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}_{k+1}}\right| = 2\log\left|\frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{k+1}}\right| = \log\frac{P_k}{P_{k+1}}\ [\mathrm{B}]$$

$$a = 20\log\left|\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}_{k+1}}\right| = 20\log\left|\frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{k+1}}\right| = 10\log\frac{P_k}{P_{k+1}}\ [\mathrm{dB}], \tag{45.28}$$

[1] Atenuarea de 1 Np corespunde la $\frac{U_k}{U_{k+1}} = e = 2{,}718$.

în care log este logaritmul în baza 10 (zecimal). Între aceste unități — utilizabile pentru orice apreciere logaritmică a unor rapoarte — există relațiile:

$$1 \text{ Np} = 2.\ \log e \text{ B} = 0{,}8686 \text{ B}$$
$$1 \text{ Np} = 20.\ \log e \text{ dB} = 8{,}686 \text{ dB}. \qquad (45.29)$$

45.2. Raportul de transmisiune și caracteristicile de frecvență

Am studiat mai sus cazul particular al sistemelor de transmisiune, care consistă din lanțuri omogene de cuadripoli simetrici, reciproci. În cazuri mai generale, un sistem de transmisiune diport, liniar și pasiv (v. fig. 45.2, *a*) e caracterizabil printr-o mărime de intrare $u_i(t)$, aplicată din exterior și o mărime de ieșire (sau de răspuns) $u_e(t)$, univoc determinată de mărimea de intrare (în condiții de funcționare precizate ale sistemului). În regim permanent sinusoidal, raportul complex al reprezentărilor în complex ale celor două mărimi

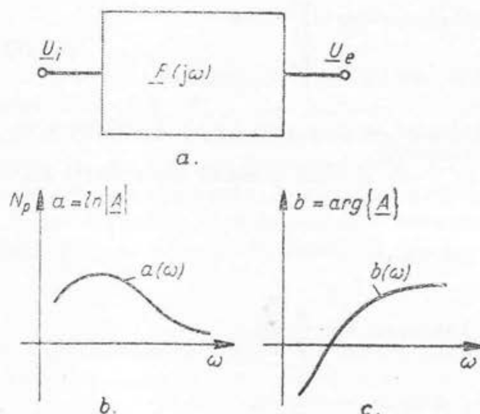


Fig. 45.2

$$\frac{\underline{U}_i}{\underline{U}_e} = \underline{A}(j\omega) = A(\omega)e^{jb(\omega)} \qquad (45.30)$$

se numește *raportul de transmisiune*[1] al sistemului și constituie o caracteristică a lui, în condițiile de funcționare precizate. Dacă se cunoaște raportul de transmisiune și dependența lui de frecvență (adică de pulsația $\omega = 2\pi f$), se cunoaște mărimea de ieșire pentru orice mărime de intrare dată. Prin înmulțirea cu un factor constant, convenabil ales, mărimile U_e și U_i pot avea aceleași dimensiuni și raportul de transmisiune poate fi făcut adimensional. Modulul $\underline{A}(\omega)$ al acestui raport,

$$\underline{A}(\omega) = |\,\underline{A}(j\,\omega)\,| = \left|\frac{\underline{U}_i}{\underline{U}_e}\right| \qquad (45.31)$$

se numește *raport de atenuare*, iar logaritmul natural al acestui raport

$$\underline{a}(\omega) = \ln \underline{A}(\omega) = \ln\left|\frac{\underline{U}_i}{\underline{U}_e}\right| \quad [\text{Np}] \qquad (45.32)$$

se numește, scurt, *atenuare*.

[1] Valoarea reciprocă a raportului de transmisiune, considerată ca funcție de o variabilă complexă $p = \sigma + j\omega$, se numește *funcție de transfer*.

Argumentul $b(\omega)$ al raportului de transmisiune se numeşte *defazajul* sistemului

$$b(\omega) = \arg\{\underline{A}(j\omega)\} = \arg\{\underline{U}_i\} - \arg\{\underline{U}_2\} \quad [\text{rad}] \qquad (45.33)$$

şi e egal cu diferenţa de fază între U_i şi U_e, redusă la intervalul $(-\pi, +\pi)$. Între atenuare (exprimată în Np), defazaj (exprimat în radiani) şi raportul de transmisiune există relaţiile:

$$\underline{A} = \frac{\underline{U}_i}{\underline{U}_e} = e^{a+jb}; \quad a + jb = \ln\frac{\underline{U}_i}{\underline{U}_e} = \ln \underline{A}. \qquad (45.34)$$

Funcţiunile de frecvenţă $a(\omega)$ — uneori $A(\omega)$ — şi $b(\omega)$ se numesc *caracteristicile de frecvenţă* ale sistemului, şi anume *caracteristica de frecvenţă a atenuării*[1] $a(\omega)$, uneori $A(\omega)$, şi *caracteristica de frecvenţă a defazajului*[2] $b(\omega)$. Dacă se cunosc aceste caracteristici, funcţionarea sistemului în regim permanent sinusoidal e complet cunoscută. De aceea, aceste caracteristici se determină teoretic sau experimental, reprezentîndu-se grafic (v. fig. 45.2, *b* şi *c*). Se observă imediat că definiţiile de mai sus generalizează pe cele date în paragraful anterior, în care atenuarea caracteristică şi defazajul caracteristic erau cazuri particulare ale mărimilor (45.32) şi (45.33), cînd $\underline{U}_i = \underline{U}_1$, $\underline{U}_e = \underline{U}_2$, iar sistemul de transmisiune era un cuadripol simetric şi reciproc, adaptat pe impedanţa sa caracteristică.

45.3. Filtre electrice

45.3.1. Definiţii. În foarte multe cazuri, în telecomunicaţii e necesar să se transmită de la un generator la un receptor numai semnalele de anumite frecvenţe sau cu frecvenţele cuprinse într-un anumit interval. Acest lucru poate fi realizat, dacă se utilizează sisteme de transmisiune, numite *filtre*, a căror caracteristică de frecvenţă a atenuării prezintă minime pronunţate pentru intervalele de frecvenţă pe care filtrul trebuie să le favorizeze (să le selecteze). În electrocomunicaţii, filtrele sînt cuadripoli sau lanţuri de cuadripoli şi se mai numesc *filtre electrice* sau *filtre electrice de frecvenţă*.

Se numeşte *interval de trecere* sau *bandă de trecere* orice interval din spectrul frecvenţelor, cuprins între o frecvenţă inferioară $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ şi o frecvenţă superioară $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} > f_i$, pentru care filtrul prezintă o atenuare foarte mică (sau chiar nulă, în cazuri idealizate) în raport cu aceea pe care o prezintă în afara acestui interval. Cele două limite menţionate (definite de fapt prin anumite condiţii mai precise) se numesc *frecvenţe de tăiere*. Restul intervalelor din spectru se numesc *intervale de atenuare*. Se numeşte *filtru trece-jos* un filtru care favorizează semnalele de frecvenţe inferioare unei limite date ($f_i = 0$, $f_s \neq 0$), *filtru trece-sus*, un filtru care favorizează semnalele de frecvenţe su-

[1] Sau caracteristica atenuare-frecvenţă.
[2] Sau caracteristica defazaj-frecvenţă.



perioare unei limite date ($f_i \neq 0$, $f_s \neq \infty$) şi *filtru trece-bandă*, un filtru care favorizează numai semnalele de frecvenţe cuprinse într-un anumit interval de trecere, relativ îngust ($f_i \neq 0$, $f_s \neq 0$). Se numeşte *interval de oprire* sau bandă de oprire orice interval din spectrul frecvenţelor, pentru care filtrul prezintă o atenuare foarte mare (infinită în cazuri idealizate), în raport cu aceea pe care o prezintă în afara acestui interval; se numeşte *filtru opreşte-bandă* un filtru care blochează trecerea semnalelor cu frecvenţe cuprinse într-un anumit interval de oprire.

Teoria filtrelor electrice, a studiului şi calculului lor, reprezintă una din cele mai dezvoltate şi mai specializate ramuri ale teoriei comunicaţiilor. În cele ce urmează ne vom limita la studiul unor filtre nedisipative (fără pierderi), simetrice, omogene şi adaptate (avînd ca impedanţă de sarcină o impedanţă egală cu impedanţa lor caracteristică $\underline{Z}_c$). Această ultimă condiţie e în fond foarte restrictivă, deoarece, aşa cum vom vedea, impedanţa caracteristică depinde de frecvenţă, fiind reală pentru anumite intervale din spectru şi imaginară pentru altele. O astfel de impedanţă nu poate fi realizată în concret cu elemente ideale, pasive, de circuit (r, L, C). Filtrele reale nu lucrează deci adaptat, pentru orice valoare a frecvenţei; în afară de aceasta, ele au totdeauna pierderi şi proiectarea lor optimă impune altă structură decît aceea a unui lanţ de cuadripoli simetric şi omogen. Cu toate acestea, studiul elementar care urmează ilustrează sugestiv principalele probleme ale funcţionării unui filtru.

45.3.2. **Filtre nedisipative, simetrice, adaptate.** Vom considera lanţuri omogene de cuadripoli simetrici în T (fig. 45.3, *a*) sau în Π (fig. 45,3,*b*), funcţionînd adaptat, adică închise pe impedanţa lor caracteristică $\underline{Z}_c$(rel. 45.3). Deoarece

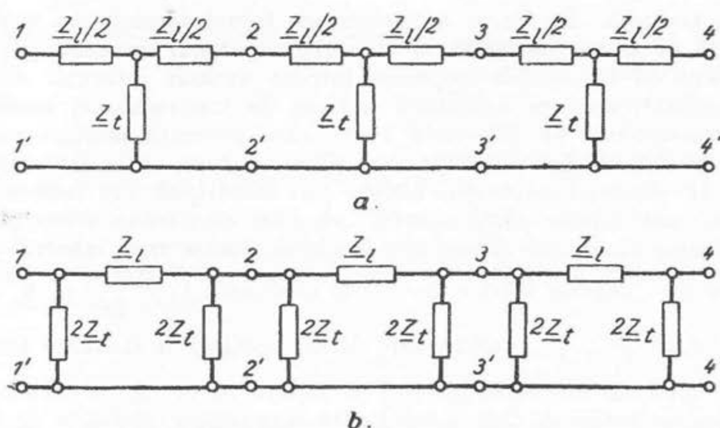


Fig. 45.3

în aceste condiţii exponentul de transfer al unui lanţ cu n cuadripoli e $n\underline{g} = na + jnb$, e suficient să studiem funcţionarea unui singur cuadripol din lanţ, de exemplu a primului, la diferite frecvenţe, adică funcţiunile :

$$a(\omega),\ b(\omega)\ \text{şi}\ \underline{g}(\omega) = a + jb.$$

Din relația (43.30), pentru cuadripolii în T simetrici, cu $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_l}{2}$ și $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}_t}$, rezultă :

$$\underline{A} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\underline{Z}_l}{\underline{Z}_t} = \underline{D};\ \ \underline{B} = \underline{Z}_l + \frac{\underline{Z}_l^2}{4\underline{Z}_t};\ \ \underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_t} \tag{45.35}$$

și

$$\underline{Z}_{c_T} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\underline{Z}_t\underline{Z}_l + \frac{\underline{Z}_l^2}{4}}. \tag{45.36}$$

Din relația (43.32), pentru cuadripolii în π simetrici cu $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{1}{2\underline{Z}_t}$ și $\underline{Z} = \underline{Z}_l$ rezultă :

$$\underline{A} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\underline{Z}_l}{\underline{Z}_t} = \underline{D};\ \ \underline{B} = \underline{Z}_l;\ \ \underline{C} = \frac{1}{2\underline{Z}_t} + \frac{\underline{Z}_l}{4\underline{Z}_t^2} \tag{45.37}$$

și

$$\underline{Z}_{c\Pi} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_t\underline{Z}_l} + \frac{2}{4\underline{Z}_t^2}}}. \tag{45.38}$$

Arătăm mai întîi că *un cuadripol pasiv nedisipativ are parametrii fundamentali reali* ($\underline{A}$ *și* $\underline{D}$) *sau imaginari* ($\underline{B}$ *și* $\underline{C}$). În adevăr, un asemenea cuadripol poate fi compus numai din elemente reactive de circuit (bobine și condensatoare). Schema lui echivalentă în T cu elementele din figura 43.7, *a* va fi de asemenea compusă numai din elemente reactive. Mărimile $\underline{Y}$, $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ ale acestei scheme sînt deci imaginare. Din relația (43.56) rezultă atunci că C e imaginar, $\underline{A}$ e real și $\underline{D}$ e real. Din condiția de reciprocitate (43.9) rezultă atunci că și $\underline{B}$ e imaginar. Cuadripolul nedisipativ se caracterizează deci prin relațiile :

$$\mathrm{Im}\,\{\underline{A}\} = 0;\ \ \mathrm{Im}\,\{\underline{D}\} = 0;\ \ \mathrm{Re}\,\{\underline{B}\} = 0;\ \ \mathrm{Re}\,\{\underline{C}\} = 0. \tag{45.39}$$

Pentru un cuadripol nedisipativ simetric rezultă atunci din relațiile (45.10) și (45.3) condițiile :

$$\mathrm{Im}\,\{\mathrm{ch}\underline{g}\} = \boxed{\mathrm{sh}\,a\,\sin b = 0} \tag{45.40}$$

și

$$\mathrm{Im}\,\{\underline{Z}_c\} = 0,\ \mathrm{Re}\,\{\mathrm{sh}\underline{g}\} = \mathrm{sh}\,a\cos b = 0\ (\text{dacă } \underline{B}\underline{C} < 0) \tag{45.41}$$

sau

$$\mathrm{Re}\,\{\underline{Z}_c\} = 0,\ \mathrm{Im}\,\{\mathrm{sh}\,\underline{g}\} = \mathrm{ch}\,a\sin b = 0\ (\text{dacă } \underline{B}\underline{C} > 0). \tag{45.42}$$

Deoarece parametrii cuadripolului și în particular a, b și $\underline{Z}_c$ sînt funcții de frecvență, rezultă că, studiind aceste funcții se pot pune în evidență una sau alta din situațiile (45.41) sau (45.42). Se mai observă că *impedanța caracteristică a unui cuadripol nedisipativ simetric e sau reală sau imaginară.* Analizăm pe rînd cele două cazuri :

1. *Intervalele de trecere.* Pentru frecvențele la care impedanța caracteristică e reală, relațiile (45.40) și (45.41) pot fi satisfăcute numai cu

$$a = 0; \quad \underline{Z}_c = Z_c = \left|\sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}\right| > 0 \qquad (45.43)$$

$$-1 \leqslant \underline{A} = A = \cos b \leqslant +1. \qquad (45.44)$$

Pentru frecvențele care asigură aceste inegalități, atenuarea e nulă și impedanța caracteristică e reală și pozitivă. Defazajul depinde de frecvență

$$b = \text{arc}\cos A. \qquad (45.45)$$

Acestea sînt *intervalele de trecere* ale filtrului nedisipativ simetric, cu frecvențele de tăiere determinate de situațiile extreme

$$A = \pm 1 \text{ sau } A^2 = 1 \text{ sau } \underline{BC} = 0 \qquad (45.46)$$

În cazul filtrelor în Π sau T (fig. 45.3), din relațiile (45.35) și (45.37) rezultă aceeași condiție:

$$A = 1 + \frac{1}{2}\frac{\underline{Z}_l}{\underline{Z}_t} = \pm 1. \qquad (45.47)$$

2. *Intervalele de atenuare.* Pentru frecvențele la care impedanța caracteristică e imaginară, relațiile (45.40) și (45.42) pot fi satisfăcute numai cu:

$$b = 0, \pm\pi; \quad \underline{Z}_c = \pm \mathrm{j}\left|\sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}\right| \qquad (45.48)$$

$$\underline{A} = A = \pm \operatorname{ch} a; \quad \text{sau } A \leqslant -1 \text{ sau } A \geqslant 1 \qquad (45.49)$$

(deoarece ch $a \geqslant 1$).

Pentru frecvențele care asigură aceste inegalități, atenuarea nu mai este nulă, ci are expresia dependentă de frecvență:

$$a = \arg \operatorname{ch} |A| > 0. \qquad (45.50)$$

În realitate, din cauza pierderilor și datorită faptului că impedanța de sarcină a unui lanț de cuadripoli nu poate fi realizată cu dependența de frecvență cerută de relațiile (45.43) și (45.48), rezultatele obținute constituie o idealizare. În condițiile acestei idealizări, studiul unui filtru consistă în determinarea frecvențelor de tăiere cu relațiile (45.46), respectiv (45.47), pentru lanțurile în Π sau în T — și în analiza caracteristicilor de frecvență a defazajului (45.45) — în intervalele de trecere — și a atenuării (45.50) — în intervalele de atenuare. Prezentăm în continuare cîteva exemple.

45.3.3. Filtre trece-jos (fig. 45.4, *a* și *b*). Aceste filtre sînt de tipurile generale din figura 45.3,*a* sau *b*, cu

$$\underline{Z}_l = \mathrm{j}\,\omega L, \quad \underline{Z}_t = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}$$

şi impedanţele caracteristice date de relaţiile (45.36) sau 45.38). Condiţia (45.46), respectiv (45.47). devine :

$$A = 1 - \frac{1}{2}\ \omega^2\ L\ C = \pm 1,$$

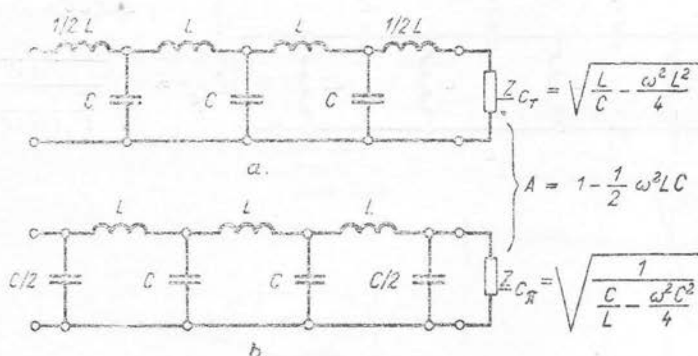


Fig. 45.4

de unde se obţine intervalul de trecere $(-1 \leqslant A \leqslant +1)$

$$0 = \omega_i \leqslant \omega = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Avînd frecvenţa de tăiere inferioară egală cu zero, aceste filtre sînt de tipul trece-jos. În intervalul de atenuare rezultă caracteristica de frecvenţă :

$$a = \arg \operatorname{ch} |A| = \arg \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2}\ \omega^2 LC - 1\right), \qquad \omega \geqslant \omega_s,$$

reprezentată în figura 45.5.

45.3.4. **Filtre trece-sus** (fig. 45.6, *a* şi *b*). Aceste filtre sînt de tipurile generale din figura 45.3, *a* sau *b*, cu

$$\underline{Z}_l = \frac{1}{j\ \omega\ C}, \quad \underline{Z}_t = j\ \omega\ L.$$

Condiţia (45.46), respectiv (45.47), devine :

$$A = 1 - \frac{1}{2\ \omega^2\ LC} = 1,$$

de unde se obţine intervalul de trecere $(-1 \leqslant A \leqslant +1)$

$$\frac{1}{2\sqrt{LC}} = \omega_i \leqslant \omega < \omega_s = \infty.$$

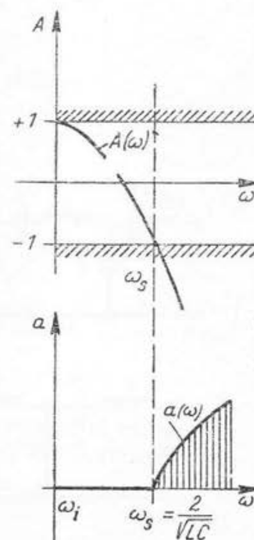


Fig. 45.5

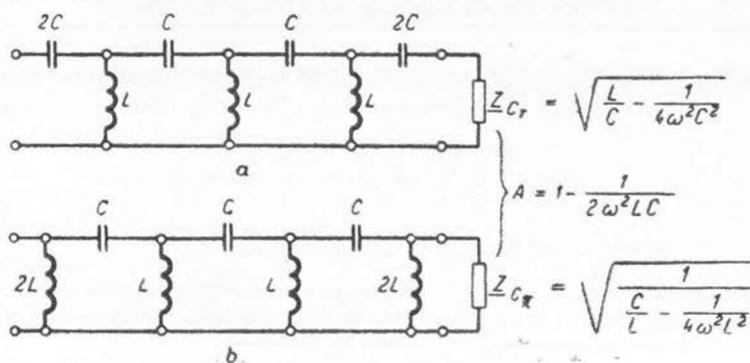


Fig. 45.6

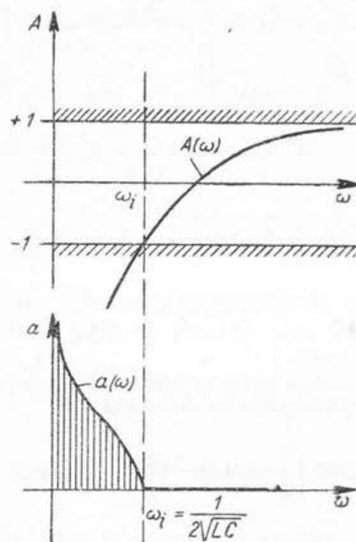


Fig. 45.7

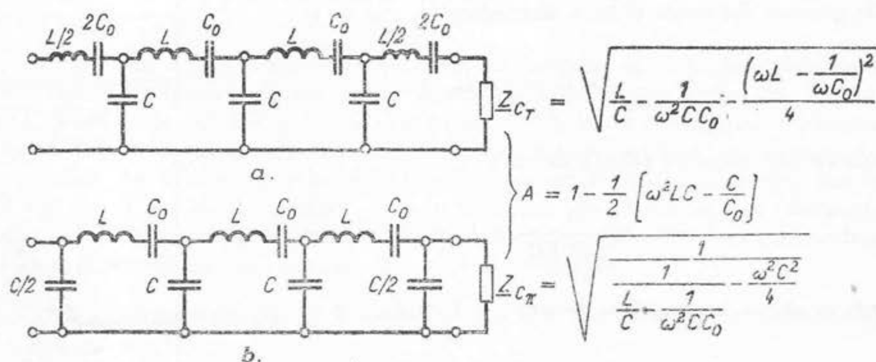


Fig. 45.8

Avînd frecvenţa de tăiere superioară infinită, aceste filtre sînt de tipul trece-sus. În intervalul de atenuare rezultă caracteristica de frecvenţă

$$a = \arg \operatorname{ch} |A| = \arg \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2\omega^2 LC} - 1\right)$$

reprezentată în figura 45.7.

45.3.5. **Filtre trece-bandă** (fig. 45.8, *a* şi *b*). Aceste filtre sînt de tipurile generale din figura 45.3, *a* sau *b*, cu

$$\underline{Z}_l = \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_0}\right); \quad \underline{Z}_t = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}.$$

Condiţia (45.46), respectiv (45.47), devine:

$$A = 1 - \frac{1}{2}\left(\omega^2 LC - \frac{C}{C_0}\right) = \pm 1,$$

de unde se obţine intervalul de trecere $(-1 \leqslant A \leqslant +1)$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{LC_0}} = \omega_i \leqslant \omega \leqslant \omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC_0} + \frac{4}{LC}} < \infty.$$

Avînd ambele frecvenţe limită finite şi nenule, aceste filtre rînt de tipul trece-bandă; în intervalele de atenuare sezultă caracteristicile de frecvenţă:

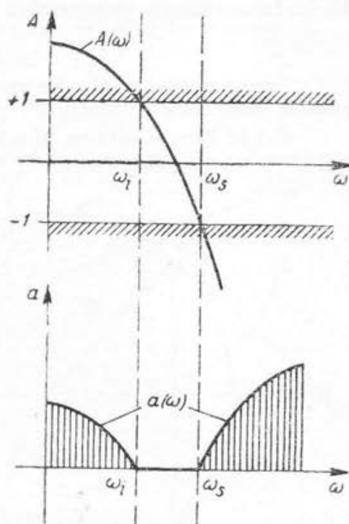


Fig. 45.9

$$a = \arg \operatorname{ch} |A| = \arg \operatorname{ch}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\omega^2 LC - \frac{C}{C_0}\right)\right]; \quad \omega \leqslant \omega_i$$

$$a = \arg \operatorname{ch} |A| = \arg \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}\left(\omega^2 LC - \frac{C}{C_0}\right) - 1\right]; \quad \omega \geqslant \omega_s$$

reprezentate în figura 45.9.

46. DIAGRAME — LOC GEOMETRIC

În studiul circuitelor de curent alternativ se consideră nu numai un anumit regim de funcţionare, ci şi modul cum se modifică regimul de funcţionare la variaţia foarte lentă a unui parametru oarecare: frecvenţa, o rezistenţă etc.

În cazul circuitelor în regim permanent sinusoidal se utilizează în acest scop locurile geometrice în planul complex ale vîrfurilor fazorilor corespunzători mărimilor sinusoidale considerate, la modificarea regimului de funcţionare al circuitului.

Dacă se urmărește modificarea regimului de funcționare la variația a doi parametri, se obțin familii de curbe-loc geometric.

46.1. Inversiunea geometrică

Pentru teoria curbelor-loc geometric este deosebit de importantă transformarea punctuală numită *inversiune geometrică*.

46.1.1. **Puncte inverse.** Două puncte A și A' se numesc *puncte inverse* sau *reciproce* în raport cu un cerc dat, cu centrul în O (fig. 46.1), dacă este îndeplinită condiția

$$OA \cdot OA' = (OB)^2 = K. \quad (46.1)$$

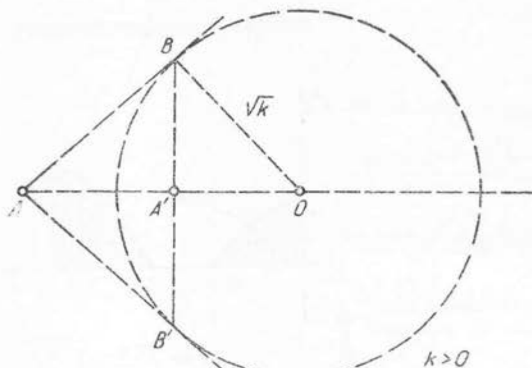


Fig. 46.1

Punctul O se numește *centru de inversiune*, mărimea reală K se numește *putere de inversiune*, iar cercul de rază $\sqrt{|K|}$, cerc de referință.

Observații: a) Dacă unul din puncte este situat în afara cercului, celălalt este situat în interiorul cercului.

b) Dacă puterea de inversiune e pozitivă (cazul din fig. 46.1), cele două puncte inverse sînt de aceeași parte a centrului de inversiune. Dacă această putere e negativă, cele două puncte sînt de o parte și de alta a centrului de inversiune.

c) Dacă trebuie construit inversul A' al unui punct dat A din exterior, se procedează astfel: din A se duc tangentele la cerc în B și B'; punctul A' se obține la intersecția coardei BB' cu dreapta AO.

d) Dacă trebuie construit inversul A al unui punct dat A' din interior, se procedează astfel: din A' se ridică o perpendiculară pe OA', care intersectează cercul în B și B'; se duc tangentele la cerc în aceste puncte; intersecția tangentelor este punctul A, căutat în prelungirea razei OA'.

Prin inversiune, o curbă-loc geometric al punctului A se transformă în altă curbă: locul geometric al punctelor A' corespunzătoare. Dacă forma curbei este complicată, inversiunea se face prin puncte așa cum s-a procedat pentru punctele izolate din plan. În cazuri particulare, determinarea curbei inverse se poate efectua sistematic.

46.1.2 **Inversiunea unui cerc.** Se consideră cercul cu centrul în C_1 care nu trece prin centrul de inversiune. Inversele punctelor M și N pe dreapta OC_1, față de centrul de inversiune O, se construiesc în conformitate cu relația (46.1):

$$OM \cdot OM' = ON \cdot ON' = K. \quad (46.2)$$

Pe segmentul $M'N'$, ca diametru, se construiește cercul C_2 (fig. 46.2) Acest cerc este inversul cercului C_1. Pentru a demonstra aceasta, ducem din O o dreaptă care taie cercurile în M și N, respectiv în N' și M', și alta care le taie în E și F, respectiv în F' și E'; din relația (46.2) rezultă:

$$\frac{OM}{ON'} = \frac{ON}{OM'}$$

sau (folosind proprietățile proporțiilor):

$$\frac{OM}{ON'} = \frac{ON}{OM'} = \frac{OM + ON}{OM' + ON'} = \frac{ON - OM}{ON' - OM'}$$

sau

$$\frac{ON + OM}{ON - OM} = \frac{OM' + ON'}{OM' - ON'} \text{ adică } \frac{OC_1}{C_1N} = \frac{OC_2}{C_2M'}. \tag{46.3}$$

Rezultă că cercurile cu centrele în C_1 și C_2 sînt *omotetice* față de centrul O. Se poate atunci scrie relația de asemănare:

$$\frac{OE}{OF'} = \frac{OF}{OE'} = \frac{OM}{ON'} = \frac{ON}{OM'},$$

oricare ar fi secanta $OEFF'E'$. Se obține egalitatea

$$OE \cdot OE' = OF \cdot OF'. \tag{46.4}$$

De altă parte, puterile punctului O față de cele două cercuri sînt

$$OM \cdot ON = OE \cdot OF$$
$$\text{și } OM' \cdot ON' = OE' \cdot OF'. \tag{46.5}$$

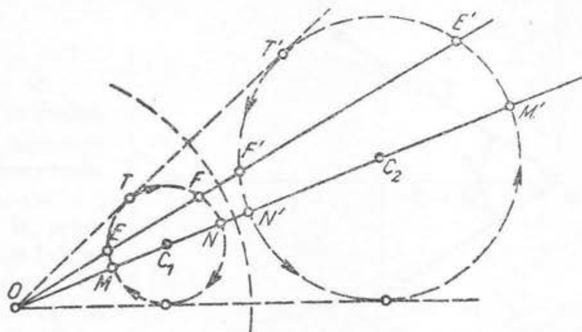


Fig. 46.2

Înmulțind aceste relații și ținînd seama de relațiile (46.2) și (46.4) rezultă:

$$OM \cdot ON \cdot OM' ON' = K^2 = OE \cdot OF \cdot OF' \cdot OE' = (OE \cdot OE')^2 = (OF \cdot OF')^2$$

sau

$$OE \cdot OE' = OF \cdot OF' = K, \tag{46.6}$$

adică și punctul E și E', respectiv F și F' sînt inverse unul altuia cu aceeași putere.

O b s e r v a ț i i : *a)* Linia dreaptă fiind un caz limită al cercului ($r \to \infty$), rezultă că inversa unei drepte este tot un cerc. Acest cerc trece prin centrul de inversiune, deoarece punctelor M de la infinit (ale dreptei) trebuie să le corespundă, din relația (46.2), inverse cu $OM' = 0$.

b) Dacă centrul de inversiune este pe dreaptă, curba ei inversă e tot o dreaptă.

c) Curba inversă a unui cerc este o dreaptă sau un cerc, după cum centrul de inversiune se găsește sau nu pe cerc.

d) Centrele C_1 și C_2 a două cercuri inverse față de O nu sînt puncte inverse unul față de altul cu aceeași putere de inversiune cu a punctelor cercurilor.

46.2 Inversiunea complexă

În calculul circuitelor de curent alternativ cu ajutorul reprezentării în complex e utilizată *inversiunea complexă*, care diferă de inversiunea geometrică a acelorași puncte.

Două puncte în planul complex M și M' sînt *inverse* (în complex) unul altuia față de centrul de inversiune O, originea coordonatelor, dacă este îndeplinită condiția:

$$\underline{V} \cdot \underline{V}' = K, \tag{46.7}$$

în care $\underline{V} = V\,e^{j\beta}$ și $\underline{V}' = V'e^{j\beta'}$ sînt numere complexe cu afixele în M, respectiv M' (fig. 46.3). Presupunem că puterea de inversiune K e un număr real. Rezultă :

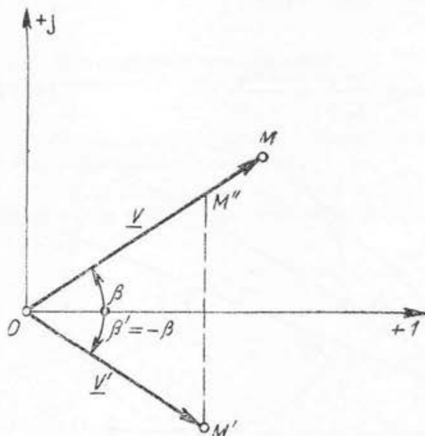


Fig. 46.3

$$\underline{V}' = \frac{K}{\underline{V}} = \frac{K}{V}\,e^{-j\beta} \qquad (46.8)$$

cu

$$V' = \frac{K}{V} \text{ și } \beta' = -\beta. \qquad (46.9)$$

Se observă că inversiunea unui punct în planul complex comportă două operații succesive (a căror ordine de efectuare e arbitrară) :

a) inversiunea geometrică a punctului M după regulile stabilite în paragraful 46.1.1., obținîndu-se punctul M'' ;

b) construirea simetricului punctului M'' față de axa reală, obținîndu-se astfel punctul M' (simetrizarea față de axa reală).

În calculul circuitelor de curent alternativ intervine deseori necesitatea de a obține prin inversiune admitanța complexă din impedanța complexă, și invers. Dar pentru determinarea puterii de inversiune K trebuie considerate și scările grafice ale impedanței $\left(\text{de ex. } a\,\frac{\Omega}{\text{cm}}\right)$ și admitanței $\left(\text{de ex. } b\,\frac{S}{\text{cm}}\right)$.

$$\underline{Z}\,\underline{Y} = (OA)\,a\cdot(OA')\,b = 1 \qquad (46.10)$$

rezultă puterea de inversiune,

$$K = OA\cdot OA' = \frac{1}{ab}, \qquad (46.11)$$

în care OA și OA' (de ex. în cm) sînt lungimile vectorilor din planul complex care reprezintă impedanța, respectiv admitanța, la scările indicate.

În figura 46.4 s-a construit admitanța cu ajutorul cercului de inversiune de raza $\sqrt{K} = \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

Operațiile s-au succedat astfel: s-a construit impedanța complexă conjugată $\underline{Z}^*$, apoi, ducînd tangentele la cercul de inversiune și coarda punctelor de tangență, se obține punctul A', vîrful admitanței $\underline{Y}$.

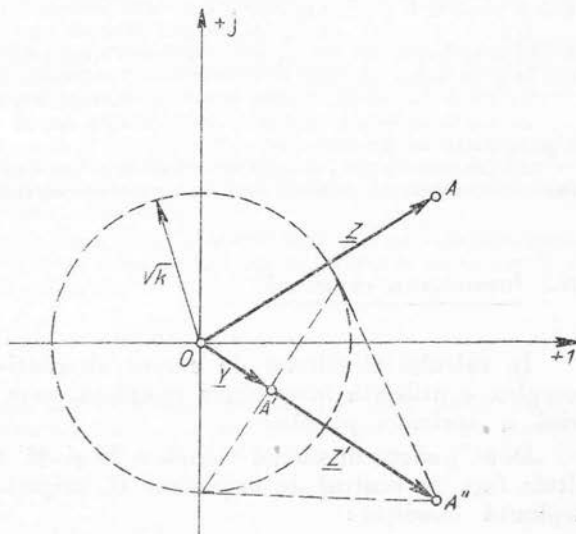


Fig. 46.4

46.3 Exemple de diagrame — loc geometric

Se vor prezenta cîteva curbe-loc geometric mai frecvent întîlnite în problemele electrotehnice.

46.3.1. **Dreapta.** O ecuație generală a unei mărimi complexe $\underline{C}$, funcțiune de gradul întîi de un parametru real p :

$$\underline{C} = \underline{A} + p\underline{B} \tag{46.12}$$

(cu $-\infty \leqslant p \leqslant +\infty$) reprezintă o dreaptă care se obține adunînd la fazorul fix $\underline{A}$ fazorul variabil $p\underline{B}$ de direcție fixă. În figura 46.5. s-a gradat dreapta în funcțiune de p.

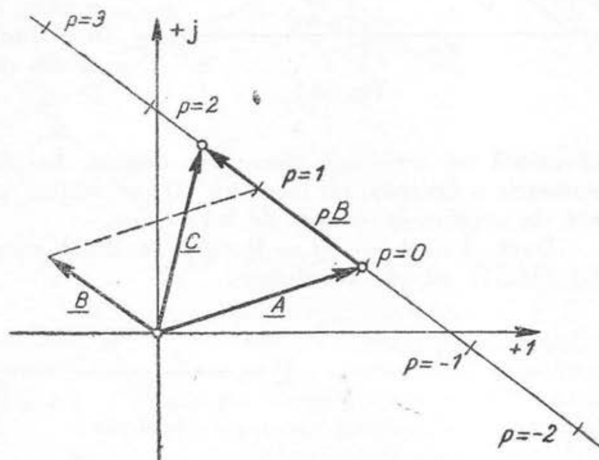


Fig. 46.5

Cazuri particulare : *a)* Ecuația unei drepte care trece prin origine (fig. 46.6, *a*) este :

$$\underline{C} = p\underline{B} = p(M + jN)$$

cu $\underline{B} = M + jN$. (46.13)

b) Ecuația unei drepte paralelă cu axa reală (fig. 46.6, *b*) este :

$$\underline{C} = \underline{A} + pM$$

$(\operatorname{Im}\{\underline{B}\} = 0)$. (46.14)

c) Ecuația unei drepte paralelă cu axa imaginară (fig. 46.6, *c*) este :

$$\underline{C} = \underline{A} + j\,pN \quad (\operatorname{Re}\{\underline{B}\} = 0). \tag{46.15}$$

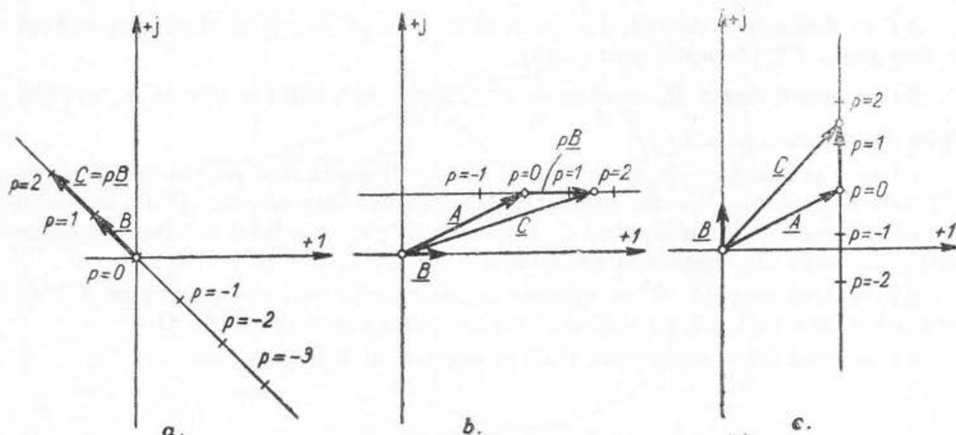


Fig. 46.6

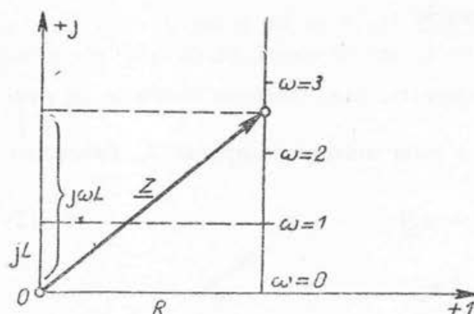


Fig. 46.7

Aplicație: Impedanța unei bobine de rezistență R și inductivitate L constante este funcțiune de pulsația $\omega = 2\pi f$. Dacă pulsația variază, impedanța

$$Z = R + j\omega L \tag{46.16}$$

are diagrama loc geometric din figura 46.7.

46.3.2. Cercul care trece prin origine. O ecuație generală a unei mărimi complexe $\underline{D}$, care e inversa unei funcțiuni liniare de un parametru real p,

$$\underline{D} = \frac{1}{\underline{A} + p\underline{B}}, \tag{46.17}$$

reprezintă un cerc care trece prin origine. În adevăr, numitorul are ca loc geometric o dreaptă, iar locul lui D se obține prin inversiunea unei drepte față de origine ca centru de inversiune.

Dacă $\underline{A} = \mathrm{A}\, e^{j\alpha}$, $\underline{B} = \mathrm{B}\, e^{j\beta}$ și se divid numărătorul și numitorul relației (46.17) cu $\underline{A}$, se obține:

$$\underline{D} = \frac{\frac{1}{\underline{A}}}{1 + p\frac{\underline{B}}{\underline{A}}} = \frac{\underline{D}_0}{1 + p\frac{\underline{B}}{\underline{A}}}, \tag{46.18}$$

în care

$$\underline{D}_0 = \frac{1}{\underline{A}} = (\underline{D})_{p=0}. \tag{46.19}$$

Construcția cercului-loc geometric al afixelor mărimii complexe $\underline{D}$ se face în modul următor (fig. 46.8):

a) se desenează dreapta-loc geometric $\underline{C} = \underline{A} + p\underline{B}$ și simetrica ei față de axa reală $\underline{C}^*$ (dreapta conjugată);

b) se construiește $\underline{D}_0 = \frac{1}{\underline{A}} = \frac{1}{A} e^{-j\alpha}$, care reprezintă o coardă a cercului ($\underline{D} = \underline{D}_0$ pentru $p = 0$);

c) se construiește de asemenea o perpendiculară din origine pe dreapta $\underline{C}^*$, care reprezintă direcția diametrului cercului. Într-adevăr, $\underline{D}$ are modulul maxim (diametrul cercului) cînd $\underline{C}$, respectiv $\underline{C}^*$, are modulul minim (reprezentat de distanța din origine la dreaptă);

d) centrul cercului O' se găsește la intersecția perpendicularei pe $\underline{C}^*$ cu perpendiculara ridicată pe mijlocul segmentului reprezentat de $\underline{D}_0$;

e) unghiul între segmentul O_1O' și segmentul O_1O ($\underline{D}_0$) este

$$\gamma = \beta - \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

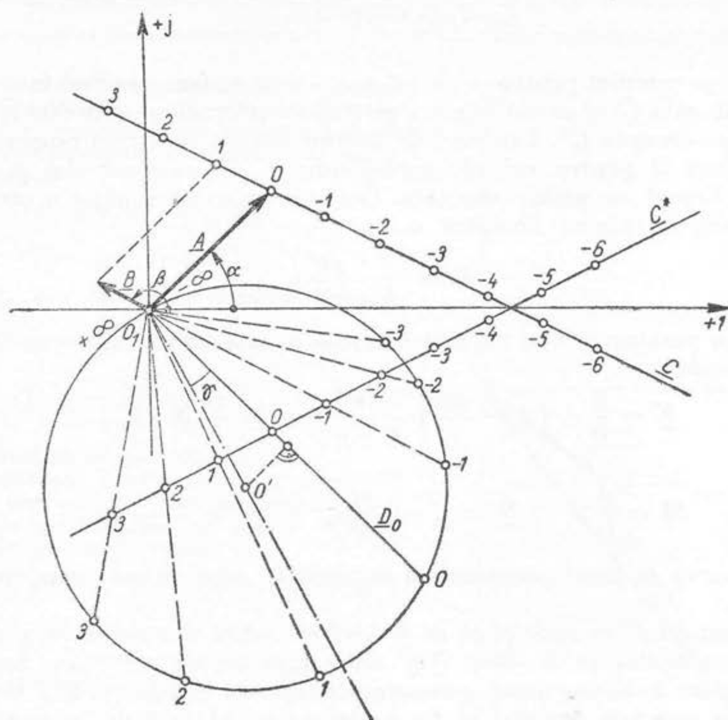


Fig. 46.8

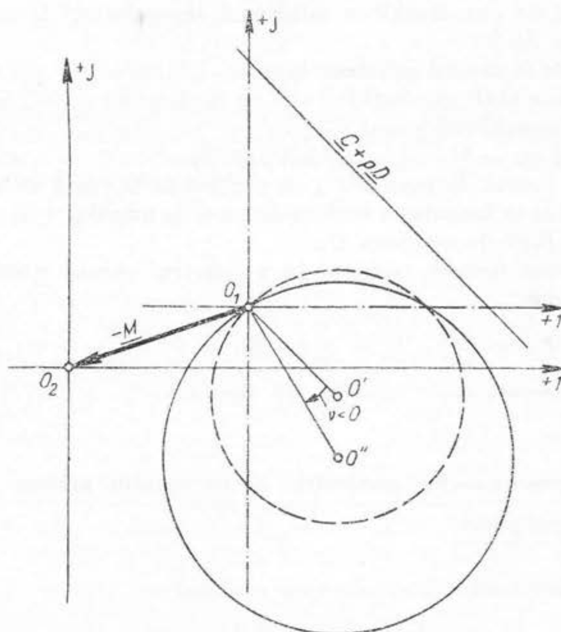


Fig. 46.9

Gradarea cercului pentru $-\infty < p < +\infty$ se face gradînd întîi dreapta $\underline{C}$, apoi conjugata $\underline{C}^*$ şi unind originea pe rînd cu diferitele puncte care reprezintă valorile p pe dreapta $\underline{C}^*$. Intersecţiile acestor coarde cu cercul reprezintă vîrfurile mărimii $\underline{D}$ pentru valorile corespondente ale parametrului p.

46.3.3 **Cercul cu poziţie oarecare.** Cea mai generală ecuaţie a cercului ca loc geometric în planul complex e :

$$\underline{K} = \frac{\underline{A} + p\underline{B}}{\underline{C} + p\underline{D}}, \tag{46.20}$$

unde p e un parametru real cuprins între $-\infty$ şi $+\infty$.

În adevăr :

$$\underline{K} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} + \left(\underline{A} - \frac{\underline{B}\underline{C}}{\underline{D}}\right)\frac{1}{\underline{C} + p\underline{D}} = \underline{M} + \underline{N} \cdot \underline{K}', \tag{46.21}$$

în care

$$\underline{M} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}; \quad \underline{N} = \underline{A} - \frac{\underline{B}\underline{C}}{\underline{D}}; \quad \underline{K}' = \frac{1}{\underline{C} + p\underline{D}}. \tag{46.22}$$

Se observă că locul geometric al mărimii K' este un cerc care trece prin origine.

Toţi factorii K' se multiplică cu $\underline{N} = Ne^{j\nu}$, adică sînt rotiţi cu ν şi modulul lor se multiplică cu N. Deci $\underline{N}\underline{K}'$ reprezintă tot un cerc care trece prin origine. Pentru a obţine locul geometric indicat de relaţia (46.21), este necesar ca toate punctele cercului să fie deplasate cu $\underline{M}$ faţă de origine sau ca originea să fie deplasată cu $-\underline{M}$.

O primă metodă de construcţie a unui cerc reprezentat de relaţia (46.20) e indicată în figura 46.9 :

a) se construieşte în modul cunoscut (par. 46.3.2) cercul $\underline{K}'$, cu centrul în O';

b) se roteşte raza O_1O' cu unghiul ν şi se multiplică cu N, obţinînd raza O_1O'' (în figură s-a considerat cazul $\nu < 0$);

c) se deplasează cu $-\underline{M}$ originea din O_1 în O_2.

Cercul căutat e cercul de rază OO'', cu centrul în O'' faţă de axele din O_2.

Gradarea cercului se face după rotirea dreptei cu unghiul ν în modul cunoscut din figura 46.8 faţă de originea O_1.

O altă metodă, mai simplă, consistă în a construi cercul prin trei puncte determinate de fazorii :

$$\underline{K}_0 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}; \quad \underline{K} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}; \quad \underline{K}_1 = \frac{\underline{A} + \underline{B}}{\underline{C} + \underline{D}} \tag{46.23}$$

(pentru $p = 0$) (pentru $p = \infty$) (pentru $p = 1$).

46.4. Aplicaţie. Diagrama — loc geometric al curentului primar al unui cuadripol pasiv

Considerăm ecuaţiile fundamentale ale unui cuadripol :

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{A}\,\underline{U}_2 + \underline{B}\,\underline{I}_2\\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\,\underline{U}_2 + \underline{D}\,\underline{I}_2.\end{aligned} \tag{(46.24)}$$

Dacă se consideră tensiunea la intrare origine de fază și invariabilă $\underline{U}_1 = U_1 =$ const., defazajul receptorului φ_2 inductiv invariabil, iar impedanța receptorului proporțională cu un parametru real p, se obțin ecuațiile :

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_2(\underline{B} + p\,\underline{A}\,\underline{Z}_2)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2(\underline{D} + p\,\underline{C}\,\underline{Z}_2),$$

în care $p\underline{Z}_2$ este impedanța variabilă a receptorului.

Se obține pentru curentul primar expresia :

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \frac{\underline{D} + p\,\underline{C}\,\underline{Z}_2}{\underline{B} + p\,\underline{A}\,\underline{Z}_2} = \underline{I}_1(p), \quad (46.25)$$

care este analogă relației (46.20).

În consecință, locul geometric al curentului $\underline{I}_1$ este un cerc care nu trece prin origine. Acest cerc se poate construi prin trei puncte, determinînd valorile curentului pentru :

$$p = \infty \quad \text{(în gol)} \qquad \underline{I}_1(\infty) = \underline{U}_1 \frac{\underline{C}}{\underline{A}} = \underline{I}_{10} \quad (46.26)$$

$$p = 0 \quad \text{(în scurtcircuit)} \quad \underline{I}_1(0) = \underline{U}_1 \frac{\underline{D}}{\underline{B}} = \underline{I}_{1sc} \quad (46.27)$$

$$p = 1 \qquad \underline{I}_1(1) = \underline{U}_1 \frac{\underline{D} + \underline{C}\,\underline{Z}_2}{\underline{B} + \underline{A}\,\underline{Z}_2}; \quad (46.28)$$

Fig. 46.10

Cercul se poate construi și în modul următor (fig. 46.10) :

Se stabilesc vîrfurile fazorilor $\underline{I}_{10}$ și $\underline{I}_{1sc}$ în M, respectiv N. Ca în figura 46.8 se determină unghiul γ dintre MN și MO'. Centrul cercului se găsește la intersecția normalei ridicate pe mijlocul segmentului MN și direcția MO'.

CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL

47. REGIMUL PERIODIC NESINUSOIDAL ŞI CARACTERIZAREA LUI

În paragrafele precedente s-a studiat regimul periodic sinusoidal al reţelelor electrice, adică regimul permanent stabilit în reţele liniare sub acţiunea unor tensiuni electromotoare sinusoidale şi de aceeaşi frecvenţă.

În realitate însă, variaţia în timp a tensiunilor electromotoare se abate mai mult sau mai puţin de la forma sinusoidală, datorită însăşi construcţiei generatorului. În adevăr, repartiţia inducţiei magnetice în întrefierul maşinii nu poate fi strict sinusoidală, deoarece nu se poate realiza o aşezare corespunzătoare a conductoarelor în crestături. Abaterea curbei de variaţie periodică în timp a unui curent sau a unei tensiuni de la forma sinusoidală se numeşte *deformare* sau *distorsiune*. Aşa cum vom arăta, în cazul în care circuitele electrice conţin inductivităţi, deformările curenţilor datorite deformărilor tensiunii se slăbesc, dar în cazul în care există condensatoare deformările curenţilor se accentuează. De altă parte, elementele de circuit neliniare (bobine cu miez de fier saturat, redresoare etc.) produc deformări ale curentului chiar dacă tensiunile aplicate circuitului sînt riguros sinusoidale. Conform clasificării făcute de C. Budeanu[1], elementele de circuit neliniare sînt *elemente deformante de prima categorie*, iar elementele de circuit reactive (capacitive) liniare sînt *elemente deformante de a doua categorie*.

În electroenergetică, efectele deformante sînt supărătoare, deoarece micşorează factorul de putere, produc rezonanţe etc., şi se încearcă evitarea lor prin diverse mijloace. În electrocomunicaţii însă, efectele deformante pot fi utile (în scopul însuşi al transmisiunii informaţiilor prin semnale, de ex. pentru modulaţie) sau nu (de ex. distorsiunile sistemelor de transmisiune, care reduc fidelitatea transmisiunii realizate). Totodată, în electrocomunicaţii semnalele transmise sînt, de obicei, nesinusoidale, chiar dacă se pot considera practic periodice.

Ideea fundamentală care stă la baza studiului circuitelor în regim periodic nesinusoidal constă în descompunerea tuturor mărimilor în sume (serii) de termeni sinusoidali.

[1] Constantin Budeanu (1886—1959) a fost membru al Academiei R.P.R. şi profesor de Bazele electrotehnicii la Institutul Politehnic Bucureşti.

47.1. Descompunerea spectrală (analiza armonică) a funcţiunilor periodice de timp

47.1.1. Serie trigonometrică. O funcţiune periodică de timp e caracterizată de identitatea :

$$f(t) \equiv f(t + mT) \qquad m = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{47.1}$$

în care $T = 2\pi/\omega = 1/f$ e perioada, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ e pulsaţia (fundamentală), iar $f = 1/T$ e frecvenţa (fundamentală).

Orice astfel de funcţiune care satisface condiţiilor lui Dirichlet [1] se poate dezvolta în serie trigonometrică (Fourier) sub forma :

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \tag{47.2}$$

în care termenii de pulsaţie $n\omega$ se numesc *armonici de ordinul n* în cosinus, respectiv în sinus, avînd coeficienţii daţi de relaţiile :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots ; \\ B_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \end{aligned} \tag{47.3}$$

Pentru $n = 0$,

$$\frac{A_0}{2} = F_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \gtrless 0 \tag{47.4}$$

este valoarea medie sau *componenta continuă* a funcţiunii periodice date. Mărimile $|A_n|$, respectiv $|B_n|$, sînt amplitudinile armonicelor de ordinul n în cosinus, respectiv în sinus. Valabilitatea relaţiilor (47.3), (47.4) se verifică fără dificultăţi, înlocuind pe $f(t)$ cu seria (47.2) şi efectuînd integrarea.

În electrotehnică, seria Fourier se pune sub o altă formă, strîngînd în aceeaşi expresie termenii în cosinus şi în sinus de acelaşi ordin pe baza identităţii :

$$\begin{aligned} f_n(t) = F_n\sqrt{2}\sin(n\omega t + \gamma_n) &\equiv F_n\sqrt{2}\sin\gamma_n \cos n\omega t + F_n\sqrt{2}\cos\gamma_n \sin n\omega t \equiv \\ &\equiv A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t. \end{aligned} \tag{47.5}$$

[1] Funcţiunea e *netedă pe porţiuni* în cuprinsul unei perioade, adică : e mărginită; are în acest interval un număr finit de discontinuităţi (de primul ordin); intervalul se poate descompune într-un număr finit de subintervale, în care funcţiunea e monotonă.

Cu această scriere seria trigonometrică devine :

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sqrt{2} \sin (n\omega t + \gamma_n). \quad (47.6)$$

În aceste relații : $f_n(t)$ e *armonica (instantanee) de ordinul n*; $f_1(t)$ e armonica (instantanee) de ordinul 1 sau *fundamentala*;

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (47.7)$$

e *valoarea efectivă a armonicii de ordinul n*;

$$\gamma_n = \text{arc tg} \frac{A_n}{B_n} = \text{arc sin} \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \text{arc cos} \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} \quad (47.8)$$

e faza inițială a armonicii de ordinul n, determinabilă univoc numai prin sin γ_n și cos γ_n, deoarece poate avea orice valoare, redusă la intervalul $(-\pi, +\pi)$.

Dacă funcțiunea $f(t)$ e cunoscută prin reprezentarea ei grafică, ridicată de exemplu experimental, coeficienții Fourier A_n și B_n se pot determina cu metode aproximative — suficient de precise — numite *metode grafico-analitice de analiză armonică* [1].

47.1.2. **Funcțiuni periodice particulare.** Lipsa sau prezența armonicelor dintr-o anumită categorie corespunde unor proprietăți particulare ale funcțiunii periodice considerate și se poate adesea recunoaște numai privind graficul funcțiunii.

Astfel, dacă (fig. 47.1, *a*)

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right), \quad (47.9)$$

trebuie să fie satisfăcută identitatea

$$F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t] \equiv - F_0 - \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos (n\omega t + n\pi) +$$

$$+ B_n \sin (n\omega t + n\pi)] \equiv - F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} A_n \cos n\omega t + (-1)^{n+1} B_n \sin n\omega t].$$

Rezultă pentru coeficienții Fourier condițiile :

$$F_0 = 0; \quad A_{2k} = 0; \quad B_{2k} = 0; \quad F_{2k} = 0.$$

Funcțiunea considerată, numită *funcțiune alternativă simetrică*, nu are decît armonici impare

$$f(t) = F_1\sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma_1) + F_3 \sin (3\omega t + \gamma_3) + \dots . \quad (47.10)$$

Aceasta este situația tensiunilor electromotoare ale generatoarelor sincrone, la care condiția (47.9) e realizată prin construcția mașinii, care asigură un cîmp învîrtitor cu repartiție identică (pînă la sens) în dreptul polilor N, respectiv S.

---

[1] v. Al. Th. Popescu, *Curs de electrotehnică, partea I-a, Analiza armonică*, (litografiat) — București, 1947 și
I. S. Antoniu, *Chestiuni speciale de electrotehnică*, București, 1956.

În mod analog se stabileşte prezenţa şi lipsa unor armonici la alte forme particulare de funcţiuni periodice : numai cu armonici pare (fig.47.1,*b*), numai cu armonici în sinus (fig 47.1,*c*), numai cu armonici în cosinus (fig. 47.1,*d*).

$f(t) = -f\left(t+\frac{T}{2}\right)$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k-1}\sqrt{2}\sin\left[(2k-1)\omega t+\gamma_{2k-1}\right]$$

a

$f(t) = f\left(t+\frac{T}{2}\right)$

$$f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}\sqrt{2}\sin(2k\omega t+\gamma_{2k})$$

b

$f(t) = -f(T-t)$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega t$$

c.

$f(t) = f(T-t)$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t$$

d.

Fig. 47.1

47.1.3. **Aplicaţii : 1.** Să se dezvolte în serie Fourier semnalul dreptunghiular din figura 47.2, de amplitudine A.

Soluţie : Se observă că analitic semnalul se scrie :

$$f(t) = \begin{cases} +A & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -A & \frac{T}{2} < t < T. \end{cases} \qquad (47.11)$$

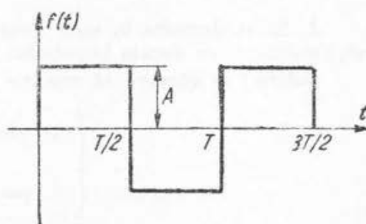


Fig. 47.2

Deoarece $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(T-t)$, semnalul nu conţine armonici pare şi armonici în cosinus, adică

$$F_0 = 0 \qquad F_{2k} = 0 \qquad A_n = 0,$$

i ar

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt = \frac{2}{T}A\int_0^{\frac{T}{2}}\sin n\omega t dt - \frac{2}{T}A\int_{\frac{T}{2}}^{T}\sin n\omega t dt =$$

$$= \frac{2A}{n\omega T}\left[\left| -\cos n\omega t - \right|_0^{\frac{T}{2}} \left| -\cos n\omega t \right|_{\frac{T}{2}}^{T}\right] = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 2k \\ \frac{4A}{\pi n} & \text{dacă } n = 2k-1. \end{cases}$$

Singurii coeficienți nenuli sînt deci:

$$B_{2k-1} = \frac{4A}{\pi(2k-1)} \qquad k = 1, 2, ..., \tag{47.12}$$

iar dezvoltarea căutată este:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k-1}\sin(2k-1)\omega t = \frac{4A}{\pi}\left[\sin n\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + ...\right]. \tag{47.13}$$

Dacă funcțiunea se aproximează prin suma $f^*(t)$ a primilor trei termeni, se obține curba din figura 47.3. Cu cît se consideră mai multe armonice, cu atît se obține o curbă mai apropiată de dreptunghi.

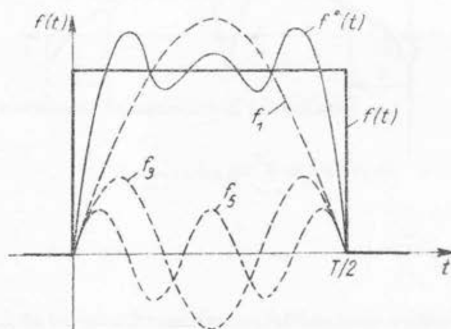


Fig. 47.3

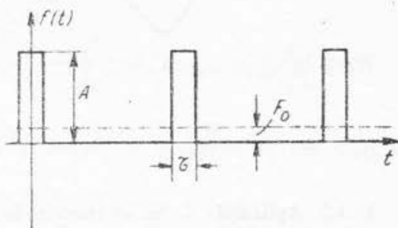


Fig. 47.4

2. Să se dezvolte în serie Fourier semnalul constituit din impulsii dreptunghiulare de amplitudine A, cu durata impulsului τ_0 (fig. 47.4).

Soluție: se observă că analitic acest semnal se scrie $(0, T)$:

$$y(t) = \begin{cases} A, & \text{pentru } 0 < t < \frac{\tau_0}{2} \\ 0, & \text{pentru } \frac{\tau_0}{2} < t < T - \frac{\tau_0}{2} \\ A, & \text{pentru } T - \frac{\tau_0}{2} < t < T \end{cases} \tag{47.14}$$

Deoarece $f(t) = f(T - t)$, semnalul conţine numai armonici în cosinus şi componenta continuă Se obţine relaţia

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{\tau_0}{2}} A\cos n\omega t\,dt + \int_{T-\frac{\tau_0}{2}}^{T} A\cos n\omega t\,dt\right] =$$

$$= \frac{2A}{T}\left[\frac{\sin n\omega\frac{\tau_0}{2}}{n\omega} + \frac{\sin n\omega T}{n\omega} - \frac{\sin n\omega\left(T - \frac{\tau_0}{2}\right)}{n\omega}\right] =$$

$$= \frac{4A}{T}\cdot\frac{\sin n\omega\frac{\tau_0}{2}}{n\omega} = \frac{2A}{\pi n}\sin\pi n\beta,$$

în care $\beta = \frac{\tau_0}{T}$, şi relaţia

$$F_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{A}{T}\left(\frac{\tau_0}{2} + \frac{\tau_0}{2}\right) = A\beta.$$

Rezultă :

$$f(t) = A\beta\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi n\beta}{\pi n\beta}\cos n\omega t\right\}. \qquad (47.15)$$

În telecomunicaţii se întîlnesc adesea semnale constituite din succesiuni de impulsii. În numeroase situaţii se întîlnesc impulsii foarte scurte, cu $\tau_0 \ll T$ şi $\beta \ll 1$. Din relaţia (47.14) rezultă că primele armonici ale acestor semnale au amplitudini practic egale, deoarece

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\sin\pi n\beta}{\pi n\beta} \to 1.$$

În cazul idealizat în care impulsiile ar fi infinit de scurte ($\tau_0 \to 0$) şi infinit de înalte ($A \to \infty$), dar cu o arie finită

$$\lim_{\tau_0\to 0} A\tau_0 = S$$

(impulsii delta sau impulsii Dirac), ar rezulta

$$A\beta \to \frac{S}{T} \quad \text{şi}$$

$$f(t) = \frac{2S}{T}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos n\omega t\right). \qquad (47.16)$$

47.2. Seria Fourier complexă

O funcţiune periodică reală f(t) care admite o dezvoltare în serie trigonometrică de forma (47.2) poate fi scrisă şi ca sumă a unei serii cu termeni complecşi, exponenţiali. Pentru aceasta observăm din relaţiile (47.3) că A_n e o funcţiune pară şi B_n o funcţiune impară de indicele n

$$A_n = A_{-n}; \qquad B_n = -B_{-n}. \tag{47.17}$$

Seria (47.2) poate fi atunci scrisă:

$$\mathrm{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A_n}{2} \cos n\,\omega t + \frac{B_n}{2} \sin n\,\omega t\right). \tag{47.18}$$

În adevăr, termenii cu $n > 0$ ne dau jumătate din valoarea termenilor corespunzători din relaţia (47.2), termenii cu $n < 0$ cealaltă jumătate [deoarece $A_{-n} \cos(-n\,\omega t) = A_n \cos n\,\omega t$ şi $B_{-n} \sin(-n\,\omega t) = -B_n(-\sin n\,\omega t) = B_n \sin n\,\omega t$], iar termenul $n = 0$ ne dă doar $A_0/2$, adică termenul liber.

Înlocuind în relaţia (47.18) cosinusul şi sinusul cu formulele

$$\cos n\,\omega t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}); \quad \sin n\,\omega t = \frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t})$$

rezultă:

$$\mathrm{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\frac{A_n - \mathrm{j}B_n}{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} + \frac{A_n + \mathrm{j}B_n}{4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\right]$$

sau

$$\mathrm{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{A_n - \mathrm{j}B_n}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} \tag{47.19}$$

deoarece suma termenilor în $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}$ e egală cu suma termenilor în $\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}$, după cum rezultă cu relaţia (47.17), punînd $n \to -n$.

Relaţia (47.19) reprezintă dezvoltarea în serie Fourier complexă a funcţiunii reale f(t) (partea imaginară a sumei e nulă). Coeficienţii dezvoltării se numesc amplitudini spectrale şi cu relaţiile (47.3) rezultă:

$$\underline{C}_n = \underline{C}^*_{-n} = \frac{A_n - \mathrm{j}B_n}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{f}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{47.20}$$

Observaţii: a) Dezvoltarea în serie complexă Fourier nu trebuie confundată cu reprezentarea în complex a seriei trigonometrice. Folosind regulile cunoscute, seria trigonometrică (47.2), respectiv relaţia (47.6), se poate reprezenta în complex nesimplificat termen cu termen numai în cazul funcţiunilor alternative ($F_0 = 0$) sub forma:

$$\underline{\mathrm{f}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} + B_n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n + \mathrm{j}A_n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\,F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega t + \gamma_n)} \tag{47.21}$$

astfel că

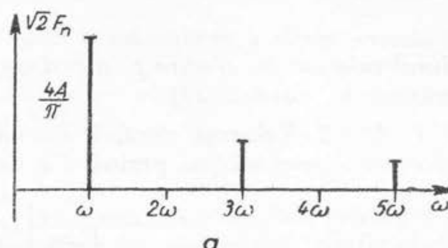
$$\mathrm{f}(t) = \mathrm{Im}\,\{\underline{\mathrm{f}}(t)\}. \tag{47.22}$$

Dacă se cunoaşte însă amplitudinea spectrală $\underline{C}_n$, din relaţiile (47.20) şi (47.21), rezultă :

$$\sqrt{2}F_n\, e^{j\gamma_n} = B_n + jA_n = 2j\left(\frac{A_n - jB_n}{2}\right) = 2j\,\underline{C}_n$$

sau

$$\underline{C}_n = -j\frac{F_n}{\sqrt{2}}e^{j\gamma_n} = \frac{F_n}{\sqrt{2}}e^{j\left(\gamma_n - \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (47.23)$$



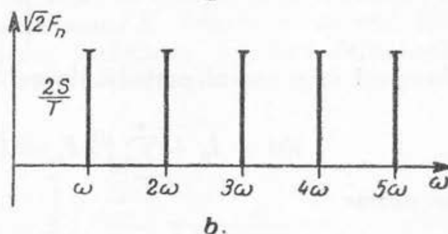


Fig. 47.5

b) Mulţimea amplitudinilor $\sqrt{2}F_n$ ale armonicilor unui semnal [sau, ceea ce e tot una, a dublelor modulelor amplitudinilor spectrale $2\,|C_n| = \sqrt{2}\,F_n$] se numeşte *spectrul semnalului* şi se reprezintă, de obicei, ca un şir discret de valori funcţiune de n. Spectrul semnalelor periodice e un spectru discret. În figura 47.5 *a* şi *b* sînt reprezentate spectrele semnalului dreptunghiular (47.13) şi spectrul semnalului constituit de o succesiune de impulsii delta (47.16).

47.3. Proprietăţi ale mărimilor periodice nesinusoidale

47.3.1. Valoarea medie a produsului a două armonici. Dacă

$$f_n = F_n\sqrt{2}\,\sin\,(n\,\omega t + \gamma_n) \quad \text{şi}$$
$$g_m = G_n\sqrt{2}\,\sin\,(m\,\omega t + \delta_m) \quad (47.24)$$

sînt două armonici de ordinele n şi m $(n \gtrless m)$, valoarea medie a produsului lor pe o perioadă T a fundamentalei este :

$$\widetilde{f_n g_m} = \frac{1}{T}\int_0^T 2F_nG_n\,\sin\,(n\,\omega t + \gamma_n)\,\sin\,(m\,\omega t + \delta_m)\,dt =$$

$$= F_n\,G_n\left[\frac{1}{T}\int_0^T \cos\Big((n - m)\,\omega t + \gamma_n - \delta_m\Big)dt - \frac{1}{T}\int_0^T \cos\Big((n+m)\,\omega t + \gamma_n + \delta_m\Big)dt\right].$$

A doua integrală e nulă pentru orice n şi m, deoarece valoarea medie a unei funcţiuni sinusoidale pe un număr întreg de perioade e nulă. Prima integrală e nulă dacă $n \neq m$ din acelaşi motiv, iar pentru $n = m$ are valoarea : $T \cdot \cos\,(\gamma_n - \delta_n)$. De aceea rezultă :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f_n g_m\,dt = \widetilde{f_n g_m} = 0 \qquad n \neq m \quad (47.25)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f_n g_m\,dt = \widetilde{f_n g_n} = F_nG_n\,\cos\,(\gamma_n - \delta_n). \quad (47.26)$$

Valoarea medie a produsului a două armonici de același ordin e egală cu produsul valorilor lor efective prin cosinusul decalajului dintre ele (și se anulează la mărimi în cuadratură).

47.3.2. **Valoarea efectivă a unei mărimi periodice nesinusoidale.** Valoarea efectivă a unei mărimi periodice e definită în cazul general de relația (33.5 :)

$$F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2\,\mathrm{d}t}. \tag{47.27}$$

În cazul unui curent periodic dezvoltat în serie Fourier :

$$\mathrm{i}(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\, I_n \sin(n\,\omega t + \gamma_n) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_n(t) \tag{47.28}$$

se obține :

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_n\right]\left[I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} i_m\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2\,\mathrm{d}t + \frac{I_0}{T}\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty} i_n + \sum_{m=1}^{\infty} i_m\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} i_n i_m \mathrm{d}t =$$

$$= I_0^2 + 2\, I_0 \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{i_n} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{i_n i_m},$$

dar $\widetilde{i_n} = 0$, iar $\widetilde{i_n\, i_m} = 0$ cu $n \neq m$ (47.25) și $\widetilde{i_n^2} = I_n^2$ (47.26) așa că

$$I^2 = I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2 \quad \text{sau}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_n^2 + \ldots} \geqslant 0. \tag{47.29}$$

Valoarea efectivă a unei mărimi periodice e rădăcina pătrată a sumei pătratelor valorilor efective ale armonicilor și a pătratului componentei continue. De aici rezultă că dacă o serie Fourier, adică o sumă de armonice, este nulă la orice t și deci are valoare efectivă nulă, aceasta nu se poate decît dacă toate armonicele au valori efective nule, adică sînt identice nule. Rezultă deci că :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \equiv 0 \text{ implică } f_n(t) \equiv 0 \text{ cu } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{47.30}$$

În mod analog, dacă o tensiune periodică este

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sqrt{2}\, \sin\,(n\,\omega t + \beta_n), \tag{47.31}$$

valoarea ei efectivă este

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}. \tag{47.32}$$

47.3.3. **Coeficientul de distorsiune.** Abaterea unei mărimi periodice de la forma sinusoidală se face (făcînd abstracţie de componenta continuă care nu afectează forma) prin *coeficientul de distorsiune* K_d definit de raportul dintre valoarea efectivă I_d a tuturor armonicilor superioare (reziduul deformat) şi valoarea efectivă a componentei alternative a mărimii. În cazul curentului (47.28)

$$k_d = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} I_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}} = \frac{I_d}{\sqrt{I^2 - I_0^2}}. \tag{47.33}$$

Se observă că acest coeficient de distorsiune e pozitiv şi subunitar

$$0 \leqslant k_d \leqslant 1.$$

Fără a da o indicaţie asupra formei exacte a mărimii (există o infinitate de mărimi periodice cu acelaşi coeficient de distorsiune şi cu forme diferite, rezultate din defazajele relative ale armonicelor, care nu sînt prinse în relaţia (47.32) coeficientul de distorsiune este util, deoarece creşte monoton în raport cu oricare dintre valorile efective ale armonicelor. Practic — în electroenergetică — o mărime se consideră sinusoidală dacă $k_d < 5\%$. În telecomunicaţii această condiţie se formulează de la caz la caz, după natura semnalului considerat şi a fidelităţii cerute.

Pentru mărimi periodice alternative, simetrice, de forma (47.10), se mai definesc :

$$\textit{Factorul de vîrf} \quad k_v = \frac{I_{max}}{I} \tag{47.34}$$

$$\textit{Factorul de formă} \quad k_f = \frac{I}{\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T/2} i\mathrm{d}t} \tag{47.35}$$

(unde t_0 e momentul în care i trece prin zero cu valori crescătoare). La mărimi sinusoidale rezultă :

$$k_d = 0, \qquad k_v = \sqrt{2}, \qquad k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11. \tag{47.36}$$

47.3.4. **Aplicație.** Să se calculeze valoarea efectivă și coeficientul de distorsiune al curentului pulsatoriu (redresat) din figura 47.6.

$$i(t) = \begin{cases} I_m \sin \omega t & \text{pentru } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{pentru } \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \qquad (47.37)$$

Soluție: Valoarea efectivă se poate calcula și mai simplu, fără dezvoltarea în serie Fourier, cu ajutorul relației (42.27) de definiție:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m^2 \sin^2 \omega t \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m^2 \frac{1-\cos^2 \omega t}{2} \mathrm{d}t} = \frac{I_m}{2}. \qquad (47.38)$$

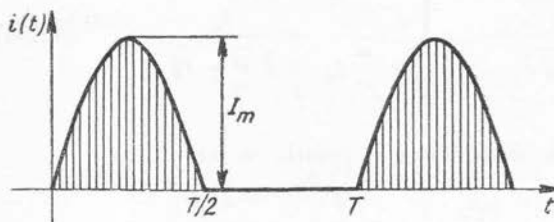


Fig. 47.6

Pentru calculul coeficientului de distorsiune este necesară determinarea valorilor efective ale armonicelor, ceea ce presupune determinarea coeficienților Fourier. Se obține:

$$I_0 = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \mathrm{d}t = \frac{I_m}{\pi} \qquad (47.39)$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \sin n\omega t \mathrm{d}t = \frac{I_m}{2\pi}\left[\frac{\sin(1-n)\pi}{1-n} - \frac{\sin(1+n)\pi}{1+n}\right]$$

$$\text{pentru} \begin{cases} n \neq 1 & B_n = 0 \\ n = 1 & B_1 = \frac{I_m}{2} \end{cases} \qquad (47.39')$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \cos n\omega t \mathrm{d}t = \frac{I_m}{2\pi}\left[\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right]$$

$$\text{pentru} \begin{cases} n \text{ impar} & A_n = 0 \\ n \text{ par} & A_n = \frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{1}{(1-n)(1+n)}. \end{cases} \qquad (47.39'')$$

În consecință, curentul este

$$i(t) = I_m\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4k^2)} \cos 2k\omega t\right]$$

$$i(t) = I_m\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(4k^2-1)} \sin\left(2k\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \qquad (47.40)$$

Coeficientul de distorsiune este:

$$k_d = \frac{\sqrt{I^2 - I_0^2 - I_1^2}}{\sqrt{I^2 - I_0^2}} = \frac{\sqrt{\frac{I_m^2}{4} - \frac{I_m^2}{\pi^2} - \frac{I_m^2}{8}}}{\sqrt{\frac{I_m^2}{4} - \frac{I_m^2}{\pi^2}}} = \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{\sqrt{2\pi^2 - 8}} \approx 0{,}4 = 40\%. \qquad (47.41)$$

Valoarea efectivă a curentului s-ar mai putea calcula şi cu ajutorul relaţiei (47.29):

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_4^2} + \ldots,$$

în care

$$I_0 = \frac{I_m}{2}\ ;\ I_1 = \frac{I_m}{2\sqrt{2}}\ ;\ I_2 = \frac{2I_m}{\sqrt{2}}\frac{1}{1\cdot 3}\ ;\ I_4 = \frac{2I_m}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{3\cdot 5}\ ;\ \text{etc.}$$

47.4. Puteri în regim nesinusoidal

Considerăm un dipol generator care alimentează cu energie un dipol receptor (fig. 47.7), astfel că tensiunea la borne şi curentul sînt:

$$u = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\, U_n \sin(n\omega t + \beta_n) \qquad (47.42)$$

$$i = I_0 + \sum_{n=1}^{8} i_n = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\, I_n \sin(n\omega t + \gamma_n)$$

cu

$$\varphi_n = \beta_n - \gamma_n. \qquad (47.43)$$

Conform definiţiei, *puterea activă* e media pe o perioadă a puterilor instantanee:

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T ui\mathrm{d}t = \widetilde{ui}} \qquad (47.44)$$

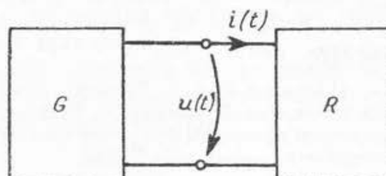


Fig. 47.7

sau

$$P = U_0 I_0 + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{i_n} + I_0 \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{u_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{u_n i_n} + \sum^{\infty}\sum^{\infty}_{m \neq n} \widetilde{u_m i_n}\mathrm{d}t.$$

Cu relaţiile (47.25) şi (47.26) se obţine *expresia puterii active* în regim nesinusoidal:

$$\boxed{P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos\varphi_n}\,. \qquad (47.45)$$

Puterea activă în regim nesinusoidal este suma dintre produsul termenilor constanți (puterea de curent continuu) și suma puterilor active corespunzătoare fiecărei armonici în parte.

Prin simetrie se poate defini *puterea reactivă* în regim nesinusoidal:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin\varphi_n. \tag{47.46}$$

Pentru o rețea electrică izolată, în regim periodic nesinusoidal, atît suma puterilor active (47.45) cît și suma puterilor reactive (47.46) sînt nule, dacă se calculează aceste puteri pentru toate laturile rețelei cu $u(t)$ și $i(t)$ după convenția de la receptoare.

Puterea aparentă în regim nesinusoidal se poate defini[1] în același mod ca în regim sinusoidal, prin produsul valorilor efective ale tensiunii și curentului:

$$S = UI. \tag{47.47}$$

Se observă că, spre deosebire de regimul sinusoidal, în regimul nesinusoidal

$$S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

C. Budeanu, pornind de la definirea puterii reactive prin relația (47.46), a introdus o nouă putere, specifică regimului nesinusoidal, numită *putere deformantă*, definită de relația:

$$D^2 = S^2 - (P^2 + Q^2). \tag{47.48}$$

Rezultă expresia puterii deformante:

$$D = \sqrt{\sum_{m<p}^{\infty}\sum^{\infty} U_m^2 I_p^2 + U_p^2 I_m^2 - 2U_m U_p I_m I_p \cos(\varphi_m - \varphi_p)}. \tag{47.49}$$

Unitățile de măsură pentru puterea activă, reactivă și aparentă sînt acelea utilizate în regim sinusoidal. Pentru puterea deformantă s-a propus unitatea *vad*.

Observație: Puterea activă definită prin expresia (47.44) poate fi măsurată prin orice wattmetru electrodinamic. Puterea reactivă definită prin relația (47.46) nu poate fi măsurată cu ajutorul aparatelor de măsură cunoscute actual[2]. În mod similar, puterea deformantă poate fi determinată numai prin calcul.

Factorul de putere în regim nesinusoidal este definit de relația:

$$0 \leqslant k = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}} \leqslant 1. \tag{47.50}$$

[1] Se folosesc și alte definiții pentru puterea reactivă și cea aparentă. În cele ce urmează utilizăm teoria puterilor în regim deformant, dezvoltată de C. Budeanu.

[2] Cu ajutorul unui varmetru electrodinamic se poate măsura cu o aproximație suficientă expresia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} U_n I_n \sin\varphi_n.$$

Acest factor e subunitar, chiar atunci cînd $Q = 0$, deoarece în regim nesinusoidal, în general, $D \neq 0$.

Factorul de putere e egal cu unitatea numai în cazul particular în care sînt satisfăcute condițiile :

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \ldots = \frac{U_n}{I_n} = \ldots$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \ldots = 0, \qquad (47.51)$$

deoarece $D = 0$ și $Q = 0$.

48. REGIMUL PERMANENT NESINUSOIDAL AL REȚELELOR LINIARE

În rețele electrice liniare, regimul permanent nesinusoidal se poate stabili numai dacă diferitele tensiuni electromotoare au frecvențe diferite sau sînt nesinusoidale. Dar la aceste rețele e valabilă teorema superpoziției și se poate folosi metoda suprapunerii efectelor. Dacă rețeaua e alimentată cu generatoare avînd tensiuni electromotoare nesinusoidale, regimul permanent al rețelei se poate determina suprapunînd în fiecare latură curenții pe care i-ar produce fiecare dintre armonicele de un același ordin ale tuturor tensiunilor.

O rețea liniară se studiază deci pe fiecare armonică în parte. Pentru acest studiu se pot folosi oricare dintre metodele de la regimul permanent sinusoidal, inclusiv reprezentarea în complex, cu observația că frecvența este nf, iar pulsația $n\omega$. Reactanțele tuturor condensatoarelor vor fi de n ori mai mici pentru armonicele de ordinul n decît pentru fundamentală, dar reactanțele tuturor bobinelor vor fi de n ori mai mari.

Trebuie subliniat că *pentru mărimile periodice rezultante nu se poate folosi reprezentarea în complex* (47.21), deoarece regula derivării (înmulțirea cu $j\omega$) și a integrării (împărțirea cu $j\omega$) nu mai rămîn valabile.

48.1. Elemente de circuit în regim nesinusoidal

Considerăm succesiv elementele ideale de circuit în ipoteza că li se aplică o tensiune la borne periodică, alternativă, cu dezvoltarea în serie

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = \sum U_n \sqrt{2} \sin (n\omega t + \beta_n) \qquad (48.1)$$

(calculul curentului continuu produs de o componentă continuă a tensiunii este banal și nu luăm în considerare astfel de componente) și determinăm în fiecare caz expresia curentului.

48.1.1. **Rezistorul ideal** (fig. 48.1, *a*). Deoarece în acest caz $u = ri$, rezultă :

$$i = \frac{u}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\,\frac{U_n}{r}\sin(n\,\omega t + \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\,I_n \sin(n\,\omega t + \gamma_n) \qquad (48.2)$$

cu

$$\varphi_n = \gamma_n - \beta_n = 0 \text{ şi } I_n = \frac{U_n}{r}. \qquad (48.3)$$

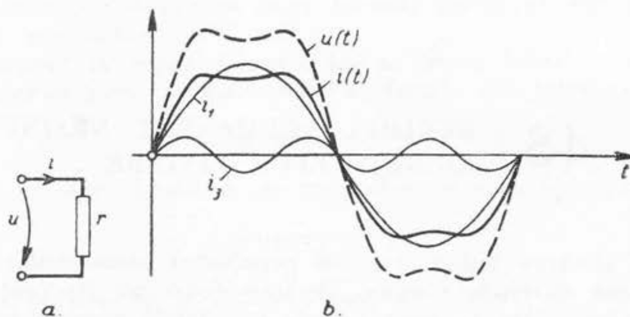


Fig. 48.1

O rezistenţă nu modifică forma curentului faţă de aceea a tensiunii (fig. 48.1, *b*). Factorul de distorsiune al curentului este egal cu cel al tensiunii :

$$k_{di} = \frac{I_d}{I} = \frac{\dfrac{U_d}{r}}{\dfrac{U}{r}} = \frac{U_d}{U} = k_{du}.$$

Puterea activă rezultă :

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos\varphi_n = r\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2 = rI^2. \qquad (48.4)$$

Conform relaţiei (47.46) şi (47.48), puterile reactivă şi deformantă sînt nule.

48.1.2. **Bobină ideală** (fig. 48.2, *a*). Deoarece $u = L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, rezultă :

$$i = \frac{1}{L}\int u\,\mathrm{d}t = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int \sqrt{2}\,U_n \sin(n\,\omega\,t + \beta_n)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\,\frac{U_n}{n\,\omega L}\sin\left(n\,\omega\,t + \beta_n - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\,I_n \sin(n\,\omega\,t + \gamma_n) \qquad (48.5)$$

cu

$$\varphi_n = \beta_n - \gamma_n = \frac{\pi}{2}; \quad Z_n = \frac{U_n}{I_n} = n\,\omega\,L; \quad I_n = \frac{U_n}{n\,\omega\,L}. \tag{48.6}$$

O inductivitate reduce deformarea curentului față de aceea a tensiunii (fig. 48.2, *b*) deoarece prezintă o impedanță proporțională cu ordinul ar-

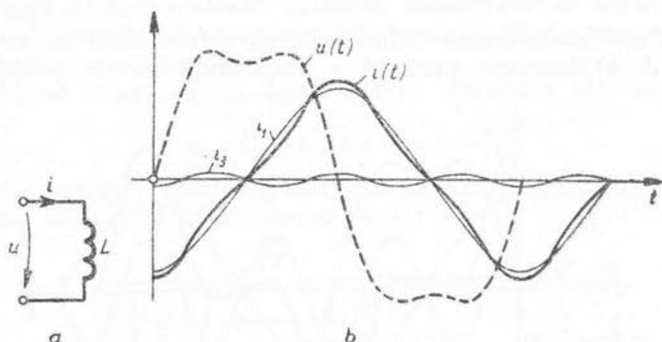


Fig. 48.2

monicii. Într-adevăr, calculînd factorii de distorsiune a curentului, respectiv tensiunii, se obțin expresiile :

$$k_{di} = \frac{I_d}{I}\frac{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{U_n}{n\,\omega\,L}\right)^2}}{\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{U_n}{n\,\omega\,L}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{U_n}{n}\right)^2}}{\sqrt{U_1^2 + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{U_n}{n}\right)^2}}, \tag{48.7}$$

iar

$$k_{du} = \frac{U_d}{U}\frac{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{\infty} U_n^2}}{\sqrt{U^2 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} U_n^2}} > k_{di}\,, \tag{48.8}$$

Puterea activă conform relației (47.45) e nulă, iar puterea reactivă rezultă :

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\omega\,L\,I_n^2. \tag{48.9}$$

Puterea deformantă, calculată cu relațiile (47.48) sau (47.49) e diferită de zero.

49.1.3. **Condensatorul ideal** (fig. 48.3, *a*). Deoarece

$$u = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t,$$

rezultă :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\,\omega nCU_n \sin\left(n\omega t + \beta_n + \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\,I_n \sin(n\omega t + \gamma_n) \quad (48.10)$$

cu

$$\varphi_n = \beta_n - \gamma_n = -\frac{\pi}{2}; \quad Z_n = \frac{U_n}{I_n} = \frac{1}{n\omega C}; \quad I_n = nC\omega U_n. \quad (48.11)$$

O capacitate accentuează deformarea curentului față de aceea a tensiunii (fig. 48.3, *b*) deoarece prezintă o impedanță invers proporțională cu

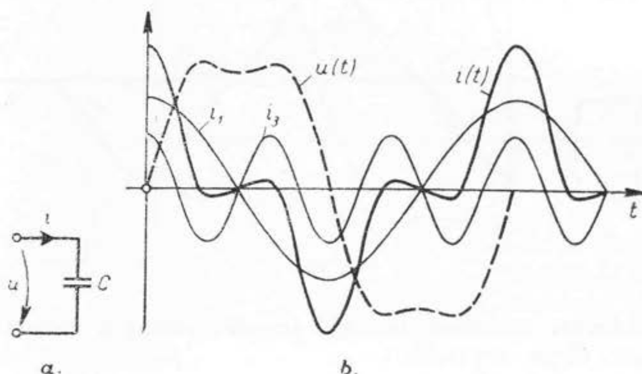


Fig. 48.3

ordinul armonicii. Într-adevăr, calculînd factorii de distorsiune ai curentului, respectiv ai tensiunii, se obține:

$$k_{di} = \frac{I_d}{I} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}(nC\omega U_n)^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(nC\omega U_n)^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}(n\,U_n)^2}}{\sqrt{U_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(nU_n)^2}}, \quad (48\cdot12)$$

iar

$$k_{du} = \frac{U_d}{U} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}U_n^2}}{\sqrt{U_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty}U_n^2}} < k_{di}. \quad (48\cdot13)$$

Puterea activă conform relației (47.45) e nulă, iar puterea reactivă rezultă :

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty}(-U_nI_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(-U_n^2 n\omega C). \quad (48\cdot14)$$

Puterea deformantă, calculată cu relațiile (47.48) sau (47.49) e diferită de zero.

48.2. Circuite liniare sub tensiune nesinusoidală la borne

48.2.1. **Circuitul r, L, C serie sub tensiune la borne nesinusoidală.** Calculul curentului în regim permanent se efectuează prin aplicarea teoremei superpoziției, valabilă din cauza linearității ecuației circuitului: *fiecare armonică de curent în parte se calculează ca și cum ar acționa numai armonica de același ordin a tensiunii la borne, independent de celelalte.*

Valoarea instantanee a curentului rezultat va fi suma armonicelor de curent calculate pe această cale.

Considerînd tensiunea la borne (48·1), armonica de ordinul n este:

$$u_n = \sqrt{2}\, U_n \sin(n\omega t + \beta_n). \tag{48.15}$$

În acord cu teoria circuitului de regim permanent sinusoidal (v. par. 33.2) armonica de ordinul n a curentului va fi:

$$i_n = \frac{U_n\sqrt{2}}{\sqrt{r^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}} \sin(n\omega t + \beta_n - \varphi_n), \tag{48.16}$$

deoarece impedanța $Z(n\omega) = Z_n$ și defazajul $\varphi(n\omega) = \varphi_n$ la pulsația $n\omega$ sînt date de relațiile:

$$Z_n = \sqrt{r^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}; \qquad \operatorname{tg}\varphi_n = \frac{n\omega L - \frac{1}{n\omega C}}{r}. \tag{48.17}$$

Valoarea efectivă a armonicii n a curentului este:

$$I_n = \frac{U_n}{\sqrt{r^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}}. \tag{48.18}$$

Expresia instantanee a curentului produs de toate armonicele de tensiune va fi:

$$\begin{aligned} i &= \sum_{n=1}^{\infty} i_n = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sqrt{2} \sin(n\omega t + \gamma_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{Z_n}\sqrt{2}\sin(n\omega t + \beta_n - \varphi_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n\sqrt{2}}{\sqrt{r^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}} \sin\left(n\omega t + \beta_n - \operatorname{arc\,tg}\frac{n\omega L - \frac{1}{n\omega C}}{r}\right). \end{aligned} \tag{48.19}$$

48.2.2. **Rezonanța în regim nesinusoidal.** În cazul circuitului precedent dacă pentru o armonică oarecare de ordinul k este îndeplinită condiția:

$$k\omega L = \frac{1}{k\omega C} \quad \text{sau} \quad k^2 = \frac{1}{\omega^2 LC}, \tag{48.20}$$



impedanța circuitului pentru această armonică are valoarea minimă, $Z_k = r$, iar curentul respectiv are amplitudinea maximă.

Se observă că în condițiile rezonanței pe armonica de ordinul k, pentru armonica $m = k^2$, valoarea absolută a reactanței este identică cu aceea a reactanței pentru fundamentală:

$$|X_m| = \left| k^2 \omega L - \frac{1}{k^2 \omega C} \right| = \left| \frac{1}{\omega C} - \omega L \right| = |X_1|.$$

Pentru orice armonică $m > k^2$, valoarea absolută a reactanței este mai mare și pentru orice armonică $m < k^2$, valoarea absolută a reactanței e mai mică decît aceea pentru fundamentală. Prin urmare, armonicele de ordinul $m < k^2$ au o pondere mai mare în expresia curentului decît în a tensiunii.

Aplicații tehnice ale fenomenului de rezonanță consistă fie în selectarea unor componente dorite (de ex. circuitele acordate din aparatele de radio), fie în reducerea la minimum a unor armonice supărătoare.

48.2.3. **Aplicație** [1]. Un observator examinează funcționarea a două circuite:

a) primul e format dintr-o bobină fără fier, cu rezistența $r = 64\ \Omega$ și reactanța $X = 48\ \Omega$, căreia i se aplică o tensiune sinusoidală de valoare efectivă $U = 400$ V, $f = 50$ Hz;

b) al doilea e format dintr-o rezistență $r' = 100\ \Omega$ în paralel cu un condensator de $C' = 20{,}89\ \mu$F, conectat la o sursă de tensiune nesinusoidală

$$u' = \frac{400}{\sqrt{1{,}04}} \sqrt{2} \sin \omega t + \frac{80}{\sqrt{1{,}04}} \sqrt{2} \sin 3\, \omega t.$$

Să se determine analogiile și diferențele constatate între circuite în ceea ce privește: valorile efective ale tensiunii și curentului; puterea aparentă, puterea activă, factorul de putere, puterea reactivă și puterea deformantă.

Soluție: Se obțin rezultate identice pentru:

— valoarea efectivă a tensiunii

$$(a)\ U = 400 \text{ V}; \qquad (b)\ U' = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = 400 \text{ V}$$

— valoarea efectivă a curentului total

$$(a)\, I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + X^2}} = 5 \text{ A}; \qquad (b)\ I' = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 5 \text{ A},$$

unde:

$$I_1 = U_1 \sqrt{\frac{1}{r'^2} + (\omega C')^2}$$

$$I_3 = U_3 \sqrt{\frac{1}{r'^2} + (3\, \omega C')^2}$$

— puterea aparentă

$$(a)\ S = UI = 400 \cdot 5 = 2\,000 \text{ VA}; \qquad (b)\ S' = U'I' = 400 \cdot 5 = 2\,000 \text{ VA}$$

[1] După C. Budeanu: „Metode de calcul în regim de curenți nesinusoidali", 1955.

— puterea activă

$$(a)\ P = RI^2 = 64 \cdot 5^2 = 1\,600\ \text{W}; \qquad (b)\ P' = R'\left(\left(\frac{U_1}{R'}\right)^2 + \left(\frac{U_3}{R'}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{U'^2}{R'} = \frac{400^2}{100} = 1\,600\ \text{W}$$

— factorul de putere

$$(a)\quad k = \frac{P}{S} = \frac{1\,600}{2\,000} = 0{,}8; \qquad (b)\quad k' = \frac{P'}{S'} = \frac{1\,600}{2\,000} = 0{,}8.$$

Se obțin rezultate diferite pentru:

— puterea reactivă

$$(a)\qquad Q = XI^2 = 48 \cdot 5^2 = 1\,200\ \text{var}$$

$$(b)\qquad Q' = -C\,\omega\,U_1^2 - 3\,\omega\,CU_3^2 = -1130{,}23\ \text{var}$$

— puterea deformantă

$$(a)\qquad D = 0$$

$$(b)\qquad D = U_1I_3 - U_3I_1 = -403{,}66\ \text{vad}.$$

Concluzii: Pentru circuitul (*a*), factorul de putere poate fi compensat total prin montarea unui condensator. Pentru circuitul (*b*), factorul de putere poate fi îmbunătățit prin montarea unei bobine (care să consume puterea reactivă 1130,23 var), dar compensarea nu poate fi completă, deoarece $D \neq 0$.

48.3. Influența armonicelor de tensiune în circuitele trifazate

Un sistem trifazat simetric direct de tensiuni nesinusoidale e un sistem de tensiuni periodice $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, astfel că fiecare provine din precedenta prin întîrziere cu o treime de perioadă

$$\left.\begin{aligned} u_2(t) &= u_1\left(t - \frac{T}{3}\right), \\ u_3(t) &= u_1\left(t - \frac{2T}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{48.21}$$

Pentru dezvoltările în serie ale tensiunilor sistemului rezultă:

$$\left.\begin{aligned} u_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\,U_n \sin(n\,\omega\,t + \beta_n) \\ u_2(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\,U_n \sin\left(n\,\omega\,t + \beta_n - n\,\frac{2\pi}{3}\right) \\ u_3(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\,U_n \sin\left(n\,\omega\,t + \beta_n - n\,\frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{48.22}$$

Din analiza acestor expresii rezultă următoarele proprietăţi :

— armonicele de ordinul $n = 3k$ (multiplu de 3) sînt în fază, adică formează sisteme omopolare ($n = 3, 6, 9,...$).;

— armonicele de ordinul $n = 3k + 1$ formează sisteme directe ($n = 1, 4, 7, 10,...$); în particular, fundamentalele ($n = 1$) formează un sistem trifazat simetric direct;

— armonicele de ordinul $n = 3k + 2$ formează sisteme inverse ($n = 2, 5, 8, 11, ...$).

În funcţie de conexiunea sistemului trifazat apar diverse efecte ale armonicelor.

La conexiunea în triunghi a înfăşurărilor generatoarelor sau transformatoarelor există un curent intern de circulaţie cu armonici de ordinul 3, chiar la funcţionarea în gol, datorită armonicelor de ordinul 3 k ale tensiunilor care sînt în fază. Drept consecinţă tensiunile la bornele înfăşurărilor (tensiunile de linie) nu mai conţin armonicele 3 k (deci, nici curenţii de linie produşi în sarcini liniare de aceste tensiuni), deoarece prin simetria înfăşurărilor t.e.m. de ordinul 3 k acoperă integral căderile de tensiune, datorită curenţilor de circulaţie de ordinul 3 k din înfăşurări.

La conexiunea în stea, tensiunile de linie care sînt fiecare diferenţa a două tensiuni de fază,

$$u_{12} = u_1 - u_2;\; u_{23} = u_2 - u_3;\; u_{31} = u_3 - u_1 \tag{48.23}$$

nu conţin armonice de ordin 3 k care sînt în fază.

Consecinţele regimului nesinusoidal în circuite trifazate sînt :

a) În cazul conexiunilor, triunghi sau stea la generatoare sau transformatoare, tensiunile de linie la bornele înfăşurărilor nu conţin armonice de ordinul 3 k.

b) La conexiunea în stea sînt influenţaţi curentul în conductorul neutru şi tensiunea între punctele neutre ale generatorului şi receptorului.

În cazul unui circuit receptor echilibrat, curentul din conductorul neutru va conţine numai armonice de ordinul 3 k (pentru fiecare armonică de acest ordin curentul va fi de trei ori curentul de fază). Dacă nu există conductor neutru, tensiunea între punctele neutre conţine numai armonice de ordin 3 k. Această tensiune poate atinge valori periculoase.

c) La conexiunea în stea se observă că raportul valorilor efective ale tensiunilor de linie şi fază este $\frac{U_l}{U_f} < \sqrt{3}$ (din cauza lipsei armonicelor 3 k din tensiunea de linie şi a raportului $\sqrt{3}$ între valorile efective ale oricăror alte armonici ale tensiunilor de linie şi fază). Din motive analoge, la conexiunea în triunghi $\frac{I_l}{I_f} < \sqrt{3}$.

49. CIRCUITE NELINIARE ÎN REGIM PERIODIC PERMANENT

49.1. Teoremele lui Kirchhoff şi conservarea puterilor la circuite cu elemente dipolare neliniare

49.1.1. **Ecuaţiile generale în valori instantanee.** Aşa cum am menţionat în paragraful 36.1, formele generale (36.5), (36.6), (36.8) ale teoremelor lui Kirchhoff sînt valabile şi pentru circuitele cu elemente neliniare, *deoarece la stabilirea acestor forme nu s-au utilizat legi de material valabile numai pentru elemente de circuit liniare.* Pentru fiecare nod (b) şi pentru fiecare

ochi (p) al unei rețele cu elemente dipolare neliniare se pot deci scrie ecuațiile

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{k\in(b)} i_k = 0 \\ &\sum_{m\in(p)} u_{b_m} = 0\end{aligned}}\,, \qquad \begin{aligned}(49{\cdot}1)\\(49{\cdot}2)\end{aligned}$$

în care $i_k(k = 1,2, ..., L)$ sînt curenții din laturile rețelei, iar $u_{b_m}(m = 1,2,...$ $..., L)$ sînt tensiunile la bornele acestor laturi. Ecuațiile de mai sus trebuie completate cu relațiile — acum, în general, neliniare — care leagă tensiunile la borne de curenți, derivatele lor, integralele lor etc :

$$u_{b_m} = u_{b_m}\left(... i_s ... ;... \frac{di_s}{dt} ... ;... \frac{d^2 i_s}{dt^2} ... ; ... ; ... \int i_s \, dt ... ; ...\right), \tag{49.3}$$

cu $s = 1,2, ..., L$.

În cazurile mai simple, laturile sînt constituite din rezistoare, condensatoare, bobine și generatoare conectate în serie, astfel că în locul ecuațiilor (49.2) se pot utiliza relațiile (36.8), adică :

$$\sum_{m\in(p)}^{\infty} e_m = \sum_{m\in(p)} \left[u_{R_m} + u_{C_m} + \frac{d\Phi_m}{dt}\right]. \tag{49.4}$$

Sistemul de ecuații (49.1), (49.4) se completează atunci cu *caracteristicile elementelor de circuit* dipolare :

— *caracteristica tensiune-curent* pentru rezistoare neliniare (v. cap. 14, vol. I) :

$$u_{R_m} = u_{R_m}(i_m) \tag{49.5}$$

— *caracteristica tensiune-sarcină* pentru condensatoare neliniare :

$$u_{C_m} = u_{C_m}(q_m) \tag{49.6}$$

cu

$$i_m = \frac{dq_m}{dt}. \tag{49.6'}$$

— *caracteristica flux-curenți* pentru bobine neliniare (cu miez de fier)

$$\Phi_m = \Phi_m(i_1, i_2, ..., i_m, ..., i_L), \tag{49.7}$$

care în lipsa cuplajelor magnetice are forma mai simplă :

$$\Phi_m = \Phi_m(i_m). \tag{49.7'}$$

Rezolvarea ecuațiilor de mai sus, în cazul general al regimului tranzitoriu, constituie o problemă dificilă, pentru care nu există metode generale și care face obiectul unor studii

matematice şi tehnice foarte dezvoltate. Pentru diferite grupuri particulare de probleme s-au elaborat metode analitice sau grafice, în general metode aproximative. Există, de asemenea, o teorie specială a analizei calitative a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale neliniare, din care fac parte şi ecuaţiile de mai sus. Trebuie să se sublinieze că principalele proprietăţi ale circuitelor electrice liniare *nu rămîn valabile* pentru circuitele neliniare: soluţia de regim tranzitoriu a ecuaţiilor nu se poate descompune totdeauna într-un regim liber şi unul forţat (în particular, regimul „liber" poate fi un regim permanent — cazul oscilatoarelor); teorema superpoziţiei nu se aplică; soluţiile de regim permanent nu sînt unice; există *soluţii nestabile* ale ecuaţiilor — adică stări sau regimuri de funcţionare ale circuitelor, pentru care abateri oricît de mici determină trecerea în alte stări sau regimuri stabile etc.

Întreaga teorie a circuitelor electronice (cu tuburi electronice şi dispozitive semiconductoare), a traductoarelor, a amplificatoarelor magnetice etc., cu problemele aferente de amplificare, detecţie, modulaţie, stabilitate, oscilaţii, este o teorie a circuitelor electrice şi magnetice neliniare, ale cărei ramuri fac obiectul disciplinelor de specialitate şi depăşesc cadrul prezentului curs.

49.1.2. **Ecuaţiile pentru regim periodic nesinusoidal.** În regim periodic nesinusoidal, fiecare dintre mărimile $i_k, u_{b_m}, e_m, u_{R_m}, u_{C_m}, \Phi_m$ este o funcţiune periodică de timp de perioadă $T = 2\pi/\omega$, care poate fi dezvoltată în serie trigonometrică. De exemplu:

$$i_k(t) = I_k^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} i_k^{(\nu)}(t) = I_k^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} I_k^{(\nu)} \sqrt{2} \sin(\nu\omega t + \gamma_k^{(\nu)}), \qquad (49.8)$$

$$u_{b_m}(t) = U_{b_m}^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} u_{b_m}^{(\nu)}(t) = U_{b_m}^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} U_{b_m}^{(\nu)} \sqrt{2} \sin(\nu\omega t + \beta_m^{(\nu)}). \qquad (49.9)$$

În aceste relaţii am notat cu $\nu = 1, 2, \ldots \infty$ ordinul armonicelor şi l-am pus ca indice superior, între paranteze, pentru a nu fi confundat cu indicii laturilor. Înlocuind aceste expresii în ecuaţiile (49.1), (49.2) şi intervertind ordinea de sumare (adică grupînd termenii de aceeaşi frecvenţă împreună), se obţin expresii de forma:

$$\sum_{k\in(b)} I_k^{(0)} + \sum_{k\in(b)} i_k^{(1)}(t) + \sum_{k\in(b)} i_k^{(2)}(t) + \ldots + \sum_{k\in(b)} i_k^{(\nu)}(t) + \ldots \equiv 0. \qquad (49.10)$$

Fiecare sumă în k din această expresie e o sumă de mărimi sinusoidale de aceeaşi frecvenţă (sau constante — primul termen), care prin adunare dau o mărime rezultantă tot sinusoidală şi de aceeaşi frecvenţă (v. par. 33.1.3, *a*). Întreaga expresie nu reprezintă altceva decît o serie trigonometrică, fiecare sumă în k fiind o armonică. Dar această serie trigonometrică are suma identic nulă, deoarece egalitatea exprimată de prima teoremă a lui Kirchhoff e valabilă în orice moment t. Aşa cum se ştie (v. şi par. 47.1.1), o serie trigonometrică nu poate fi identic nulă decît dacă fiecare armonică în parte e identic nulă. Din relaţia (49.10) rezultă deci, în mod necesar,

$$\sum_{k\in(b)} I_k^{(0)} = 0; \quad \sum_{k\in(b)} i_k^{(1)}(t) = 0, \ldots; \sum_{k\in(b)} i_k^{(\nu)}(t) = 0; \ldots . \qquad (49.11)$$

Suma armonicelor de aceeaşi frecvenţă a curenţilor laturilor care se întîlnesc într-un nod este deci nulă.

În mod analog se demonstrează această proprietate pentru relația (49.2), respectiv (49.4). Se ajunge astfel la următoarea concluzie generală:

În regim periodic nesinusoidal, teoremele lui Kirchhoff se pot exprima sub formele generale (49.1), (49.2), (49.4), *pentru fiecare armonică* ν *în parte*[1]

$$\sum_{k \in (b)} i_k^{(\nu)}(t) = 0 \tag{49.12}$$

$$\sum_{m \in (p)} u_{b_m}^{(\nu)}(t) = 0 \tag{49.13}$$

$$\sum_{m \in (p)} e_m^{(\nu)} = \sum_{m \in (p)} \left(u_{R_m}^{(\nu)} + u_m^{(\nu)} + \frac{\mathrm{d}\Phi_m^{(\nu)}}{\mathrm{d}t} \right). \tag{49.14}$$

Aceste ecuații fiind scrise numai cu mărimi sinusoidale (de frecvența $\nu\omega$), pot fi reprezentate în complex. Ele nu sînt însă suficiente pentru rezolvarea problemelor, deoarece cuprind ca necunoscute nu numai armonicele de ordinul ν ale curenților, ci și armonicele de ordinul ν ale căderilor de tensiune și ale fluxurilor, care depind neliniar de curenți. Ceea ce constituie însă un inconvenient foarte mare este faptul că aceste armonici de tensiune etc. de ordinul ν *depind neliniar de armonicele de toate ordinele ale curenților*. Aceste dependențe complicate se obțin înlocuind în relațiile (49.5), (49.6) și (49,7) mărimile instantanee prin dezvoltările lor în serie trigonometrică și identificînd în egalitățile obținute termenii de același ordin. De aceea, mărimile din sistemele de ecuații (49.12), (49.13), (49.14), scrise pentru diferitele ordine de armonici, sînt toate legate între ele prin caracteristicile elementelor neliniare: (49.5), (49.6) și (49.7).

49.1.3. **Conservarea puterilor în regimul periodic nesinusoidal al rețelelor neliniare.** Ecuațiile pentru armonicele de ordinul ν (49.12), (49.13) sînt de aceeași formă cu ecuațiile generale (36.5) și (36.6) ale rețelelor. În capitolul 37 au fost demonstrate, pe baza acestor ultime relații și fără a utiliza legi de material, teoremele de conservare a puterilor instantanee (37.15), active (37.58) și reactive (37.60) pentru rețele electrice izolate. Identitatea de formă a relațiilor de plecare ne asigură — fără a mai fi necesară efectuarea demonstrației — că și relațiile finale vor avea aceeași formă. De aceea se poate demonstra și formula — pentru o rețea izolată — pe fiecare armonică (ν) în parte,

— conservarea puterilor instantanee de ordinul ν

$$\sum_{m=1}^{L} p_m^{(\nu)} = \sum_{m=1}^{L} u_{b_m}^{(\nu)} i_m^{(\nu)} = 0 \tag{49.15}$$

— conservarea puterilor active de ordinul ν

$$\sum_{m=1}^{L} P_m^{(\nu)} = \sum_{m=1}^{L} U_{b_m}^{(\nu)} I_m^{(\nu)} \cos(\beta_m^{(\nu)} - \gamma_m^{(\nu)}) \tag{49.16}$$

— conservarea puterilor reactive de ordinul ν

$$\sum_{m=1}^{L} Q_m^{(\nu)} = \sum_{m=1}^{L} U_{b_m}^{(\nu)} I_m^{(\nu)} \sin(\beta_m^{(\nu)} - \gamma_m^{(\nu)}). \tag{49.17}$$

[1] Cazul $\nu = 0$ corespunde formal componentelor continue.

49.2. Redresorul ideal

Se consideră circuitul din figura 49.1,*a*, cuprinzînd o sursă ideală de t.e.m. sinusoidală, luată origine de fază

$$e = E\sqrt{2}\sin \omega t \qquad (49.18)$$

(deci $E_0 = 0$, $E^{(\nu)} = 0$ cu $\nu \neq 1$), un *redresor ideal* (*r*) şi o sarcină rezistivă liniară de rezistenţă *R*. Redresorul ideal are caracteristica (1) din figura 49.1,*b*, prezentînd o rezistenţă nulă pentru un curent avînd sensul de conducţie (sensul direct) — şi o rezistenţă infinită pentru un curent avînd sensul invers,

$$\begin{matrix} r = 0, & i > 0, & u_r = 0 \\ r = \infty & i = 0, & u_r < 0 \end{matrix} \qquad (49.19)$$

(un redresor real — curba (2) din figura 49.1, *b*, prezintă o rezistenţă foarte mare în sens direct şi una foarte mică în sens invers). Deoarece un generator ideal produce la borne o tensiune $u_b = e$ (egală cu tensiunea lui electromotoare), ecuaţia (49.2) a căderilor de tensiune se scrie, în acest caz,

$$-u_b + u_r + u_R = 0$$

sau

$$e = u_r + u_R = u_r + R\,i. \qquad (49.20)$$

Ţinînd seama de caracteristica (49.19) a redresorului şi de expresia (49.18), rezultă curentul (v. fig. 49.2):

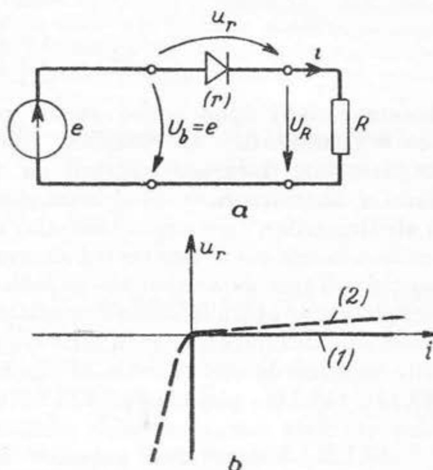


Fig. 49.1

$$i(t) = \begin{cases} I_{max}\sin \omega t = \dfrac{E\sqrt{2}}{R}\sin \omega t & [2m\pi \leqslant t \leqslant (2m+1)\pi] \\ 0 & [(2m+1)\pi \leqslant t \leqslant (2m+2)\pi] \end{cases} \qquad (49.21)$$

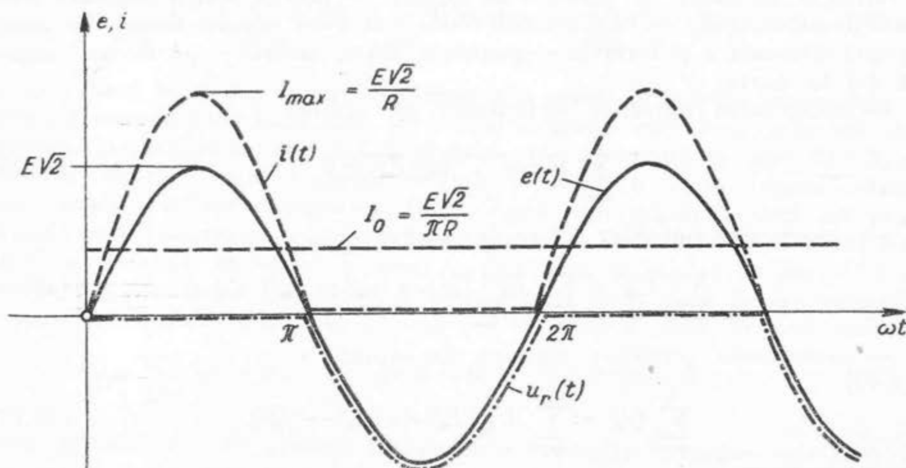


Fig. 49.2

cu $m = 0, 1, 2, \ldots$ Tensiunea la bornele redresorului rezultă

$$u_r = e - Ri = \begin{cases} 0 & [2m\pi \leqslant t \leqslant (2m+1)\pi] \\ e = E\sqrt{2}\sin\omega t & [(2m+1)\pi \leqslant t \leqslant (2m+2)\pi]. \end{cases} \tag{49.22}$$

Se observă că redresorului — în intervalele de timp în care nu conduce — i se aplică o tensiune inversă maximă, egală cu amplitudinea t.e.m. a generatorului.

Funcțiunile pulsatorii (nesinusoidale) $i(t)$ și $u_r(t)$ se pot dezvolta în serie trigonometrică (v. aplicațiile de la par. 47.3.4).

Se obține:

$$i(t) = \frac{E\sqrt{2}}{\pi R} + \frac{E\sqrt{2}}{2R}\sin\omega t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2E\sqrt{2}}{\pi R(4k^2-1)}\sin\left(2k\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \tag{49.23}$$

$$= I^{(0)} + I^{(1)}\sqrt{2}\sin\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} I^{(2k)}\sqrt{2}\sin(2k\omega t + \gamma^{(2k)}) \tag{49.23'}$$

$$u_r(t) = -\frac{E\sqrt{2}}{\pi} + \frac{E\sqrt{2}}{2}\sin\omega t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2E\sqrt{2}}{\pi(4k^2-1)}\sin\left(2k\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \tag{49.24}$$

$$= U_r^{(0)} + U_r^{(1)}\sqrt{2}\sin\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} U_r^{(2k)}\sqrt{2}\sin\left(2k\omega t + \beta^{(2k)}\right). \tag{49.24'}$$

Se observă că intensitatea are o componentă continuă $I^{(0)} = E\sqrt{2}/\pi R$, o fundamentală $i_1 = \frac{E\sqrt{2}}{2R}\sin\omega t$ (egală cu jumătate din curentul pe care aceeași t.e.m. l-ar produce în aceeași rezistență, în lipsa redresorului ideal) și numai armonice pare (de ordinul 2, 4, 6,...).

Puterile active pe armonica (ν): $P_g^{(\nu)}$ produsă de generator), $P_r^{(\nu)}$ (primită de redresor) și $P_R^{(\nu)}$ (primită de sarcină) sînt calculate în tabela următoare:

	$P_g^{(\nu)} = E^{(\nu)}I^{(\nu)}\cos(\alpha^{(\nu)} - \gamma^{(\nu)})$	$P_r^{(\nu)} = U_r^{(\nu)}I^{(\nu)}\cos(\beta^{(\nu)} - \gamma^{(\nu)})$	$P_R^{(\nu)} = RI^{(\nu)2}$
$\nu = 0$	0	$-\frac{E^2 2}{\pi^2 R} < 0$	$\frac{E^2 2}{\pi^2 R} > 0$
$\nu = 1$	$\frac{E^2}{2R} > 0$	$\frac{E^2}{4R} > 0$	$\frac{E^2}{4R} > 0$
$\nu = 2k$	0	$-\frac{4E^2}{\pi^2 R(4k^2-1)^2} < 0$	$\frac{4E^2}{\pi^2 R(4k^2-1)^2} > 0$

Se observă că redresorul e receptor pe fundamentală și generator pe componenta continuă și pe armonici, adică e un transformator static de energie.

Se verifică pe fiecare armonică în parte conservarea puterilor active:

$$P_g^{(\nu)} = P_r^{(\nu)} + P_R^{(\nu)}. \tag{49.25}$$

De altă parte, deoarece redresorul e ideal, în el nu au loc pierderi de energie. Pentru aceasta trebuie ca

$$P_r^{(0)} + P_r^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} P_r^{(2k)} = 0, \text{ sau } \frac{E^2}{4R} = \frac{2E^2}{\pi^2 R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4E^2}{\pi^2 R\,(4k^2-1)^2},$$

sau

$$\frac{\pi^2}{16} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} + \frac{1}{2}, \tag{49.26}$$

relație care e cunoscută din teoria sumării seriilor numerice.

49.3. Teoremele lui Kirchhoff pentru mici componente variabile în jurul unui punct de funcționare staționar

49.3.1. Parametrii dinamici ai rețelei neliniare. Se numește *punct de funcționare staționar* al rețelei, sau stare de echilibru, un ansamblu de valori constante I_k^0, $U_{R_m}^0$, $U_{C_m}^0$, Q_m^0, Φ_m^0 $(m, k = 1,2, ..., L)$, care sînt soluții ale ecuațiilor (49.1), (49.4), cu (49.5), (49.6), (49.7), cînd t.e.m. ale generatoarelor au valorile constante E_m^0. Aceste valori satisfac deci ecuațiile:

$$\sum_{k\in(b)} I_k^0 = 0;\ \sum_{m\in(p)} E_m^0 = \sum_{m\in(p)} [U_{R_m}^0 + U_{C_m}^0] \tag{49.27}$$

$$U_{R_m} = u_{R_m}(I_m^0);\ U_{C_m}^0 = u_{C_m}(Q_m^0);\ \Phi_m^0 = \Phi_m(I_1^0, I_2^0, ... I_L^0). \tag{49.28}$$

În orice latură cu condensator în serie $I_m^0 = 0$ și $U_{C_m}^0 \neq 0$, iar în orice latură fără condensator $U_{C_m}^0 = 0$ și $I_m^0 \neq 0$ (v. 49.6'). Determinarea unui punct de funcționare staționar se poate face cu metodele expuse în vol. I. cap. 14 (și par. 26.5) pentru circuite de curent continuu.

Dacă se consideră acum că la t.e.m. constante E_m^0 se suprapun mici componente variabile Δe_m, adică dacă se consideră t.e.m.

$$e_m(t) = E_m^0 + \Delta e_m(t) \quad \text{cu } |\Delta e_m| \ll E_m^0, \tag{49.29}$$

curenții, tensiunile, sarcinile și fluxurile vor diferi puțin de valorile constante corespunzătoare punctului de funcționare staționar considerat (presupunînd caracteristicile neliniare 49.5, 49.6 și 49.7 suficient de netede):

$$i_k(t) = I_k^0 + \Delta i_k(t);\ u_{R_m}(t) = U_{R_m}^0 + \Delta u_{R_m}(t);\ u_{C_m}(t) = U_{C_m}^0 + \Delta u_{C_m}(t)$$
$$q_m(t) = Q_m^0 + \Delta q_m(t);\ \Phi_m(t) = \Phi_m^0 + \Delta\Phi_m(t). \tag{49.30}$$

Aici, $\Delta i_k(t)$, $\Delta u_{R_m}(t)$, $\Delta u_{C_m}(t)$, $\Delta q_m(t)$, $\Delta\Phi_m(t)$ sînt componente variabile mici (față de cele continue corespunzătoare), și anume atît de mici încît caracteristicile neliniare (49.5), (49.6), (49.7) să poată fi aproximate prin dezvol-

tările lor în serie în jurul punctului de funcționare staționar, cu reținerea numai a termenilor de gradul întîi. Cu (49.28) se obțin relațiile:

$$u_{R_m}(t) \approx u_{R_m}(I_m^0) + \left(\frac{du_{R_m}}{di_m}\right)_0 \Delta i_m(t) = U_{R_m}^0 + R_m^d \Delta i_m(t) \quad (49.31)$$

$$u_{C_m}(t) \approx u_{C_m}(Q_m^0) + \left(\frac{du_{C_m}}{dq_m}\right)_0 \Delta q_m(t) = U_{C_m}^0 + \frac{1}{C_m^d}\int \Delta i_m(t) \quad (49.32)$$

(Am folosit relația 49.6', știind că în laturile cu condensatoare în serie $I_m^0 = 0$ și $\Delta i_m = \frac{dq_m}{dt} = \frac{d(\Delta q_m)}{dt}$),

$$\Phi_m(t) \approx \Phi_m(I_1^0, I_2^0 \ldots I_L^0) + \sum_{s=1}^{L}\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial i_s}\right)_0 \Delta i_s(t) = \Phi_m^0 + \sum_{s=1}^{L} L_{ms}^d \Delta i_s(t). \quad (49.33)$$

Acestea sînt *caracteristicile liniarizate* ale elementelor de circuit neliniare și în ele apar *parametrii dinamici* de circuit (pentru mici componente variabile), și anume:

— *rezistența dinamică* a laturii m

$$R_m^d = R_m^d(I_m^0) = \left(\frac{du_{R_m}}{di_m}\right)_0 \gtrless 0 \quad (49.34)$$

— *capacitatea dinamică* a condensatorului în latura m

$$C_m^d = C_m^d(U_{C_m}^0) = \left(\frac{dq_m}{du_{C_m}}\right)_0 \gtrless 0 \quad (49.35)$$

— *inductivitatea proprie dinamică* a bobinei din latura m

$$L_m^d = L_m^d(I_1^0, I_2^0, \ldots, I_L^0) = \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial i_m}\right)_0 \gtrless 0 \quad (49.36)$$

— *inductivitatea mutuală dinamică* dintre bobina din latura s și bobina din latura m

$$L_{ms}^d = L_{ms}^d(I_1^0, I_2^0, \ldots, I_L^0) = \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial i_s}\right)_0 \gtrless 0 \quad (49.37)$$

(în general $L_{ms}^d \neq L_{sm}^d$ dacă se consideră și fenomenul de isteresis).

Acești parametri dinamici — definiți pentru un punct de funcționare staționar considerat (indicat mai sus prin indicele 0) — au următoarele proprietăți: coincid cu parametrii obișnuiți în cazul elementelor de circuit liniare; pot fi negativi pentru elemente de circuit neliniare; depind de valorile corespunzătoare punctului de funcționare ale curenților, tensiunilor etc. (inductivitățile depind de curenții din toate laturile cu care e cuplată bobina considerată). În limitele aproximațiilor (49.31), (49.32), (49.33), parametrii dinamici nu depind de valoarea micilor componente Δi_m, Δq_m la care se referă.

49.3.2. Ecuațiile lui Kirchhoff pentru mici componente variabile. Introducînd ecuațiile liniarizate (49.31), (49.32) și (49.33) și expresiile (49.29) și (49.30), în ecuațiile lui Kirchhoff, (49.1) și (49.4), și ținînd seama de (49.27), se obțin relațiile :

$$\sum_{k\in(b)} \Delta i_k = 0 \tag{49.38}$$

și

$$\sum_{m\in(p)} \Delta e_m = \sum_{m\in(p)} \left[R_m^d \Delta i_m + \frac{1}{C_m^d} \int \Delta i_m \, \mathrm{d}t + \sum_{s=1}^{L} L_{ms}^d \frac{\mathrm{d}(\Delta i_s)}{\mathrm{d}t} \right]. \tag{49.39}$$

Se observă că am obținut pentru micile componente variabile ale t.e.m. și curenților ecuații Kirchhoff liniare, în care elementele de circuit sînt caracterizate prin parametrii lor dinamici, cu valorile corespunzătoare punctului de funcționare considerat.

Aceste ecuații pot fi rezolvate cu metodele de la circuite liniare, în măsura în care aproximațiile (49.31), (49.32), (49.33) rămîn valabile. Se poate studia regimul tranzitoriu prin suprapunerea regimului liber cu cel forțat (impus de expresiile t.e.m. variabile Δe_m). Regimul forțat sinusoidal poate fi studiat cu reprezentare în complex, în care caz vor apare impedanțele complexe dinamice proprii

$$\underline{Z}_m^d = R_m^d + \mathrm{j}\left(\omega L_m^d - \frac{1}{\omega C_m^d} \right) \tag{49.40}$$

și mutuale

$$\underline{Z}_{ms}^d = \mathrm{j}\, \omega L_{ms}^d \tag{49.41}$$

ale laturilor. Cu toate aceste analogii, circuitele neliniare care funcționează cu mici componente variabile prezintă anumite deosebiri esențiale față de circuitele liniare, și anume :

a) Din cauza posibilității existenței unor parametri dinamici negativi (în special a unor rezistențe negative), regimul liber corespunzător acestor ecuații poate să nu fie amortizat, ci poate să fie monoton crescător în timp, în măsura în care aproximațiile (49.31), (49.32), (49.33), mai rămîn valabile. *În acest caz, punctul de funcționare considerat se zice nestabil.* Există numeroase metode și criterii care permit să se identifice stabilitatea sau nestabilitatea unui punct de funcționare, fără a rezolva neapărat ecuațiile.

b) În jurul punctelor de funcționare nestabile, rețeaua neliniară poate avea un regim liber permanent (de ex. sinusoidal), fără regim forțat, adică cu $\Delta e_m = 0$. În acest caz, rețeaua constituie un *oscilator*, care transformă energia primită de la sursele de curent continuu în energie de curent alternativ.

c) Teorema reciprocității nu e în general valabilă, deoarece inductivitățile mutuale dinamice pot să nu satisfacă relația $L_{ms}^d = L_{sm}^d$.

Observație: Ecuații liniarizate pentru mici componente variabile se pot scrie și pentru rețele cu elemente neliniare multipolare (de ex. tuburi electronice) cu proprietăți analoge.

49.4. Bobina cu miez de fier

Principalele elemente neliniare ale circuitelor de frecvență industrială sînt bobinele cu miez feromagnetic, respectiv înfășurările circuitelor magnetice ale transformatoarelor și mașinilor electrice. În aceste bobine, în afară de efectele deformante, determinate de neliniarități, au loc și pierderi de putere suplimentare (față de pierderile prin efect Joule-Lenz din conductoarele înfășurărilor — care mai sînt numite pierderi „în cupru"), localizate în miezul lor feromagnetic și numite pierderi în fier.

49.4.1. **Ciclul de magnetizare a unei bobine cu miez de fier.** Considerăm o bobină cu miez feromagnetic (fig. 49.3,*a*), avînd o înfășurare cu N spire, de rezistență totală r, la care se aplică tensiunea la borne $u(t)$. În regim

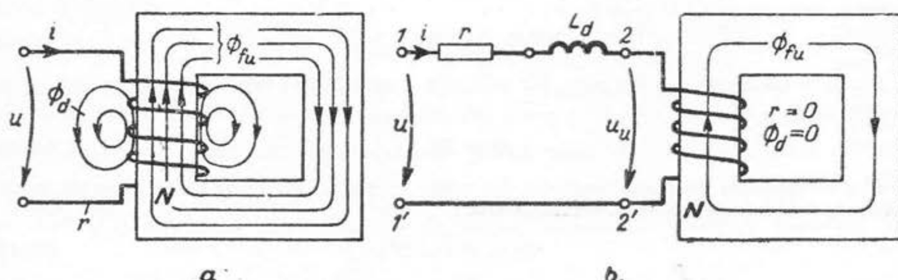


Fig. 49.3

periodic permanent, bobina absoarbe curentul $i(t)$. Fluxul magnetic fascicular $\Phi_f = \Phi_d + \Phi_{fu}$ produs de acest curent e suma dintre un flux fascicular util $\Phi_{fu} = \frac{1}{N}\Phi_u$, corespunzător liniilor de inducție magnetică, care se închid prin circuitul magnetic al bobinei și un flux fascicular de dispersiune (numit și „de scăpări") Φ_d, corespunzător liniilor de inducție magnetică care se închid în cea mai mare parte prin dielectric (aer). Calea de închidere a fluxului de dispersiune prezintă o reluctanță foarte mare (v. par. 26.1, vol. I) și practic constantă. De aceea, acest flux e proporțional cu curentul care îl produce și permite definirea unei inductivități de dispersiune L_d, de asemenea constantă :

$$N\Phi_d = L_d i \tag{49.42}$$

(se înmulțește cu N, pentru a obține fluxul de dispersiune al tuturor spirelor). Inductivitatea de dispersiune e de obicei mică și se poate calcula cu suficientă aproximație, dacă se cunoaște configurația geometrică exactă a înfășurării — sau se poate măsura. În cele ce urmează, o presupunem cunoscută, împreună cu rezistența r. Ținînd seama de expresia (49.42), fluxul total Φ al bobinei se poate scrie :

$$\Phi = N(\Phi_d + \Phi_{fu}) = L_d i + N\Phi_{fu} = L_d i + \Phi_u. \tag{49.43}$$

În această relație $\Phi_u = N\Phi_{fu}$ e *fluxul util* (din fier) *total*, care depinde neliniar de curentul de magnetizare i

$$\Phi_u = f(i). \tag{49.44}$$

Această relație reprezintă *caracteristica flux-curent* a bobinei (sau *caracteristica magnetică* a bobinei). În cele ce urmează ne vom referi numai la regimul periodic permanent, în care i și Φ sînt funcțiuni periodice de timp. Pentru o bobină fără miez de fier, caracteristica (49.44) este o dreaptă, a cărei pantă e inductivitatea utilă L_u a bobinei. Pentru o bobină cu miez de fier, în regim periodic, caracteristica (49.44) e o curbă închisă, numită și *ciclu de magnetizare* (curba $\Gamma_{\Phi i}$ din fig. 49.5).

Pentru a analiza factorii care determină această caracteristică, considerăm cazul simplificat al unei bobine cu circuit magnetic omogen, de secțiune A și lungime l. Fluxul util al bobinei e în acest caz

$$\Phi_u = NBA, \tag{49.45}$$

unde B e inducția magnetică din miez, iar solenația magnetizantă totală e, conform legii circuitului magnetic,

$$\Theta = Hl, \tag{49.46}$$

unde H e intensitatea cîmpului magnetic din miez. În regim staționar (adică, practic, numai la frecvențe foarte joase), această solenație este :

$$\Theta_i = N i = H l. \tag{49.47}$$

De aceea, în regim staționar, relația dintre Φ_u și i reprezintă, la o altă scară, relația dintre B și H (fig. 49.4), adică *ciclul de isteresis* al materialului magnetic (corespunzător valorii maxime considerate a inducției magnetice). Această relație dintre Φ_u și i a fost reprezentată cu linie întreruptă în figura 49.5. În regim variabil (practic, chiar la frecvența industrială de 50 Hz), relația dintre Φ_u și i nu mai este asemenea cu aceea dintre B și H, din cauză că la solenația $\Theta_i = Ni$ a înfășurării trebuie adăugată contribuția curenților turbionari (Foucault), induși în miezul feromagnetic de variația în timp a fluxului magnetic. Acești curenți determină și pierderi de energie suplimentare prin efect Joule în miezul feromagnetic. Pentru a reduce aceste pierderi, miezurile înfășurărilor de curent alternativ se execută divizate în tole izolate între ele și dispuse longitudinal față de liniile de cîmp magnetic; în felul acesta, căile de închidere ale curenților

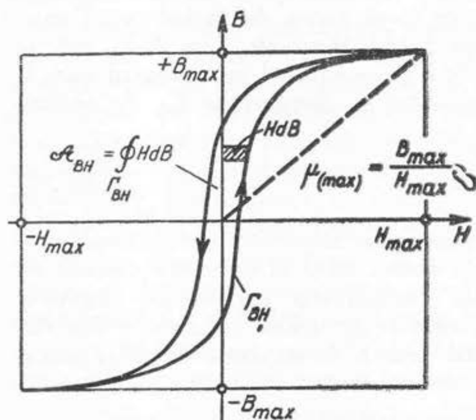


Fig. 49.4

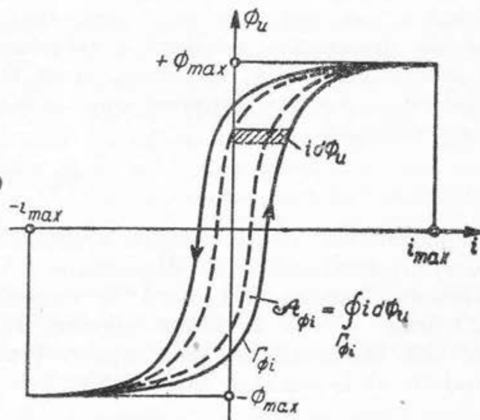


Fig. 49.5

turbionari, care sînt situate în planuri transversale, au o rezistență mult sporită (v. și par. 55.3.1). Sporirea rezistenței se obține și prin îmbogățirea tolelor cu siliciu (cîteva procente), ceea ce le mărește rezistivitatea. La frecvență industrială, reactanța acestor căi de închidere e neglijabilă și curenții turbionari rezultă proporționali și în fază cu tensiunea electromotoare indusă în miez. De aceea, contribuția lor la magnetizarea miezului e practic echivalentă cu o solenație Θ_f, proporțională și practic în fază cu tensiunea electromotoare a fluxului fascicular util:

$$\Theta_f = -K\frac{d\Phi_{fu}}{dt} = -\frac{K}{N}\frac{d\Phi_u}{dt}, \tag{49.48}$$

unde $K > 0$ este o constantă proporțională cu lungimea circuitului magnetic și invers proporțională cu rezistivitatea miezului.

Ținînd seama de această solenație suplimentară, legea circuitului magnetic (49.46) se scrie:

$$\Theta = \Theta_i + \Theta_f = Ni - \frac{K}{N}\frac{d\Phi_u}{dt} = Hl \tag{49.49}$$

sau

$$Ni = Hl + \frac{K}{N}\frac{d\Phi_u}{dt}. \tag{49.50}$$

Din această relație rezultă că în regim variabil, din cauza curenților turbionari, ciclul de magnetizare e mai lat decît în regim staționar (curba plină din fig. 49.5): dacă $\frac{di}{dt} > 0$ și deci $\frac{d\Phi_u}{dt} > 0$, se adaugă la curentul $\frac{Hl}{N}$ de regim staționar o cantitate pozitivă; dacă $\frac{di}{dt} < 0$ și deci $\frac{d\Phi_u}{dt} < 0$, se scade din curentul $\frac{Hl}{N}$ de regim staționar o cantitate pozitivă. Vîrfurile ciclului se păstrează neschimbate, deoarece acolo unde $\Phi_u(t)$ trece prin maxime sau minime, $\frac{d\Phi_u}{dt} = 0$ și curentul i e egal cu cel corespunzător ciclului de isterezis al materialului $\left(H\frac{l}{N}\right)$.

Din această analiză rezultă că *ciclul de magnetizare al unei bobine depinde de frecvență* (e cu atît mai lat, cu cît frecvența e mai mare, adică cu cît $\left|\frac{d\Phi_u}{dt}\right|$ e mai mare) *și chiar de modul de variație în timp al fluxului magnetic*. De aceea vom studia mai jos cazul bobinelor cu tensiune aplicată sinusoidală, care prezintă interes în electrotehnică.

49.4.2. **Bobine cu miez de fier sub tensiune sinusoidală.** Ecuația circuitului din figura 49.3, *a* este (cu 49.43):

$$u = ri + \frac{d\Phi}{dt} = ri + L_d\frac{di}{dt} + \frac{d\Phi_u}{dt} \tag{49.51}$$

și conduce la *schema echivalentă* din fig. 49.3, *b*, în care o bobină cu fier, fără dispersiune și fără rezistență, e conectată în serie cu un rezistor r și o bobină fără fier L_d.

Pentru a determina curentul de regim permanent, trebuie rezolvate ecuațiile (49.44) și (49.51), ceea ce se poate face cu suficientă aproximație pe cale

grafico-analitică. De exemplu, dacă tensiunea la borne e sinusoidală şi dacă sînt mici căderile de tensiune în rezistenţa şi inductivitatea de dispersie, se poate considera că şi tensiunea utilă,

$$u_u = u - ri - L_d \frac{di}{dt} = \frac{d\Phi_u}{dt} \tag{49.52}$$

este sinusoidală şi poate fi luată origine de fază :

$$u_u = U_u \sqrt{2} \sin \omega t. \tag{49.53}$$

Din relaţia (49.52) rezultă, prin integrare, că şi fluxul util e sinusoidal

$$\Phi_u = N\Phi_{fu} = -\frac{U_u\sqrt{2}}{\omega} \cos \omega t = \Phi_{max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{49.54}$$

cu fluxul util maxim

$$\Phi_{max} = \frac{U_u \sqrt{2}}{2\pi f} = \frac{U_u}{4.44 f} \tag{49.54'}$$

şi fluxul fascicular util maxim

$$\Phi_{f\,max} = \Phi_0 = AB_{max} = \frac{U_u}{4.44 f N}. \tag{49.55}$$

În figura 49.6 sînt reprezentate funcţiunile $u_u\,(t)$ şi $\Phi_u\,(t)$. Se observă că în curent alternativ, *fluxul fascicular util al circuitului magnetic e impus ca formă şi mărime de tensiunea utilă* — prin legea generală a inducţiei electromagnetice — independent de natura materialului, adică de ciclul de magnetizare al bobinei. Cu ajutorul acestui ciclu se poate însă găsi curentul, construind punct cu punct curba $i(t)$, aşa cum se indică cu săgeţi în figura 49.6 : pentru un t oarecare se deduce din curba $\Phi_u\,(t)$ valoarea lui Φ_u; corespunzător acestei valori se deduce din ciclul de magnetizare valoarea lui i şi se figurează punctul reprezentativ în

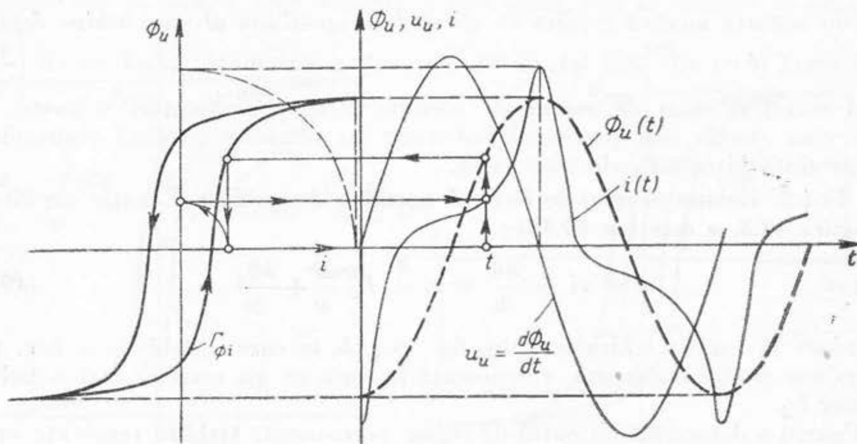


Fig. 49.6

dreptul abscisei t. Se observă că din cauza fenomenului de saturaţie curentul e puternic deformat, prezentînd *un maxim ascuţit*, iar din cauza existenţei ciclului de magnetizare, curentul trece prin zero (cu valori crescătoare) *înaintea fluxului util* pe care îl produce. Din cauza simetriei ciclului faţă de origine, curentul satisface relaţia $i(t) = -i\left(t + \frac{T}{2}\right)$, adică conţine numai armonici impare (v. rel. 47.1.2). Armonica fundamentală a curentului se poate determina cu metodele de analiză armonică grafică şi rezultă defazată înaintea fluxului. *Nici în primă aproximaţie fluxul şi curentul unei bobine cu miez de fier nu pot fi considerate în fază*; acest efect se datoreşte existenţei pierderilor în fier.

49.4.3. **Pierderile în fier.** Înmulţind ecuaţia (49.51) cu curentul i, se obţine ecuaţia bilanţului instantaneu al puterilor:

$$ui = ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L_d \frac{i^2}{2}\right) + i\frac{\mathrm{d}\Phi_u}{\mathrm{d}t}, \tag{49.56}$$

iar puterea medie absorbită în regim periodic — adică puterea activă — rezultă (cu $f = 1/T$):

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui \,\mathrm{d}t = rI^2 + f\oint_{\Gamma_{\Phi i}} i \,\mathrm{d}\Phi_u. \tag{49.57}$$

Aici, integrala termenului al doilea — derivata energiei magnetice a cîmpului de dispersiune — e nulă: cîmpul magnetic de dispersiune schimbă periodic energie cu circuitul, dar în medie nu absoarbe putere. Ultima integrală se efectuează în planul (Φ_u, i), în lungul ciclului de magnetizare şi e egală cu aria $\mathcal{A}_{\Phi i}$ a acestui ciclu (exprimată în unităţi de curent înmulţite cu unităţi de flux, adică în unităţi de energie, de ex. jouli). În cazul existenţei unui ciclu de magnetizare de arie nenulă — adică în cazul procesului de magnetizare real, care e ireversibil —, ultimul termen din relaţia (49.57) e diferit de zero şi deoarece reprezintă diferenţa dintre puterea activă primită pe la borne şi puterea disipată în rezistenţa r, nu poate fi decît puterea medie pierdută în procesul ciclic de magnetizare a circuitului magnetic al bobinei. Această putere se numeşte *putere de pierderi în fier* şi are expresia:

$$P_{Fe} = P - rI^2 = f\oint_{\Gamma_{\Phi i}} i\mathrm{d}\Phi_u = f \cdot \mathcal{A}_{\Phi i}. \tag{49.58}$$

Deoarece într-o secundă au loc f cicluri de magnetizare, iar P e energia pierdută într-o secundă, rezultă că

$$\mathcal{A}_{\Phi i} = \oint_{\Gamma_{\Phi i}} i \,\mathrm{d}\Phi_u \qquad [\mathrm{J/ciclu}] \tag{49.59}$$

e *energia totală pierdută într-un singur ciclu de magnetizare.* Aria acestui ciclu are, aşadar, o semnificaţie fizică imediată. Corespunzător descompunerii în doi

termeni a solenației (49.50), curentul înfășurării se poate descompune în doi termeni :

$$i = \frac{l}{N} H + \frac{K}{N^2} \frac{d\Phi_u}{dt}, \qquad (49.60)$$

dintre care primul asigură magnetizarea miezului, iar al doilea compensează efectul curenților turbionari. Cu relația (49.60) și puterea de pierderi în fier se poate descompune în doi termeni :

$$P_{Fe} = P_h + P_f, \qquad (49.61)$$

dintre care primul, P_h, corespunde ciclului de isterezis al materialului și se numește *putere de pierderi prin isterezis*, iar al doilea, P_f, corespunde efectului Joule-Lenz al curenților turbionari și se numește *putere de pierderi prin curenți turbionari* (sau Foucault).

1. *Pierderile prin isterezis* au cu relațiile (49.58), (49.60) și (49.45) expresia

$$P_h = f \oint \frac{l}{N} H \mathrm{d}\,(ANB) = V \cdot f \cdot \oint_{\Gamma_{BH}} H \,\mathrm{d}\, B, \qquad (49.62)$$

n care $V = Al$ e volumul circuitului magnetic omogen, iar

$$\boxed{w_{hm} = \mathcal{A}_{BH} = \oint_{\Gamma_{BH}} H \mathrm{d} B} = \frac{P_h T}{V} \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3\ ciclu}}\right] \qquad (49.63)$$

e *densitatea de volum a energiei pierdute pentru un ciclu de isterezis*, egală cu aria ciclului de isterezis (fig. 49. 4), în unități magnetice. Această arie se determină experimental sau se calculează cu formula empirică (Steinmetz) :

$$w_{hm} = \eta\, B^n_{max}, \qquad (49.64)$$

în care coeficientul η și exponentul n ($1{,}6 < n \leqslant 2$ pentru tolele obișnuitei depind de material. Produsul dintre w_{hm} și frecvența este puterea de pierder) în unitate de volum sau *puterea specifică de pierderi prin isterezis magnetic*

$$p_{hm} = \frac{P_h}{V} = f \cdot w_{hm} = f \oint_{\Gamma_{BH}} H \mathrm{d} B \quad \left[\frac{W}{\mathrm{m^2}}\right] \qquad (49.65)$$

Formulele (49.62) și (49.65) arată că pierderile prin isterezis sînt proporționale cu frecvența [1]. În cazul unui circuit magnetic neomogen trebuie calculate pierderile specifice p_{hi} în fiecare porțiune omogenă (i), în funcție de inducția maximă respectivă și pierderile totale rezultă prin însumare :

$$P_h = \sum_i V_i\, p_{hi} = f \sum_i V_i\, \eta_i\, (B_{max})^n_i. \qquad (49.66)$$

[1] La frecvențe înalte, fenomenul de *viscozitate magnetică* (post-efect sau ereditate magnetică), care consistă în rămînerea în urmă a inducției magnetice față de intensitatea cîmpului magnetic la viteze mari de variație a acesteia, mărește aria ciclului de isterezis și deci pierderile. De aceea, la frecvențe înalte, pierderile prin isterezis cresc mai repede decît proporțional cu frecvența (la aceeași inducție maximă).

2. *Pierderile prin curenți turbionari* au cu relațiile (49.58), (49.60) și (49.45) expresia :

$$P_f = f \oint \frac{K}{N^2} \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_u}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}\Phi_u = fKA^2 \int_0^T \left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \right)^2 \mathrm{d}t. \qquad (49.67)$$

Dacă fluxul util e sinusoidal și inducția e sinusoidală, $B = B_{max} \sin \omega t$ și prin integrare se obține o expresie proporțională cu pătratul frecvenței și cu pătratul inducției maxime. Un calcul mai exact al acestor pierderi va fi efectuat în paragraful 55.3, unde se va obține pentru *pierderile specifice prin curenți turbionari* expresia

$$p_f = \frac{P_f}{V} = \frac{\pi^2}{6\rho} \Delta^2 f^2 B^2_{max}, \qquad (49.68)$$

în care Δ e grosimea tolei (în electrotehnică : 0,35 mm — sau, mai rar, 0,5 mm — la aparate și mașini de frecvență industrială), iar ρ e rezistivitatea materialului. În cazul unui circuit magnetic neomogen, trebuie calculate pierderile specifice în p_{fi} fiecare porțiune omogenă (i) și puterea totală rezultă prin însumare :

$$P_f = \sum_i V_i \, p_{fi} = f^2 \sum_i \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{\Delta^2}{\rho} \right)_i V_i \, (B_{max})^2_i. \qquad (49.69)$$

3. *Pierderile totale în fier* ale unei bobine rezultă prin însumarea expresiilor (49.66) și (49.69). Se obține o expresie de forma :

$$P_{Fe} = P_h + P_f = f \left(\sum_i V_i \eta \, (B_{max})^n_i \right) + f^2 \left(\sum_i V_i \left(\frac{\Delta^2}{\rho} \right)_i \frac{\pi^2}{6} (B_{max})^2_i \right). \qquad (49.70)$$

Dacă frecvența variază și inducția maximă se menține constantă, pierderile în fier cresc cu frecvența și dependența diferită de frecvență a celor doi termeni permite determinarea lor experimentală (separarea pierderilor), dacă se măsoară P_{Fe} la două frecvențe diferite. De subliniat că dacă se menține constantă tensiunea efectivă aplicată, deoarece cu relația (49.55)

$$(B_{max})_i = \frac{U_u}{4{,}44 \, NA_i f} \qquad (49.71)$$

pierderile au *altă* dependență de frecvență.

49.4.4. **Curentul sinusoidal echivalent și ciclul de magnetizare eliptic echivalent.** În aplicații tehnice, considerarea curentului real deformat, determinabil ca mai sus (fig. 49.6), pe cale grafică, complică prea mult calculele. De aceea se consideră un *curent sinusoidal echivalent*, care — în ipoteza că tensiunea utilă e sinusoidală și origine de fază (49.53) — are expresia :

$$i_e = I_e \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi_e) = I_e \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \delta_{Fe} \right). \qquad (49.72)$$

Curentul sinusoidal echivalent e defazat în urma tensiunii utile cu unghiul φ_e și înaintea fluxului util cu unghiul $\delta_{Fe} = \frac{\pi}{2} - \varphi_e$, numit *unghi de pierderi în fier*.

Cei doi parametri I_e și φ_e (sau δ_{Fe}) ai curentului sinusoidal echivalent se determină prin următoarele condiții :

— (1) pierderile în fier să fie aceleași cu cele reale date (P_{Fe});

— $(2)_a$ valoarea maximă a curentului echivalent să fie egală cu valoarea maximă a curentului deformat (I_{max}):

sau,

$(2)_b$ valoarea efectivă a curentului echivalent să fie egală cu valoarea efectivă a curentului real deformat (condițiile 2*a* și 2*b* sînt practic echivalente, dacă curentul nu are un coeficient de distorsiune prea mare);

sau,

$(2)_c$ curentul echivalent să fie prima armonică a curentului real fundamental. Această ultimă condiție e suficientă pentru a determina pe *i* și e compatibilă cu (1), dacă tensiunea utilă e sinusoidală — deoarece, în acest caz, numai prima armonică dă putere activă.

Cele trei condiții $(2)_a$, $(2)_b$, $(2)_c$ sînt practic echivalente, dacă deformarea curentului e mică. Spre deosebire de $(2)_b$ și $(2)_c$ care necesită analiza armonică a curbei curentului, sau alte operații de calcul grafic, relativ complicate, condiția $(2)_a$ e cea mai simplă, deoarece I_{max} se deduce imediat din ciclul de magnetizare — fără a fi necesară trasarea curbei curentului. În plus, *această condiție se poate menține și în cazul unei tensiuni utile nesinusoidale.*

Admițînd condițiile (1) și $(2)_a$, determinarea parametrilor curentului echivalent se face cu relațiile :

$$I_e = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}; \quad \cos\varphi_e = \sin\delta_{Fe} = \frac{P_{Fe}}{U_u I_e}. \tag{49.73}$$

Adesea se introduce formal — ca la bobinele liniare — o *inductivitate utilă aparentă*

$$L_{(max)} = \frac{\Phi_{max}}{I_{max}} = \frac{N^2}{R_{m\,(max)}}\,^{1}. \tag{49.74}$$

Această inductivitate poate fi exprimată ca la circuitele magnetice liniare (v. par. 27.2.2, vol. 1), în funcție de o reluctanță $R_{m\,(max)}$, care trebuie însă calculată cu *permeabilitatea magnetică aparentă*

$$\mu_{(max)} = \frac{B_{max}}{H_{max}}\,^{1}, \tag{49.75}$$

corespunzătoare vîrfului ciclului de isterezis (fig. 49.4).

Determinarea curentului sinusoidal echivalent se face deci pornind de la valoarea efectivă a tensiunii utile U_u, astfel : din relația (49.54′) se deduce Φ_{max} (și eventual B_{max}); din studiul materialului se deduc pierderile corespunzătoare $P_{Fe} = f \cdot \mathcal{A}_{\Phi i}$ și curentul maxim I_{max} (eventual prin intermediul inductivității — 49.74); din P_{Fe} și I_{max} se deduc, cu relațiile (49.73), I_e și φ_e. Eventual P_{Fe} și I_{max} se deduc din măsurători.

[1] Indicele (*max*), între paranteze, e pus pentru a arăta că această mărime corespunde valorilor maxime ale mărimilor în funcție de care e definită, fără a fi ea însăși o valoare maximă posibilă.

Considerarea curentului sinusoidal echivalent revine la înlocuirea ciclului de magnetizare real cu un *ciclu eliptic echivalent* ($\Gamma_{e\Phi i}$ în fig. 49.7), deoarece ecuaţiile (49.54) şi (49.72) sînt ecuaţiile parametrice ale unei elipse înscrise în dreptunghiul definit de valorile maxime ale ciclului real.

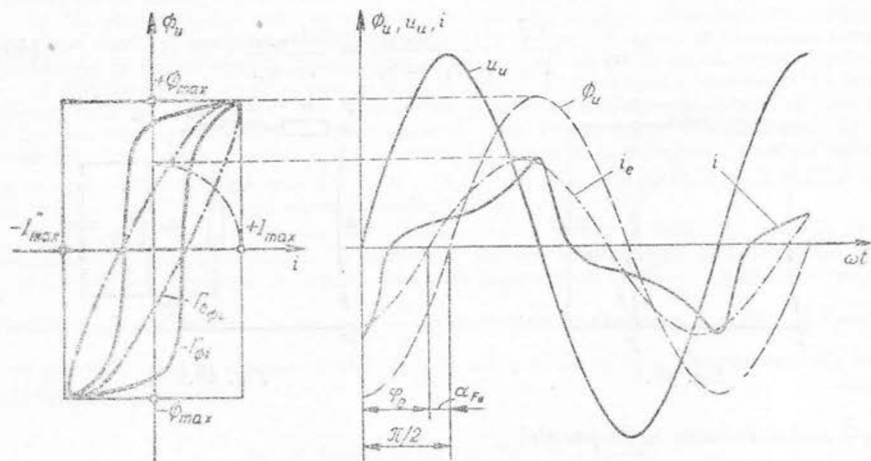


Fig. 49.7

Studiul bobinei cu miez de fier în aproximaţia înlocuirii ciclului de magnetizare real printr-un ciclu eliptic echivalent se mai numeşte *liniarizarea bobinei* şi permite considerarea unui regim sinusoidal echivalent regimului deformant real.

49.4.5. Schemele echivalente ale bobinei cu miez de fier. Considerarea unui curent sinusoidal echivalent pentru bobina cu miez de fier mai revine la înlocuirea ei cu un receptor liniar (disipativ şi inductiv), care, pentru bobina fără dispersiune şi cu înfăşurare fără rezistenţă (cu bornele fictive 2, 2′ din fig. 49.3.b), are impedanţa echivalentă :

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_u}{\underline{I}_e} = \frac{U_u}{I_e}\, e^{j\varphi_e} = R_{Fe_s} + j\,\omega L_{u_s} \tag{49.76}$$

şi admitanţa echivalentă

$$\underline{Y}_2 = \frac{\underline{I}_e}{\underline{U}_u} = \frac{I_e}{U_u}\, e^{-j\varphi_e} = \frac{1}{R_{Fe_p}} + \frac{1}{j\,\omega L_{u_p}}\,. \tag{49.77}$$

Această impedanţă poate fi reprezentată prin conectarea în serie a elementelor ideale R_{Fe_s} şi L_{u_s}, sau prin conectarea în paralel a elementelor ideale R_{Fe_p} şi L_{u_p}. Pentru a obţine schema echivalentă a bobinei reale cu dispersiune şi cu înfăşurare cu rezistenţă, se conectează $\underline{Z}_2$ în serie cu r şi L_d. Se obţin astfel schemele echivalente din fig. 49.8 şi 49.9.

Deoarece puterea de pierderi în fier P_{Fe} e proporțională (în primă aproximație) cu pătratul tensiunii aplicate (v. rel. 49.70 și 49.71 cu $n \approx 2$), cea mai adecvată e schema *tip paralel* (fig. 49.9), ale cărei elemente sînt:

— *rezistența de pierderi-paralel*

$$R_{Fe_p} = \frac{U_u^2}{P_{Fe}} = \frac{U_u}{I_e \cos\varphi_e} = \frac{\omega L_{(max)}}{\cos\varphi_e} \tag{49.78}$$

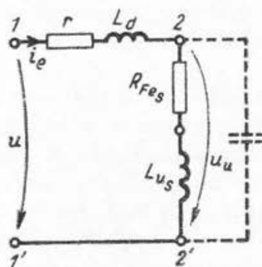


Fig. 49.8

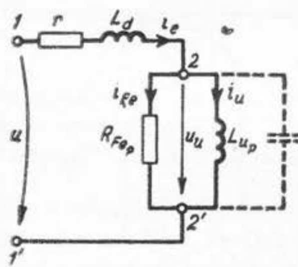


Fig. 49.9

— *inductivitatea utilă-paralel*

$$L_{u_p} = \frac{U_u}{\omega I_e \sin\varphi_e} = \frac{\Phi_{max}}{I_{max}\sin\varphi_e} = \frac{L_{(max)}}{\sin\varphi_e}, \tag{49.79}$$

iar

$$\cos\varphi_e = \frac{\omega L_{u_p}}{\sqrt{R_{Fe_p}^2 + \omega^2 L_{u_p}^2}} \quad \text{și} \quad \sin\varphi_e = \frac{R_{Fe_p}}{\sqrt{R^2_{Fe_p} + \omega^2 L_{u_p}^2}}. \tag{49.80}$$

Elementele schemei *tip serie* se deduc din precedentele, egalînd $\underline{Z}_2$ și $1/\underline{Y}_2$ din relațiile (49.76) și (49.77).

— *rezistența de pierderi-serie*

$$R_{Fe_s} = R_{Fe_p} \cdot \frac{\omega^2 L_{u_p}^2}{R_{Fe_p}^2 + \omega^2 L_{u_p}^2} = \omega L_{(max)} \cos\varphi_e \tag{49.81}$$

— *inductivitatea utilă-serie*

$$L_{u_s} = L_{u_p} \cdot \frac{R_{Fe_p}^2}{R_{Fe_p}^2 + \omega^2 L_{u_p}^2} = L_{(max)} \sin\varphi_e \tag{49.82}$$

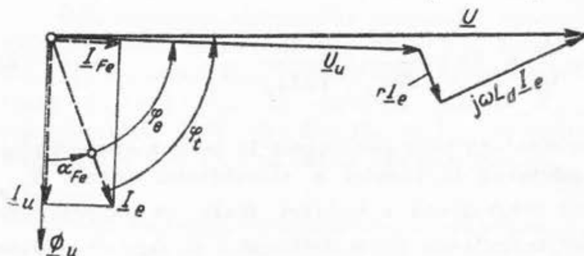


Fig. 49.10

În figura 49.10 e reprezentată diagrama vectorială corespunzătoare schemei echivalente paralel. Componenta $\underline{I}_u$ se numește curent de magnetizare, iar componenta $\underline{I}_{Fe}$ curent de pierderi.

Observații: *a)* Din cauza neliniarității bobinei parametrii curentului sinusoidal echivalent și elementele schemelor echivalente depind de tensiunea aplicată; totodată R_{Fe_p}, R_{Fe_s}, L_{u_p}, L_{u_s} depind de frecvență. De aceea, schemele echivalente se pot determina și utiliza numai la o frecvență dată și numai la tensiuni diferind cu puțin (cu cel mult cîteva procente) de tensiunea considerată.

b) Un studiu similar celui de mai sus se poate face în cazul alimentării cu curent sinusoidal, cînd fluxul și tensiunea rezultă deformate (fluxul rezultă aplatisat din cauza saturației, iar tensiunea, cu vîrfuri ascuțite, corespunzătoare variațiilor rapide de flux la trecerea prin zero).

c) Studiul de mai sus presupune tensiunea utilă (u_u) sinusoidală și cunoscută. În practică, tensiunea aplicată la borne (u) este sinusoidală și cunoscută. Deoarece căderile de tensiune în r și L_d sînt mici, se consideră cu aproximație $u_u \approx u$. Pentru o aproximație mai bună, după ce s-au determinat mărimile R_{Fe_p} și L_{u_p} cu ipoteza $u_u \approx u$, se calculează curentul echivalent I_e și se determină tensiunea utilă $\underline{U}_u = \underline{U} - \underline{I}_e (r + j\omega L_d)$. Cu această nouă valoare a tensiunii utile se deduc valori mai corecte pentru R_{Fe_p} și L_{u_p}.

d) Conceptul de inductivitate nu e univoc definit pentru o bobină cu miez de fier decît cu anumite convenții suplimentare. În studiul de mai sus au intervenit astfel mărimile $L_{(max)}$, L_{u_p} și L_{u_s} (făcînd abstracție de inductivitatea de dispersiune). În cazul materialelor magnetice obișnuite, unghiul de pierderi e mic $\delta_{Fe} \ll \frac{\pi}{2}$, curentul de magnetizare e mult mai mare decît cel de pierderi, adică în schema-paralel $R_{Fe_p} \gg \omega L_{u_p}$ și $\sin \varphi_e \approx 1$. În acest caz, din relațiile (49.79) și (49.81) rezultă:

$$L_{u_p} \approx L_{(max)} \approx L_{u_s} \text{ și } R_{Fe_s} \approx \frac{\omega^2 L_{u_p}^2}{R_{Fe_p}}. \tag{49.83}$$

e) În cazul materialelor magnetice speciale, cu pierderi mici, dar cu permeabilitate magnetică foarte mare, în funcționare nesaturată, este posibil ca inductivitatea utilă-paralel să fie foarte mare, astfel ca $\omega L_{u_p} \gg R_{Fe_p}$. În acest caz, $\sin \varphi_e \approx 0$, $\cos \varphi_e \approx 1$ și deși $L_{(max)}$ e finit și foarte mare, rezultă:

$$R_{Fe_s} \approx R_{Fe_p} \text{ și } L_{u_s} \approx 0 \tag{49.84}$$

În acest caz (v. fig. 49.11), *bobina cu miez de fier se comportă practic ca un rezistor de rezistență* $r + R_{Fe_p}$ (cu inductivitatea parazită L_d) și admite un curent echivalent practic în fază cu tensiunea. Sugestiv, se poate spune că în schema echivalentă paralel, rezistența de pierderi

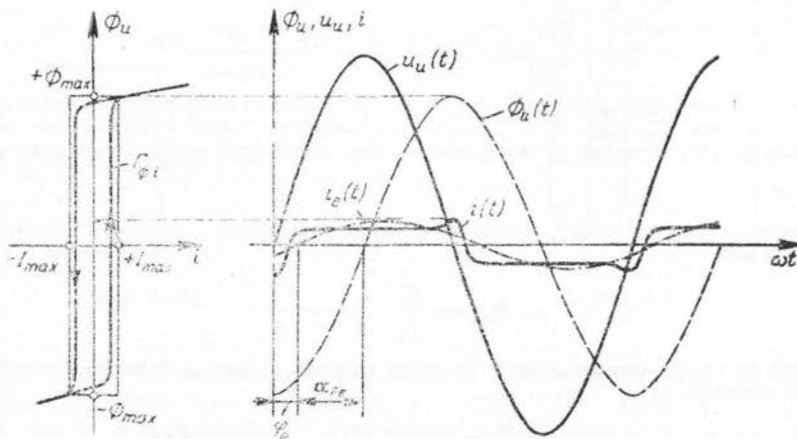


Fig. 49.11

scurtcircuitează inductivitatea utilă a bobinei. Această situație se realizează, de exemplu, la tolele laminate la rece, cu ciclu de magnetizare practic dreptunghiular, în regim nesaturat. Aceeași comportare o au bobinele cu miez de fier din materialele obișnuite, la frecvențe înalte, cînd de asemenea

$$\omega L_{u_p} \gg R_{Fe_p}.$$

f) La frecvențe înalte, în schema echivalentă a bobinei trebuie introdusă, în paralel cu inductivitatea utilă, o capacitate echivalentă capacității distribuite parazite a spirelor înfășurării (reprezentată punctat în schemele echivalente din fig. 49.8 și 49.9).

49.4.6. **Reluctanța echivalentă complexă și permeabilitatea echivalentă complexă.** Circuitul magnetic al bobinei cu miez de fier, liniarizată prin aproximația curentului echivalent sinusoidal, se poate studia cu reprezentarea în complex. Fie

$$\underline{I}_e = I_e\, e^{-j\varphi_e} \rightleftarrows i_e = I_e\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi_e) \tag{49.85}$$

și

$$\underline{\Phi}_{fu} = \frac{\Phi_{max}}{N\sqrt{2}}\, e^{-j\frac{\pi}{2}} \rightleftarrows \Phi_{fu} = \frac{\Phi_{max}}{N}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \tag{49.86}$$

reprezentările în complex ale curentului echivalent și fluxului fascicular util, în ipoteza că tensiunea utilă e origine de fază. În circuitul magnetic — presupus, pentru simplificare, omogen, cu secțiunea A și lungimea medie l — se pot defini: reprezentarea în complex a inducției magnetice

$$\underline{B} = \frac{\underline{\Phi}_{fu}}{A} = \frac{\Phi_{max}}{\sqrt{2}\,NA}\, e^{-j\frac{\pi}{2}} = B_{max}\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-j\frac{\pi}{2}} \tag{49.87}$$

și reprezentarea în complex a intensității cîmpului magnetic produs de curentul echivalent

$$\underline{H}_e = \frac{N\underline{I}_e}{l} = \frac{NI_e}{l}\, e^{-j\varphi_e} = H_{e_{max}}\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-j\varphi_e} \tag{49.88}$$

(intensitatea cîmpului magnetic, stabilită în fierul circuitului magnetic, e suma dintre această intensitate și aceea produsă de curenții turbionari).

În analogie cu circuitele magnetice de regim staționar (v. par. 26.1, vol. I), cîtul dintre reprezentarea în complex a solenației înfășurării și reprezentarea în complex a fluxului fascicular util se numește *reluctanță echivalentă complexă*

$$\underline{R}_{m_e} = \frac{N\underline{I}_e}{\underline{\Phi}_{fu}} = \frac{N^2 I_e\sqrt{2}}{\Phi_{max}}\, e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_e\right)} = \frac{N^2}{L_{(max)}}\, e^{j\delta_{Fe}} \tag{49.89}$$

și caracterizează circuitul magnetic atît din punctul de vedere al magnetizării — avînd modulul egal cu reluctanța $R_{m(max)} = N^2/L_{(max)}$ corespunzătoare vîrfului ciclului de isterezis — cît și din punctul de vedere al pierderilor — avînd argumentul egal cu unghiul de pierderi $\delta_{Fe} = \frac{\pi}{2} - \varphi_e$.

Cu relațiile (49.87) și (49.88), reluctanța echivalentă complexă a circuitului magnetic omogen se poate scrie:

$$\underline{R}_{m_e} = \frac{\underline{H}_e}{\underline{B}_e}\,\frac{l}{A} = \frac{l}{\underline{\mu}_e A} \tag{49.90}$$

(în analogie cu relația corespunzătoare de regim staționar), dacă se definește *permeabilitatea echivalentă complexă*.

$$\underline{\mu}_e = \frac{\underline{B}}{\underline{H}_e} = \frac{B_{max}}{H_{e_{max}}}\, e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_e\right)} = \mu_{(max)}\, e^{-j\delta_{Fe}}. \tag{49.91}$$

Această permeabilitate echivalentă complexă are drept modul permeabilitatea aparentă (49.75), corespunzătoare vîrfului ciclului de isterezis şi drept argument unghiul de pierderi în fier cu semn schimbat. Deoarece $\delta_{Fe} > 0$, din cauza caracterului pozitiv definit al pierderilor, rezultă că inducţia e defazată în urma intensităţii. Mai trebuie observat că această mărime nu caracterizează local materialul feromagnetic, deoarece a fost definită numai cu o parte a intensităţii cîmpului magnetic : aceea produsă de solenaţia înfăşurării parcursă de curentul sinusoidal echivalent. Permeabilitatea complexă echivalentă constituie deci o caracteristică globală a circuitului magnetic, ca şi reluctanţa $\underline{R}_{m_e}$, care ţine seama atît de fenomenul de isterezis cît şi de curenţii turbionari.

49.5. Condensatorul cu pierderi

O teorie analogă celei prezentate pentru bobina cu miez de fier se poate dezvolta şi pentru condensatoarele reale, (fig. 49.12) care au întotdeauna pierderi de putere în dielectric şi sînt uneori şi neliniare (condensatoarele cu dielectric din materiale feroelectrice).

49.5.1. Pierderile dielectrice. Pierderile de putere în dielectric se datoresc atît faptului că dielectricul nu e perfect izolant — prezentînd o conductanţă finită G_0 (măsurabilă în curent continuu) şi deci pierderi prin conducţie — cît şi fenomenului de isterezis dielectric — pierderi prin isterezis. Fenomenul de isterezis e condiţionat mai rar de neliniaritatea materialului (isterezis propriu zis, caracteristic materialelor feroelectrice) şi mai frecvent de *viscozitatea electrică* (post efect electric sau polarizare ereditară) a acestui material, fenomen care consistă în rămînerea în urmă a inducţiei electrice D(t) faţă de intensitatea cîmpului electric E(t).

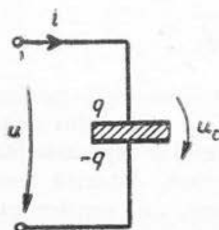


Fig. 49.12

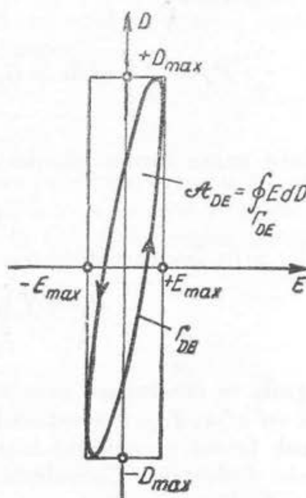


Fig. 49.13

Ca urmare, în regim sinusoidal, relaţia dintre inducţie şi intensitate e reprezentabilă prin *ciclul de polarizare electrică* $D = D(E)$ (curba Γ_{DE} în fig. 49.13), care este eliptic la condensatoare liniare — sau se aproximează printr-un ciclu eliptic la condensatoare neliniare (aşa cum s-a procedat în cazul

bobinei cu miez de fier). Deoarece sarcina e proporțională cu inducția, iar tensiunea e proporțională cu intensitatea, aceeași relație se regăsește (la altă scară) între sarcina q și tensiunea u_C dintre armături, sub forma ***ciclului de încărcare*** $q = q(u_C)$ al condensatorului (curba Γ_{QV} în fig. 49.14).

Fig. 49.14

Din legea conservării sarcinii rezultă că între curentul i absorbit din exterior, curentul de conducție $i_0 = G_0 u_C$ prin dielectric și sarcina q există relația:

$$i = i_0 + \frac{dq}{dt} = G_0 u_C + \frac{dq}{dt} \tag{49.92}$$

(se observă că din cauza conducției dielectricului, în cazul condensatorului cu pierderi, $i \neq dq/dt$). Înmulțind această relație cu tensiunea u_C, rezultă bilanțul instantaneu al puterilor

$$u_C i = G_0 u_C^2 + u_C \frac{dq}{dt}. \tag{49.93}$$

Pierderile medii de putere din condensator sînt egale cu puterea activă (medie) absorbită — numită *putere de pierderi în dielectric*

$$P_d = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt = G_0 U_C^2 + f\oint_{\Gamma_{QU}} u_C\,dq = P_J + P_h \tag{49.94}$$

și reprezintă suma dintre *pierderile prin conducție* (prin efect Joule-Lenz în dielectric)

$$P_J = G_0 U_C^2 \tag{49.95}$$

și *pierderile prin isterezis dielectric*

$$P_h = f\oint_{\Gamma_{QU}} u_C\,dq = f\cdot \mathcal{A}_{QU}. \tag{49.96}$$

Aici, integrala se efectuează de-a lungul conturului Γ_{QU} al ciclului de încărcare, fiind egală cu aria $\mathcal{A}_{QU}$ a acestuia (în unități de energie) și reprezentînd energia disipată sub formă de căldură într-un ciclu de încărcare, datorită fenomenului de isterezis dielectric. Considerînd, spre simplificare, un condensator plan, avînd aria A, distanța d între armături și un dielectric omogen,

$$q = D\cdot A \quad \text{și} \quad u_C = E\cdot d. \tag{49.97}$$

Înlocuind aceste expresii în relația (49.96), pierderile prin isterezis se exprimă astfel:

$$P_h = f\oint_{\Gamma_{DE}} E\cdot d\cdot \mathrm{d}(DA) = f\cdot V\oint_{\Gamma_{DE}} E\,\mathrm{d}D. \tag{49.98}$$

Aici

$$w_{he} = \mathcal{A}_{DE} = \oint_{\Gamma_{DE}} E \mathrm{d} D = \frac{P_h}{fV} \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3 ciclu}}\right] \tag{49.99}$$

e *densitatea de volum a energiei pierdute pentru un ciclu de polarizare electrică*, egală cu aria ciclului de isterezis (fig. 49.13).
Produsul

$$p_{he} = f w_{he} = \frac{P_h}{V} = f \cdot \oint_{\Gamma_{DE}} E \mathrm{d} D \tag{49.100}$$

e *puterea specifică de pierderi prin isterezis dielectric.*
Dacă în regim armonic sinusoidal, tensiunea

$$u_C = U_C \sqrt{2} \sin \omega t = U_{max} \sin \omega t \tag{49.101}$$

e luată origine de fază, sarcina

$$q = Q \sqrt{2} \sin (\omega t - \delta_h) = Q_{max} \sin (\omega t - \delta_h) \tag{49.102}$$

e defazată în urma tensiunii cu unghiul $\delta_h > 0$, numit *unghi de pierderi prin isterezis.* Mărimile u_C și q, nefiind în fază, nu se poate defini o capacitate a condensatorului ca în regim electrostatic, prin raportul lor (care e acum funcție de timp). Se poate defini însă o *capacitate aparentă*

$$C_{(max)} = \frac{Q_{max}}{U_{max}}, \tag{49.103}$$

cu valorile maxime luate din ciclul de încărcare (maxime care nu au loc simultan). Cu relația (49.97) rezultă că această capacitate aparentă se poate exprima în funcție de dimensiunile condensatorului, la fel ca în regim electrostatic:

$$C_{(max)} = \frac{A}{d} \frac{D_{max}}{E_{max}} = \frac{A}{d} \varepsilon_{(max)}, \tag{49.104}$$

pacă se utilizează *permitivitatea aparentă*

$$\varepsilon_{(max)} = \frac{D_{max}}{E_{max}}, \tag{49.105}$$

dedusă din ciclul de isterezis al materialului.
Cu relațiile (49.101) și (49.102), pierderile prin isterezis (49.96) se exprimă:

$$P_h = f \oint u_c \mathrm{d} q = \frac{1}{T} \int_0^T u_c \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \omega \frac{U_{max} Q_{max}}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos (\omega t - \delta_h) \mathrm{d}t =$$

$$= \omega \frac{U_{max} Q_{max}}{2} \sin \delta_h \tag{49.106}$$

sau

$$\mathcal{A}_{QU} = \frac{P_b}{f} = \pi\, U_{max} Q_{max} \sin \delta_b, \tag{49.107}$$

iar

$$\mathcal{A}_{DE} = \frac{P_b}{f} = \frac{\mathcal{A}_{QU}}{V} = \pi\, E_{max} D_{max} \sin \delta_b. \tag{49.108}$$

Deci, dacă se cunoaşte ciclul de polarizare, se pot determina cu relaţiile (49.103) şi (49.107) mărimile $C_{(max)}$ şi δ_b, care intervin în relaţia dintre sarcină şi tensiune.

49.5.2. **Schemele echivalente ale condensatorului cu pierderi.** Condensatorul cu pierderi e un element de circuit capacitiv, al cărui curent

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi_e) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + |\varphi_e|) \tag{49.109}$$

e defazat înaintea tensiunii cu unghiul $-\varphi_e = |\varphi_e| > 0$. Dacă

$$\underline{I} = I\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_e}, \quad \underline{U}_C = U_C, \quad \underline{Q} = Q\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta_b} \tag{49.110}$$

sînt reprezentările în complex ale mărimilor (49.109), (49.101), (49.102), ecuaţia (49.92) se reprezintă sub forma:

$$\underline{I} = \underline{I}_0 + \mathrm{j}\,\omega \underline{Q} = (G_0 + \mathrm{j}\,\omega\, C_{(max)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta_b})\, \underline{U}_C, \tag{49.111}$$

în care am utilizat relaţia (49.104).

De aici rezultă *admitanţa echivalentă complexă* a condensatorului:

$$\underline{Y}_e = \frac{\underline{I}}{\underline{U}_C} = G_0 + \mathrm{j}\,\omega C_{(max)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta_b}. \tag{49.112}$$

Separînd partea reală şi cea imaginară,

$$\begin{aligned} \underline{Y}_e &= G_0 + \omega\, C_{(max)} \sin \delta_b + \mathrm{j}\,\omega C_{(max)} \cos \delta_b \\ \underline{Y}_e &= G_{e_p} + \mathrm{j}\,\omega C_{e_p}, \end{aligned} \tag{49.113}$$

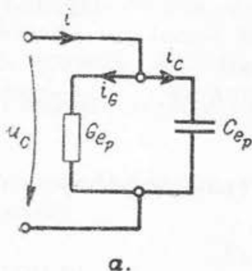
se obţin *conductanţa echivalentă-paralel* a dielectricului condensatorului:

$$G_{e_p} = \mathrm{Re}\{\underline{Y}_e\} = G_0 + \omega C_{(max)} \sin \delta_b \tag{49.114}$$

şi *capacitatea echivalentă-paralel* a condensatorului

$$C_{e_p} = \frac{1}{\omega} \mathrm{Im}\{\underline{Y}_e\} = C_{(max)} \cos \delta_b. \tag{49.115}$$

Descompunerea relaţiei (49.113) corespunde schemei echivalente paralel din figura 49.15, *a*.



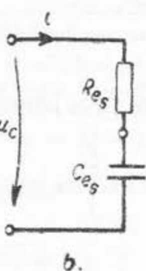


Fig. 49.15

Dacă se determină impedanța echivalentă

$$\underline{Z}_e = \frac{1}{\underline{Y}_e} = \frac{G_{e_p}}{G_{e_p}^2 + \omega^2 C_{e_p}^2} - \mathrm{j}\,\omega \frac{C_{e_p}}{G_{e_p}^2 + \omega^2 C_{e_p}^2} = R_{e_s} + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\, C_{e_s}} \qquad (49.116)$$

se obțin: *rezistența echivalentă-serie* a condensatorului:

$$R_{e_s} = \mathrm{Re}\,\{\underline{Z}_e\} = \frac{G_{e_p}}{G_{e_p}^2 + \omega^2 C_{e_p}^2} \qquad (49.117)$$

și *capacitatea echivalentă-serie*:

$$C_{e_s} = -\frac{1}{\omega\,\mathrm{Im}\,\{\underline{Z}_e\}} = \frac{G_{e_p}^2 + \omega^2 C_{e_p}^2}{\omega^2 C_{e_p}}. \qquad (49.118)$$

Descompunerea (49.116) corespunde schemei echivalente serie din figura 49.15, *b*.

Calculul elementelor schemelor echivalente se poate face cu relațiile (49.112) și (49.116), dacă se cunoaște conductanța de curent continuu G_0, capacitatea aparentă $C_{(max)}$ (din ciclul de încărcare cu rel. 49.104) și unghiul de pierderi prin isterezis δ_h (din aria ciclului cu rel. 49.107).

49.5.3. **Factorul de pierderi. Permitivitatea echivalentă complexă.** În practică, descompunerea de mai sus a pierderilor totale în pierderi de conducție și pierderi prin isterezis nu prezintă interes și e util să se determine elementele schemelor echivalente direct din cunoașterea pierderilor totale. Pentru caracterizarea materialului (v. diagrama vectorială din fig. 49.16) se introduce *unghiul de pierderi totale* δ, egal cu complementul modulului unghiului de defazaj φ_e al curentului:

$$\delta = \frac{\pi}{2} - |\varphi_e| = \frac{\pi}{2} + \varphi_e\,; \quad (\varphi_e < 0). \qquad (49.119)$$

Componenta activă a curentului (adică componenta lui în fază cu tensiunea) este:

$$I_G = I\cos\varphi_e = I\sin\delta = G_{e_p} U_C, \qquad (49.120)$$

componenta reactivă (în cuadratură cu tensiunea) este:

$$I_C = I\sin|\varphi_e| = I\cos\delta = \omega C_{e_p} U_C, \qquad (49.121)$$

iar pierderile totale de putere în dielectric sînt:

$$P_d = U_C I\cos\varphi_e = U_C I\sin\delta = G_{e_p} U_C^2. \qquad (49.122)$$

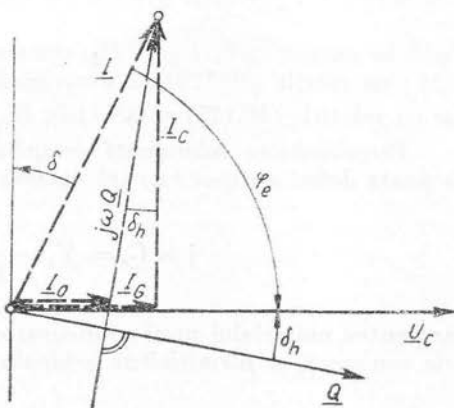


Fig. 49.16

Se obține, pentru tangenta unghiului de pierderi, numită și *factor de pierderi*, expresia :

$$\boxed{\operatorname{tg} \delta = \frac{I_G}{I_C} = \frac{G_{e_p}}{\omega C_{e_p}} = \omega C_{e_s} R_{e_s}}. \tag{49.123}$$

E ușor de arătat că tangenta unghiului de pierderi e o caracteristică a materialului dielectric exprimabilă direct în funcțiune de conductivitatea lui σ și de $\varepsilon_{(max)}$ și δ_h. În adevăr, la condensatorul plan, conductanța de curent continuu este :

$$G_0 = \sigma \frac{A}{d}. \tag{49.124}$$

Înlocuind această expresie și (49.104) în (49.114) și (49.115), se obțin relațiile :

$$G_{e_p} = \frac{A}{d} (\sigma + \omega \varepsilon_{(max)} \sin \delta_h) \tag{49.125}$$

$$C_{e_p} = \frac{A}{d} \varepsilon_{(max)} \cos \delta_h \tag{49.126}$$

și

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_{(max)} \cos \delta_h} + \operatorname{tg} \delta_h. \tag{49.127}$$

Din acest motiv, factorul de pierderi tg δ, utilizat pentru caracterizarea materialelor dielectrice, e dat, în tabele sau curbe, ca funcțiune de frecvență. Cu cît acest factor e mai mic, cu atît pierderile sînt mai mici, puterea de pierderi exprimîndu-se în funcție de puterea reactivă a condensatorului prin relația :

$$P_d = U_C I \,|\sin \varphi_e|\, \frac{1}{|\operatorname{tg} \varphi_e|} = |Q| \operatorname{tg} \delta. \tag{49.128}$$

Dacă se cunosc tg δ, U_C și P_d, elementele schemelor echivalente rezultă imediat : cu relația (49.120) se determină G_{e_p}, cu relația (49.121) se deduce C_{e_p}, iar cu relațiile (49.117) și (49.118), R_{e_s} și C_{es}.

Permitivitatea echivalentă complexă. Pentru un condensator cu pierderi se poate defini o *capacitate echivalentă complexă* $\underline{C}_e$ prin relația :

$$\mathrm{j}\, \omega\, \underline{C}_e = \underline{Y}_e = \frac{\underline{I}}{\underline{U}_C} = G_{e_p} + \mathrm{j}\, \omega C_{e_p}, \tag{49.129}$$

iar pentru materialul unui condensator cu pierderi (presupus plan și cu dielectric omogen), o *permitivitate echivalentă complexă* prin relația :

$$\underline{C}_e = \frac{A}{d} \underline{\varepsilon}_e. \tag{49.130}$$

Din aceste relații, cu (49.125) și (49.126) rezultă :

$$\underline{\varepsilon}_e = \frac{\sigma + \omega\varepsilon_{(max}\sin\delta_b}{j\omega} + \varepsilon_{(max)}\cos\delta_b$$

$$\varepsilon_e = \varepsilon_{(max)}\, e^{-j\delta_b} + \frac{\sigma}{j\omega} = \frac{D_{max}}{E_{max}}\, e^{-j\delta_b} + \frac{\sigma}{j\omega} = \frac{\underline{D} + \dfrac{\underline{J}}{j\omega}}{\underline{E}}, \qquad (49.131)$$

dacă $\underline{J} = \sigma\ \underline{E}$ e reprezentarea în complex a densității curentului de conducție prin dielectric.

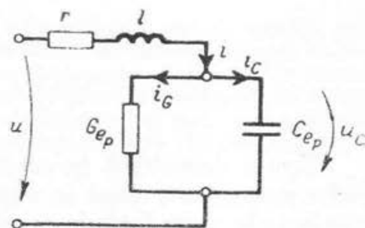


Fig. 49.17

Observații : a) Ca și în cazul bobinei cu miez de fier, elementele schemelor echivalente depind de frecvență și, uneori, de tensiunea aplicată.

b) O schemă echivalentă mai completă cuprinde (v. fig. 49.17) și rezistența r a conductoarelor de legătură și (la frecvențe înalte) inductivitatea parazită l, echivalentă prezenței acestor conductoare.

CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM TRANZITORIU

Teoria dezvoltată în capitolele 33...49 s-a referit la circuitele electrice în regim permanent, adică în regimul care se stabilește după trecerea unui timp suficient de mare față de constantele de timp ale circuitelor, pentru ca amortizarea regimului lor liber să fie practic completă [1]. În acest caz, condițiile inițiale nu se mai resimt în modul de variație în timp al curenților, care rezultă univoc determinat de forma funcțiunilor de timp reprezentate de tensiunile electromotoare date ale surselor.

În practică prezintă importanță și regimul tranzitoriu al circuitelor și rețelelor electrice. În electroenergetică, toate procesele de comutație (închideri și deschideri de întreruptoare) și de avarie (scurtcircuite, întreruperi etc.) determină regimuri tranzitorii, care — deși durează uneori extrem de puțin, datorită valorilor mici ale constantelor de timp — pot periclita securitatea instalațiilor (prin supraintensități și supratensiuni) sau stabilitatea funcționării lor. În electrocomunicații, numeroase clase de semnale — cum sînt, de exemplu, succesiunile de impulsii — au variații importante în intervale de timp de același ordin cu constantele de timp ale circuitelor și nu pot fi studiate decît în regim tranzitoriu; totodată, prelucrarea semnalelor (detecție, modulație, limitare etc.) utilizează adesea procese tranzitorii, care nu pot fi ignorate.

Regimul tranzitoriu al circuitelor liniare — la a cărui prezentare ne limităm — poate fi studiat cu *metoda directă de rezolvare a sistemelor de ecuații diferențiale ordinare, liniare, cu coeficienți constanți*. Această metodă consistă în următoarele:

— se scriu ecuațiile diferențiale ale circuitului (de ex. ecuațiile lui Kirchhoff în valori instantanee — rel. 36.5 și 36.10 — sau cele obținute din ele prin derivări, și, eventual, prin eliminarea unora dintre necunoscute);

— se caută *soluțiile de regim tranzitoriu* $i_m(t)$, sub forma unor sume ale *soluțiilor de regim liber* cu acelea de *regim forțat* (permanent);

— soluțiile de regim liber se determină cu ajutorul ecuațiilor caracteristice, ca soluții generale ale sistemului omogen (de ex. cu toate t.e.m. nule), care depind de un număr de constante arbitrare (egal cu numărul bobinelor și condensatoarelor din circuit, sau mai mic decît acest număr);

— soluțiile de regim permanent se determină ca soluții particulare ale sistemului neomogen — în cazul t.e.m. sinusoidale, fiind de aceeași formă cu aceste t.e.m. (determinarea acestor soluții se poate face cu oricare dintre metodele cunoscute de la studiul regimului permanent);

[1] Ne referim la circuite disipative, cu regim liber amortizat (v. par. 32) și al căror regim forțat coincide cu regimul permanent.

— se determină constantele arbitrare din expresiile complete, de regim tranzitoriu, ale soluţiilor, cu ajutorul condiţiilor iniţiale.

Această metodă a fost utilizată în paragraful 32, pentru studiul regimului tranzitoriu al circuitelor simple. Dacă circuitele au o structură mai complicată, dacă t.e.m. nu sînt periodice şi dacă se cere să se determine numai una dintre funcţiunile necunoscute, această metodă e relativ laborioasă. Totodată, condiţiile iniţiale, exprimate prin valorile iniţiale ale funcţiunilor necunoscute şi ale derivatelor lor, necesită o analiză prealabilă a circuitului, care să stabilească care dintre mărimi trec continuu prin momentul iniţial considerat (în general, un moment de discontinuitate). Aceste mărimi sînt, de obicei, fluxurile bobinelor — ale căror discontinuităţi ar determina tensiuni electromotoare induse infinite — şi sarcinile condensatoarelor — ale căror discontinuităţi ar determina curenţi absorbiţi infiniţi.

Studiul regimului tranzitoriu se sistematizează prin utilizarea unor metode speciale, care înlătură, în total sau în parte, dificultăţile aplicării metodei directe şi, uneori, îl apropie de studiul regimului permanent sinusoidal, care e mai familiar inginerului electrician. În această parte a cursului se vor expune trei dintre aceste metode : metoda descompunerii spectrale (transformarea Fourier), metoda răspunsului tranzitoriu (integrala Duhamel) şi metoda operaţională (transformarea Laplace). Expunerea va privi numai elementele de bază ale acestor metode, a căror dezvoltare depăşeşte cadrul acestui curs.

50. METODA DESCOMPUNERII SPECTRALE (TRANSFORMAREA FOURIER)

50.1. Integrala Fourier şi transformarea Fourier

Seria Fourier complexă (47.19), în care coeficienţii (amplitudinile spectrale) sînt înlocuite cu (47.20), capătă forma [1]:

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{T} f(\tau)e^{jn\omega(t-\tau)}d\tau. \tag{50.1}$$

Deoarece f (t) e o funcţiune periodică cu perioada T, integrala de mai sus se poate extinde asupra oricărui interval egal cu o perioadă, în particular asupra intervalului $\left(-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right)$. Cu substituţiile

$$\omega \to \Delta\omega,\ n\omega \to \omega_n,\ \frac{1}{T} \to \frac{\Delta\omega}{2\pi}, \tag{50.2}$$

relaţia (50.1) se poate scrie :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\omega_n=-\infty}^{\omega_n=+\infty}\Delta\omega\int_{-\frac{\pi}{\Delta\omega}}^{+\frac{\pi}{\Delta\omega}} f(\tau)e^{j\omega_n(t-\tau)}\,d\tau. \tag{50.3}$$

[1] Pentru a evita confuziile, variabila de integrare din relaţia (47.20) a fost notată τ în loc de t, care rămîne simbolul variabilei independente în relaţia (49.19).

Pentru $T \to \infty$, $\Delta\omega \to 0$ şi, notînd $\omega_n = \omega$, această relaţie tinde formal către egalitatea

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}\,d\tau\,, \tag{50.4}$$

numită *integrala Fourier* (complexă) — şi se referă la o funcţie definită într-un interval provenit din $(-T/2, +T/2)$ prin extinderea la întreaga axă reală, ceea ce elimină condiţia de periodicitate, considerată la început (perioada e acum infinită).

În analiza matematică [1] se demonstrează că această egalitate are loc efectiv pentru orice funcţiune netedă pe porţiuni (v. nota de picior de la începutul paragrafului 47.1.1.) şi absolut integrabilă pe toată axa variabilei reale t, pentru care deci :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)|\,d\tau < \infty \tag{50.5}$$

ceea ce impune anularea funcţiunii pentru $t \to \pm\infty$

$$f(-\infty) = 0,\quad f(+\infty) = 0 \tag{50.6}$$

şi exclude posibilitatea ca această funcţiune să fie periodică (cu perioada finită).

Dacă se introduce funcţiunea complexă de o variabilă imaginară :

$$\boxed{\underline{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau} = \underline{F}^*(-j\omega), \tag{50.7}$$

integrala Fourier capătă forma :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega. \tag{50.8}$$

Funcţiunea $\underline{F}(j\omega)$ se numeşte *transformata Fourier* sau *imaginea Fourier* a funcţiunii de timp $f(t)$, care satisface condiţiile de existenţă ale integralei (50.4). Relaţia (50.7) se numeşte *transformarea Fourier directă* şi permite să se asocieze biunivoc o imagine $\underline{F}(j\omega)$ fiecărei funcţiuni de timp neperiodice $f(t)$. Relaţia (50.8) se numeşte *transformarea Fourier inversă* sau *dezvoltarea în integrală Fourier* a funcţiunii neperiodice $f(t)$ şi permite să se determine funcţiunea de timp, a cărei transformată e dată. De remarcat că în relaţiile (50.4), (50.7) şi (50.8) conceptul de pulsaţie e extins şi la valori reale negative.

[1] v. G. P. Tolstov, *Serii Fourier*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.

50.2. Descompunerea spectrală a funcțiunilor de timp

Relația (50.8) poate fi interpretată ca o prezentare a funcțiunii de timp f(*t*), sub forma unei suprapuneri de componente armonice elementare (reprezentate în complex) de forma:

$$\frac{1}{2\pi}\underline{F}(j\,\omega)d\omega\, e^{j\omega t}, \tag{50.9}$$

ale căror amplitudini sînt infinit mici. De aceea, transformata Fourier se mai numește *densitatea spectrală* (complexă) a funcțiunii de timp f(*t*), fiind cîtul dintre *amplitudinea spectrală elementară* $\frac{1}{2\pi}\underline{F}(j\,\omega)\,d\,\omega$ și intervalul de frecvență $df = d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ la care se referă. Această interpretare permite să se considere dezvoltarea în integrală Fourier ca o extindere la funcțiuni de timp oarecare a analizei armonice a funcțiunilor periodice nesinusoidale. Reprezentarea grafică a *modulului densității spectrale*

$$|\underline{F}(j\omega)| = \Phi(\omega)$$

se numește *spectrul* funcținnii f(*t*).

Exemplu: Fie tensiunea u(*t*) de forma unei impulsii dreptunghiulare izolate, de amplitudine U_0 și durată T_0 (fig. 50.1, *a*)

$$u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{pentru } 0 < t \leqslant T_0 \\ 0 & \text{pentru } t \leqslant 0 \text{ și } t > T_0. \end{cases} \tag{50.10}$$

Se observă imediat că sînt satisfăcute condițiile existenței transformării Fourier și se obține densitatea spectrală:

$$\underline{U}(j\,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau = U_0\int_0^{T_0} e^{-j\omega\tau}\,d\tau = \frac{U_0}{j\,\omega}(1 - e^{-j\omega T_0}), \tag{50.11}$$

cu modulul

$$|\,\underline{U}(j\,\omega)\,| = \frac{2U_0}{\omega}\left|\sin\frac{\omega T_0}{2}\right|, \tag{50.12}$$

corespunzător spectrului din figura 50.1, *b*.

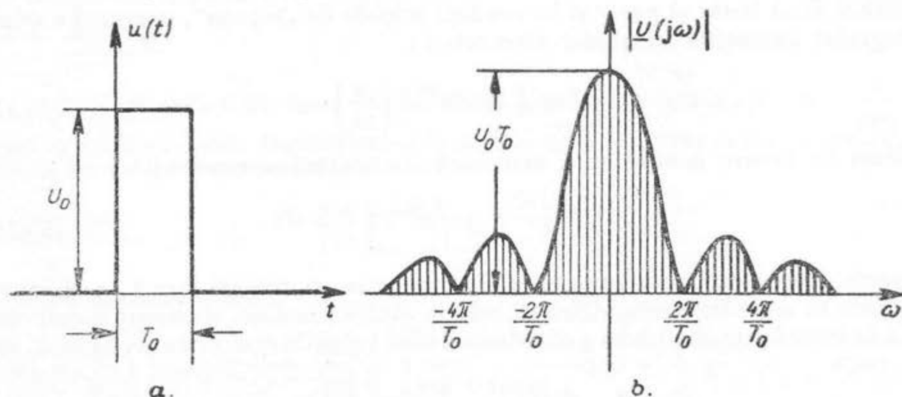


Fig. 50.1

50.3. Aplicarea descompunerii spectrale la studiul regimului tranzitoriu

Deoarece dezvoltarea în integrală Fourier (50.8) e interpretabilă ca o descompunere în componente armonice elementare, studiul regimului tranzitoriu se poate efectua generalizînd metoda suprapunerii efectelor, aplicată în cazul regimului permanent nesinusoidal (par. 48.2), *cu condiția ca circuitul să fie liniar, iar funcțiunile de timp care intervin să admită o transformată Fourier.*

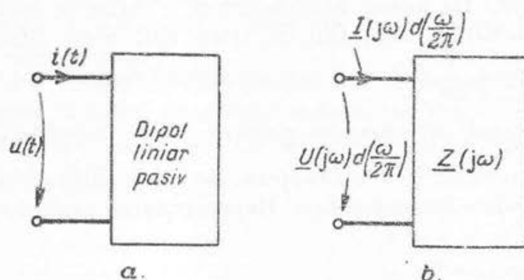


Fig. 50.2

Ultima condiție e realizată în cazul tensiunilor și curenților care sînt mărginiți, sînt nuli pentru $t < 0$ și tind către zero suficient de repede pentru $t \to \infty$. Această condiție nu e realizată în cazul existenței unui regim permanent periodic, cînd regimul tranzitoriu nu poate fi studiat pe această cale.

Considerăm, pentru exemplificare, un dipol liniar și pasiv (fig. 50.2, *a*), în condiții inițiale „de repaus" (toți curenții și toate tensiunile nule pentru $t < 0$), căruia i se aplică, la $t = 0$, tensiunea:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\mathrm{j}\,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega \tag{50.13}$$

și se cere curentul tranzitoriu

$$i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{I}(\mathrm{j}\,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega. \tag{50.14}$$

Circuitul fiind liniar și pasiv și în condiții inițiale de „repaus", curentul e suma (integrala) curenților armonici elementari:

$$\underline{\delta I} = \underline{I}\,(\mathrm{j}\,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right), \tag{50.15}$$

produși de fiecare componentă armonică elementară a tensiunii

$$\underline{\delta u} = \underline{U}(\mathrm{j}\,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \tag{50.16}$$

în parte. Deoarece aceste componente elementare au aceeași formă ca la reprezentarea în complex nesimplificată, relația dintre tensiune și curent e determinată de impedanța complexă a circuitului, fiind valabilă egalitatea (v. fig.50.2, *b*):

$$\underline{Z} = \underline{Z}\,(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{\underline{\delta U}}{\underline{\delta I}} = \frac{\underline{U}(\mathrm{j}\,\omega)}{\underline{I}(\mathrm{j}\,\omega)}, \tag{50.17}$$

Concluzie : Dacă se cunoaşte transformata Fourier a tensiunii

$$\underline{U}(\mathrm{j}\,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau, \tag{50.18}$$

din cunoaşterea impedanţei complexe şi a aplicării teoremei superpoziţiei rezultă transformata Fourier a curentului

$$\underline{I}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{\underline{U}(\mathrm{j}\,\omega)}{\underline{Z}(\mathrm{j}\,\omega)} \tag{50.19}$$

şi expresia instantanee a acestuia (din relaţia (50.14)) :

$$i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\underline{U}(\mathrm{j}\,\omega)}{\underline{Z}(\mathrm{j}\,\omega)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega. \tag{50.20}$$

În cazuri mai generale, metoda se aplică unui sistem de transmisiune diport liniar, pasiv (v. par. 45.2), a cărui mărime de intrare e

$$u_i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}_i(\mathrm{j}\,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega \tag{50.21}$$

şi pentru care se cere mărimea de ieşire

$$u_e(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}_e(\mathrm{j}\,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega. \tag{50.22}$$

Dacă $\underline{A}(\mathrm{j}\,\omega)$ e raportul de transmisiune al sistemului (v. par. 45.2), aplicarea metodei suprapunerii efectelor, în cazul unor condiţii iniţiale „de repaus", conduce la soluţia :

$$u_e(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\underline{U}_i(\mathrm{j}\,\omega)}{\underline{A}(\mathrm{j}\,\omega)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega \tag{50.23}$$

50.4. Aplicaţie

Fie circuitul R, C din figura 50.3, *a*, a cărui impedanţă complexă e $\underline{Z} = R + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}$ şi la care se aplică o impulsie dreptunghiulară de tensiune de forma (50.10), cu transformata Fourier (50.4). Rezultă pentru curent transformata :

$$\underline{I}(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{\underline{U}(\mathrm{j}\,\omega)}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C}} = \frac{CU_0(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_0})}{1 + \mathrm{j}\,\omega CR.}.$$

Curentul instantaneu este :

$$i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{I}(\mathrm{j}\,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega = \frac{CU_0}{2\pi\mathrm{j}}\left[\int_{-\mathrm{j}\infty}^{+\mathrm{j}\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{1 + \mathrm{j}\,\omega CR}\,\mathrm{d}(\mathrm{j}\,\omega) - \int_{+\mathrm{j}\infty}^{-\mathrm{j}\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t - T_0)}}{1 + \mathrm{j}\,\omega CR}\,\mathrm{d}(\mathrm{j}\,\omega)\right].$$

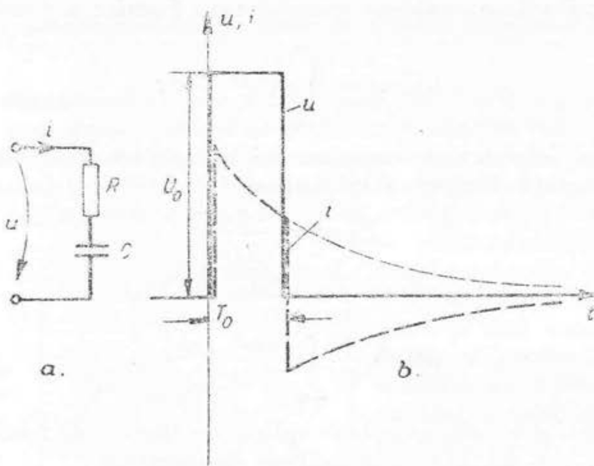


Fig. 50.3

Integralele se pot efectua cu metoda reziduurilor, introducînd variabila complexă $p = \sigma + j\omega$ şi efectuînd integrarea pe axa imaginară, completată cu un semicerc de rază infinită, astfel ales încît (în acord cu lema lui Jordan) să aducă o contribuţie nulă. Se obţine :

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t \leqslant 0 \\ \dfrac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{CR}} & \text{pentru } 0 < t \leqslant T_0 \\ \dfrac{U_0}{R}\left[e^{-\frac{t}{CR}} - e^{-\frac{t-T_0}{RC}}\right] & \text{pentru } t > T_0. \end{cases} \tag{50.24}$$

În figura 50.3, *b* sînt reprezentate variaţiile în timp ale tensiunii şi ale curentului la acest circuit.

51. METODA RĂSPUNSULUI TRANZITORIU (INTEGRALA DUHAMEL)

51.1. Funcţiunea de răspuns tranzitoriu

În numeroase aplicaţii interesează determinarea regimului tranzitoriu pentru o anumită mărime de ieşire $u_e(t)$, cînd unei reţele liniare şi pasive i se aplică o anumită mărime de intrare $u_i(t)$, în condiţii iniţiale „de repaus" (v. par. 45.2). În metoda răspunsului tranzitoriu se rezolvă în prealabil o pro-

blemă mai simplă, şi anume determinarea mărimii de ieşire, cînd mărimea de intrare e o *funcţiune treaptă unitate* (fig. 51.1, *a*)

$$\gamma(t)^1 = \begin{cases} 0 \text{ pentru } t \leqslant 0 \\ 1 \text{ pentru } t > 0 \end{cases} \quad (51.1)$$

Soluţia acestei probleme mai simple, adică funcţiunea

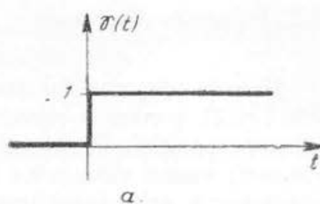
$$f(t) = u_e(t)\Big|_{u_i(t)=\gamma(t)} \quad (f(t) = 0 \text{ la } t < 0) \quad (51.2)$$

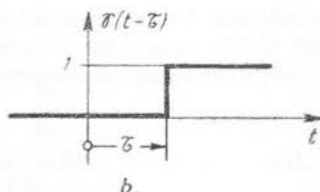
se numeşte *funcţiunea de răspuns tranzitoriu* a sistemului şi constituie o caracteristică a lui (caracteristica tranzitorie), tot aşa cum raportul de transmisiune (par. 45.2) constituie o caracteristică de regim permanent a sistemului. În prezentarea metodei vom avea nevoie şi de *funcţiunea treaptă unitate retardată* (fig. 51.1, *b*):

$$\gamma(t-\tau) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } t \leqslant \tau \\ 1 \text{ pentru } t > \tau \end{cases} \quad (51.3)$$

Se observă imediat că o funcţiune treaptă oarecare, cu amplitudinea A şi retardarea τ, e reprezentabilă prin expresia (fig. 51.1, *c*)

$$A\gamma(t-\tau) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } t \leqslant \tau \\ A \text{ pentru } t > \tau. \end{cases} \quad (51.4)$$





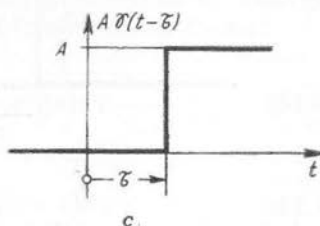


Fig. 51.1

În cazul unei reţele liniare, dacă f(t) e răspunsul pentru mărimea de intrare $\gamma(t)$, răspunsul pentru o mărime de intrare de forma (51.4) va fi, evident, mărimea de ieşire:

$$A f(t-\tau) \quad (51.5)$$

(care, conform cu 51.2, se anulează pentru $t < \tau$).

Exemplu: Considerăm circuitul *R, C* studiat în aplicaţia 50.4. În paragraful 32.2 am determinat curentul de regim tranzitoriu al acestui circuit, cînd, începînd cu momentul $t = 0$, i se aplică tensiunea constantă şi am obţinut (v. rel. 32.20):

$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0) \quad (51.6)$$

Dacă vom considera acest curent ca mărime de ieşire şi tensiunea aplicată la borne ca mărime de intrare, vom observa imediat că în cazul $U_0 = 1$, tensiunea aplicată e o funcţiune treaptă unitate. De aceea, funcţiunea de răspuns tranzitoriu corespunzătoare este

$$f(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0) \quad (51.7)$$

[1] Pentru funcţiunea treaptă unitate se mai utilizează notaţiile:

$$\mathbf{1}(t), \Upsilon(t), \varepsilon(t).$$

51.2. Integrala Duhamel

Metoda răspunsului tranzitoriu utilizează funcțiunea de răspuns tranzitoriu (51.2), pentru a construi soluția $u_e(t)$, nulă pentru $t<0$, folosind principiul superpoziției. De aceea și această metodă e aplicabilă (în forma prezentată aici) numai circuitelor liniare, pasive, cu condiții inițiale „de repaus". De data aceasta, orice funcțiune de timp (nulă pentru $t < 0$, continuă și derivabilă

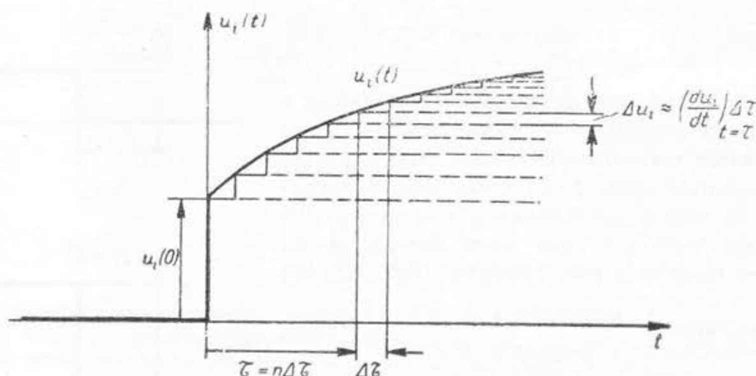


Fig. 51.2

pentru $t>0$), reprezentînd o mărime de intrare $u_i(t)$, se obține prin suprapunerea unei mulțimi infinite de funcțiuni treaptă, cu amplitudini și retardări convenabil alese (v. fig. 51.2), conform relației:

$$u_i(t) = u_i(+0)\gamma(t) + \int_0^t \left(\frac{du_i}{dt}\right)_{t=\tau} \gamma(t-\tau)\, d\tau. \, [1] \tag{51.8}$$

În adevăr, prima treaptă (neretardată) are amplitudinea $u_i(+0)$, iar celelalte sînt trepte elementare retardate cu $\tau < t$, de amplitudini:

$$\Delta u_i \approx \left(\frac{du_i}{dt}\right)_{t=\tau} \Delta\tau \longrightarrow \left(\frac{du_i}{dt}\right)_{t=\tau} d\tau = u_i'(\tau) d\tau, \tag{51.9}$$

adică de forma:

$$\left(\frac{du_i}{d\tau}\right)_{t=\tau} d\tau\ \gamma(t-\tau) = u_i'(\tau)\ \gamma(t-\tau) d\tau. \tag{51.10}$$

Se verifică imediat că, deoarece în expresia (51.8) $t > 0$ și $\tau < t$, se poate înlocui $\gamma(t-\tau)$ și $\gamma(t)$ cu 1 (v. 51.3), obținîndu-se identitatea:

$$u_i(t) = u_i(+0) + \int_0^t \frac{du_i}{d\tau} d\tau \equiv u_i(+0) + \int_0^t du_i \quad (t>0).$$

[1] Notația $g(+0)$ indică limita la dreapta, în origine, a funcțiunii oarecare $g(x)$.

Ţinînd seama de definiţia funcţiei de răspuns tranzitoriu (51.2), prima treaptă $u_i(+0)\gamma(t)$ a mărimii de intrare determină o mărime de ieşire

$$u_i(+0)\mathrm{f}(t), \tag{51.11}$$

iar fiecare dintre treptele elementare retardate (51.10) determină cîte o mărime de ieşire elementară de forma:

$$u_i'(\tau)\mathrm{f}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{51.12}$$

Conform teoremei superpoziţiei, aplicabilă reţelei liniare şi pasive considerate, mărimea de ieşire pentru cazul cînd se aplică mărimea de intrare (51.8) va fi obţinută adunînd expresia (51.11) cu integrala răspunsului elementar (51.12). Se obţine relaţia:

$$u_e(t) = u_i(+0)\mathrm{f}(t) + \int_0^t u_i'(\tau)\mathrm{f}(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{51.13}$$

numită *integrala Duhamel*. Prin integrare prin părţi şi schimbări de variabilă, integrala Duhamel se mai poate scrie sub una din următoarele forme:

$$u_e(t) = u_i(+0)\mathrm{f}(t) + \int_0^t u_i'(t-\tau)\mathrm{f}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{51.14}$$

$$u_e(t) = u_i(t)\mathrm{f}(+0) + \int_0^t u_i(\tau)\mathrm{f}'(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{51.15}$$

$$u_e(t) = u_i(t)\mathrm{f}(+0) + \int_0^t u_i(t-\tau)\mathrm{f}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{51.16}$$

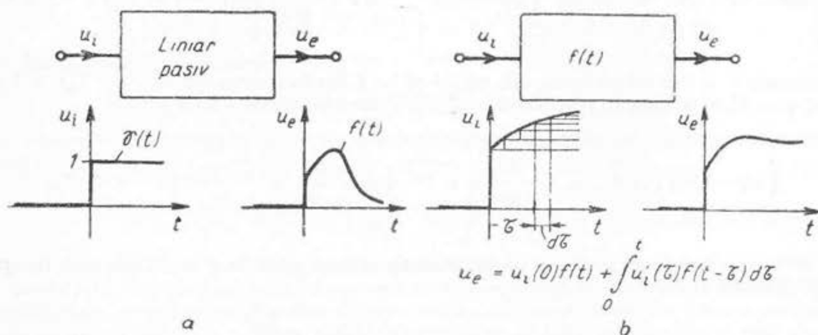


Fig. 51.3

Metoda răspunsului tranzitoriu consistă deci în următoarele:

1. Se determină funcţiunea de răspuns tranzitoriu a sistemului f(t), adică mărimea de ieşire pentru o mărime de intrare treaptă unitate neretardată (fig. 51.3, *a*). Pentru această operaţie se poate folosi orice altă metodă (de ex. metoda directă sau calculul operaţional — v. cap. 52).

2. Se determină mărimea de ieşire u(t), determinată de o mărime de intrare oarecare u(t), cu ajutorul oricăreia dintre integralele tip Duhamel (51.13), (51.14), (51.15), (51.16), (v. fig. 51.3, b).

Observaţii: *a)* Metoda se aplică numai sistemelor liniare şi pasive, în condiţii iniţiale de repaus. Spre deosebire de metoda descompunerii spectrale, în cazul acesta funcţiunile $u_i(t)$ şi $u_e(t)$ nu trebuie să fie absolut integrabile. De aceea, metoda permite şi considerarea cazului regimului tranzitoriu corespunzător unui regim permanent periodic.

b) În relaţiile de mai sus, f(+ 0) şi $u_i(+0)$ sînt considerate la $t = 0 + \varepsilon$, cu ε pozitiv şi arbitrar de mic.

c) Se poate arăta că formulele (51.15) şi (51.16) sînt aplicabile şi cînd $u_i(t)$ are discontinuităţi de prima specie.

Aplicaţie: Considerăm ca exemplu circuitul R, C studiat şi cu metoda precedentă (fig. 50.3). S-a văzut în exemplul din paragraful precedent că, în acest caz, funcţiunea de răspuns tranzitoriu este (51.7). Mărimea de intrare e, în acest caz, tensiunea aplicată u(t), dat de relaţia (50.10), care cu ajutorul funcţiunilor treaptă se exprimă analitic:

$$u(t) = U_0(\gamma(t) - \gamma(t - T_0)). \tag{51.17}$$

Mărimea de ieşire e în acest caz curentul i(t), care se poate calcula cu relaţia (51.16) (pentru a evita derivarea mărimii de intrare, care prezintă o discontinuitate de prima specie la $t = T_0$)

$$i(t) = u(t)\,\mathrm{f}(+0) + \int_0^t u(t-\tau)\mathrm{f}'(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{51.18}$$

În acest caz, cu (51.7),

$$\mathrm{f}(+0) = \mathrm{f}(0+\varepsilon) = \frac{1}{R} \quad \text{şi} \quad \mathrm{f}'(\tau) = -\frac{1}{R^2C}\,\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}, \tag{51.19}$$

aşa că

$$\int_0^t u(t-\tau)\mathrm{f}'(\tau)\mathrm{d}\tau = -\frac{U_0}{R^2C}\int_0^t \gamma(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}\,\mathrm{d}\tau + \frac{U_0}{R^2C}\int_0^t \gamma(t-\tau-T_0)\,\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}\,\mathrm{d}\tau.$$

Deoarece $\tau < t$ în prima integrală $\gamma(t-\tau) = 1$, iar în a doua $\gamma(t-\tau-T_0) = 1$ pentru $0 \leqslant \tau < t - T_0$ şi e nulă în rest. Dacă $t \leqslant T_0$, a doua integrală e nulă şi deci

$$\int_0^t u(t-\tau)\mathrm{f}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{U_0}{R^2C}\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}\,\mathrm{d}\tau = \frac{U_0}{R}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} - 1\right), \quad t \leqslant T_0.$$

Dacă $t > T_0$, a doua integrală se poate efectua numai pînă la $t - T_0$, în rest integrandul fiind nul. Rezultă:

$$\int_0^t u(t-\tau)\mathrm{f}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{U_0}{R}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} - 1\right) - \frac{U_0}{R}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t-T_0}{RC}} - 1\right), \quad t > T_0.$$

Ambele cazuri se pot scrie cu ajutorul funcţiunii treaptă, astfel:

$$\int_0^t u(t-\tau)\mathrm{f}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{U_0}{R}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} - 1\right)\gamma(t) - \frac{U_0}{R}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t-T_0}{RC}} - 1\right)\gamma(t - T_0). \tag{51.20}$$

Cu relaţiile (51.17), (51.19) şi (51.20), soluţia (51.18) se scrie :

$$i(t) = \frac{U_0}{R}(\gamma(t) - \gamma(t - T_0)) + \frac{U_0}{R}\left[\left(e^{-\frac{t}{RC}} - 1\right)\gamma(t) - \left(e^{-\frac{t-T_0}{RC}} - 1\right)\gamma(t - T_0)\right]$$

sau

$$i(t) = \frac{U_0}{R}\left[e^{-\frac{t}{RC}}\gamma(t) - e^{-\frac{t-T_0}{RC}}\gamma(t - T_0)\right]. \qquad (51.21)$$

Am obţinut exact soluţia (50.24), scrisă acum strîns cu ajutorul funcţiunii treaptă unitate.

52. METODA OPERAŢIONALĂ (TRANSFORMAREA LAPLACE)

Prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff în valori instantanee, la studiul circuitelor electrice liniare, se obţine un sistem de ecuaţii integro-diferenţiale liniare, relaţiile (36.5) şi (36.10), cu coeficienţi constanţi, în care necunoscutele sînt de obicei valorile instantanee ale curenţilor.

În regim permanent sinusoidal aceşti curenţi sînt complet determinaţi de valorile instantanee ale tensiunilor de alimentare. În capitolul 34 şi următoarele am arătat că rezolvarea sistemului de ecuaţii se simplifică în mod esenţial prin utilizarea reprezentării în complex a mărimilor sinusoidale, care asociază fiecărei asemenea mărimi $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$ o imagine în complex unică $\underline{I}$ prin regula

$$\mathcal{C}(I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)) = I\,e^{j\gamma} = \underline{I}, \qquad (52.1)$$

cu următoarele proprietăţi principale :

— biunivocitatea reprezentării, asigurată de **faptul** că şi fiecărei imagini complexe îi corespunde o singură mărime sinusoidală, prin regula

$$\mathcal{C}^{-1}(\underline{I})\, I \equiv Im\left\{\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\underline{I}\right\} = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \equiv i(t). \qquad (52.2)$$

— liniaritatea reprezentării :

$$\mathcal{C}(\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2) \equiv \lambda_1\mathcal{C}(i_1) + \lambda_2\mathcal{C}(i_2). \qquad (52.3)$$

— reprezentarea operaţiei de derivare printr-o operaţie algebrică : înmulţirea cu un număr (imaginar),

$$\mathcal{C}\left(\frac{di}{dt}\right) = j\,\omega\,\mathcal{C}(i). \qquad (52.4)$$

Avantajele pe care le prezintă metoda reprezentării în complex rezultă din aceste proprietăţi şi consistă în faptul că *sistemul de ecuaţii integro-diferenţiale, satisfăcute de valorile instantanee sinusoidale, se reprezintă biunivoc într-un sistem de ecuaţii algebrice liniare, satisfăcute de imaginile lor în complex.* Ca urmare, calculul circuitului se face mai simplu şi mai sistematic, rezolvînd acest sistem de ecuaţii algebrice (forma complexă — rel. 36.22 — a teoremelor lui Kirchhoff), determinînd astfel imaginile complexe ale funcţiunilor necunoscute şi, cu ajutorul reprezentării inverse (52.2), aceste funcţii însele.

O prescripţie de calcul $\mathcal{F}$, care asociază univoc fiecărei funcţiuni $i(t)$ dintr-o anumită clasă o anumită imagine $\mathcal{F}(i)$, se numeşte *operator*. Operatorul $\mathcal{C}$ al reprezentării în complex este un operator liniar, (proprietatea (52.3), care admite un *operator invers* $\mathcal{C}^{-1}$ (52.2), şi care are proprietatea remarcabilă (52.4) de a transforma derivarea într-o operaţie algebrică. Metoda reprezentării în complex este, în fond, un exemplu elementar de *metodă operaţională.*

În regim tranzitoriu, curenții sînt funcțiuni de timp dintr-o clasă mult mai largă, complet determinați atît de valorile instantanee ale tensiunilor (componentele forțate ale curenților) cît și de condițiile inițiale (componentele de regim liber ale curenților). Simplificarea rezolvării sistemului de ecuații integro-diferențiale ale circuitelor liniare se poate obține cu o metodă operațională, dacă se găsește un operator liniar $\mathfrak{L}$, care să asocieze biunivoc fiecărei funcțiuni de timp $i(t)$ din clasa dată o imagine $\mathfrak{L}(i)$, astfel încît operația de derivare a funcțiunii de timp să se transforme într-o operație algebrică liniară, efectuată asupra imaginii.

Dacă aceste condiții sînt îndeplinite, ecuațiile integro-diferențiale liniare ale circuitelor se vor reprezenta prin ecuații algebrice. Se pot extinde astfel la studiul regimului tranzitoriu avantajele utilizării calculului în complex de la studiul regimului permanent. Metoda operațională e deci o metodă de reprezentare simbolică (v. cap. 34).

Se arată că există mai mulți operatori care satisfac condițiile de mai sus, pentru diferite clase de funcțiuni de timp, susceptibile de a prezenta interes în problemele de electrotehnică. Astfel, de exemplu, metoda descompunerii spectrale (cap. 50) poate fi prezentată ca o metodă operațională, în care operatorul, definit de transformarea funcțională (50.7), asociază univoc fiecărei funcțiuni de timp $f(t)$ (pentru care există integrala Fourier — rel. 50.4) o imagine complexă $F(j\omega)$, funcțiune de o variabilă imaginară. E ușor de verificat că acest operator e liniar, că reprezentarea e biunivocă și că derivarea se transformă în înmulțirea cu $j\omega$. Clasa de funcțiuni de timp cărora li se poate aplica integrala Fourier e însă prea restrînsă, din cauza condițiilor (50.5) și (50.6), care exclud aplicarea acestei metode la regimuri tranzitorii, cu mărimi de regim permanent diferite de zero.

În electrotehnică se utilizează din ce în ce mai mult metoda operațională, în care operatorul $\mathfrak{L}$ e definit cu ajutorul unei transformări funcționale, numită *transformarea lui Laplace*. Această metodă e aplicabilă unei clase mult mai largi de funcțiuni de timp decît aceea susceptibilă de transformarea Fourier. Metoda se utilizează mai ales pentru studiul regimurilor tranzitorii ale circuitelor liniare cu parametri concentrați (în care apar ecuații diferențiale ordinare liniare, cu coeficienți constanți), dar se poate aplica și la studiul regimurilor tranzitorii în circuite liniare cu parametri repartizați, cum sînt liniile electrice lungi, studiate în capitolele următoare (în care apar ecuații cu derivate parțiale liniare și cu coeficienți constanți).

Deoarece cea mai simplă operație neliniară, înmulțirea a două funcțiuni de timp, nu se reprezintă prin înmulțirea imaginilor acestor funcțiuni, *metoda operațională prezentată aici nu e aplicabilă circuitelor neliniare.*

52.1. Transformarea Laplace și proprietățile ei

52.1.1. Funcțiunile original. Transformarea Laplace e definită de integrala :

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{52.5}$$

în care $f(t)$ e o funcțiune reală de timp, iar $p = \sigma + j\omega$ o variabilă complexă [1]. Se demonstrează convergența acestei integrale [2] dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :

a) Pentru $t > 0$, $f(t)$ să fie netedă pe porțiuni (v. nota de picior de la începutul paragrafului 47.1.1.).

[1] În acord cu notațiile uzuale, variabila complexă p și funcțiunile de această variabilă F(p), care sînt imaginile Laplace ale funcțiunilor de timp, nu vor fi subliniate. Caracterul lor complex e suficient precizat prin prezența simbolului p.

[2] Pentru detalii privitoare la transformarea Laplace și la calculul operațional se poate consulta lucrarea : M. I. Kontorovici, *„Calculul operațional și fenomenele tranzitorii în circuitele electrice"*, Ed. energetică de Stat, 1955.

b) Pentru $t > t_0 > 0$, f(*t*) să nu crească în modul mai repede decît o exponențială, adică să existe constantele pozitive A_0, σ_0 și t_0, astfel ca :

$$|f(t)| < A_0 e^{\sigma_0 t}, \text{ dacă } t > t_0. \tag{52.6}$$

c) Variabila complexă p să aibă partea reală suficient de mare, adică :

$$\sigma = \mathrm{Re}\{p\} > \sigma_a, \tag{52.7}$$

unde σ_a e marginea inferioară a constantelor σ_0, pentru care e satisfăcută condiția (52.6) (abscisa absolută de convergență a integralei).

Clasa funcțiunilor de timp pentru care se utilizează metoda operațională cu transformarea Laplace e definită în sens restrîns de condițiile *a* și *b* de mai sus și de intervalul de definiție al variabilei

$$0 \leqslant t \leqslant \infty. \tag{52.8}$$

Dacă această clasă se întregește și cu funcțiunea improprie a lui Dirac $\delta(t)$, studiată ca limită a impulsiei finite (v. par. 52.1.2) — deosebit de utilă pentru prezentarea fenomenelor tranzitorii în anumite circuite idealizate în care apar discontinuități — se obține o clasă de funcțiuni de timp suficient de largă pentru aplicațiile întîlnite în electrotehnică. Funcțiunile din această clasă se numesc *funcțiuni original*. În cele ce urmează presupunem că toate funcțiunile de timp care intervin sînt funcțiuni original.

52.1.2. **Funcțiunile imagine (transformatele Laplace).** Fiind dată o funcțiune original *f*(*t*), se numește *imagine Laplace* sau *transformată Laplace* a ei funcția F(p), de variabilă complexă p, univoc asociată primei prin expresia :

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \quad \text{cu } \mathrm{Re}\{p\} > \sigma_a. \tag{52.9}$$

Cînd $\mathrm{Re}\{p\} \leqslant \sigma_a$ și integrala (52.5) e divergentă imaginea Laplace e definită prin prelungirea analitică a funcțiunii de p, astfel obținută, (ceea ce înseamnă, practic, *prin expresia* în p obținută cu 52.9).

Transformata Laplace e astfel definită ca o funcțiune analitică de p în întreg planul complex, cu excepția singularităților care există în semiplanul $\mathrm{Re}\{p\} \leqslant \sigma_a$. Se demonstrează că această regulă de asociere e biunivocă, definind un operator notat cu simbolul $\mathfrak{L}$

$$F(p) = \mathfrak{L}[f(t)] = \mathfrak{L}[f], \tag{52.10}$$

care asociază fiecărei funcțiuni original f(*t*)(cu $t \geqslant 0$) o imagine complexă F(p)— și al cărui operator invers se notează cu simbolul $\mathfrak{L}^{-1}$.

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(p)] = \mathfrak{L}^{-1}[F] \tag{52.11}$$

și asociază fiecărei imagini complexe F(p) o funcțiune de timp f(*t*), univoc determinată pentru $t \geqslant 0$.

52.1.3. **Transformatoarele Laplace ale unor funcțiuni uzuale.** Folosind relația 52.9, calculăm imaginile unor funcțiuni frecvent întîlnite în studiul regimurilor tranzitorii.

1. *Imaginea unei constante.* Pentru o constantă C, luînd $\sigma_a = 0$ și $\operatorname{Re}\{p\} > 0$, rezultă :

$$\mathfrak{L}[C] = \int_0^\infty C\, e^{-pt} dt = -\frac{C}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty$$

sau

$$\mathfrak{L}[C] = \frac{C}{p}. \tag{52.12}$$

În particular,

$$\mathfrak{L}[0] = 0. \tag{52.12'}$$

Se observă că, în acest caz, integrala e divergentă pentru $\operatorname{Re}\{p\} \leqslant 0$. Expresia (52.12) definește însă univoc o funcțiune analitică de p în tot planul complex, cu excepția originii unde are un pol.

2. *Imaginea funcțiunii treaptă unitate* $\gamma(t)$. Deoarece pentru $t > 0$, funcțiunea treaptă (51.1), e o constantă de valoare unitate,

$$\mathfrak{L}[\gamma(t)] = \int_0^\infty \gamma(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}. \tag{52.13}$$

3. *Imaginea unei exponențiale.* Pentru funcțiunea exponențială $e^{\alpha t}$ se obține :

$$\mathfrak{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{\alpha t}\, e^{-pt}\, dt = -\frac{1}{\alpha - p} e^{(\alpha-p)t} \Big|_0^\infty .$$

Considerînd $\operatorname{Re}\{p\} > \alpha$, se obține imaginea căutată :

$$\mathfrak{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{p-\alpha} \tag{52.14}$$

și, în acest caz, integrala e divergentă pentru $\operatorname{Re}\{p\} \leqslant \alpha$, dar expresia (52.14) definește univoc o funcțiune analitică de p în întreg planul complex, cu excepția punctului $p = \alpha$, unde are un pol.

4. *Imaginile funcțiunilor* sin ωt, cos ωt, ch at, sh at se obțin simplu, exprimînd aceste funcțiuni prin funcțiuni exponențiale. De exemplu,

$$\mathfrak{L}[\sin \omega t] = \int_0^\infty \sin \omega t\, e^{-pt}\, dt = \frac{1}{2j} \int_0^\infty [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}]\, e^{-pt}\, dt.$$

Calculînd integrala pentru $\operatorname{Re}\{p\} > 0$, rezultă imaginea :

$$\mathfrak{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \tag{52.15}$$

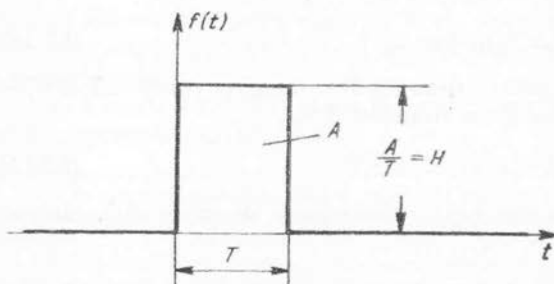


Fig. 52.1

5. *Imaginea impulsiei dreptunghiulare finite, neretardate.* O impulsie dreptunghiulară finită neretardată (fig. 52.1) e definită de condițiile :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t \leqslant 0 \text{ și pentru } t > T, \\ \dfrac{A}{T} = H & \text{pentru } 0 < t \leqslant T \end{cases} \tag{52.16}$$

unde T e durata impulsiei, $H = \dfrac{A}{T}$ amplitudinea impulsiei, iar A inte-

grala ei. Se observă că impulsia dreptunghiulară finită se poate exprima cu ajutorul funcţiunii treaptă unitate $\gamma(t)$ sub forma:

$$H\,[\gamma(t) - \gamma\,(t-T)] = \frac{A}{T}\,[\gamma(t)-\gamma(t-T)]. \qquad (52.16')$$

Imaginea acestei impulsii rezultă:

$$\mathfrak{L}[H\gamma(t)-H\gamma(t-T)] = H\int_0^T e^{-pt}\,dt = H\,\frac{1-e^{-pT}}{p} = A\,\frac{1-e^{-pT}}{pT}. \qquad (52.17)$$

Dacă integrala (aria) impulsiei dreptunghiulare e egală cu unitatea $A = 1$, se obţine impulsia unitate finită (neretardată), de durată finită T şi amplitudine 1/T, notată $\delta_T(t)$

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\,[\gamma(t) - \gamma(t-T)]. \qquad (52.18)$$

Imaginea impulsiei unitate finite rezultă:

$$\mathfrak{L}[\delta_T(t)] = \frac{1-e^{-pT}}{pT} \qquad (52.18')$$

6. *Imaginea impulsiei delta (Dirac)*. În aplicaţii interesează adesea cazul limită idealizat al impulsiei dreptunghiulare, de durată $\Delta\,T$ extrem de scurtă, $\Delta\,T \to 0$ şi infinit de înaltă $\left(H = \frac{1}{\Delta T} \to \infty\right)$, avînd arie finită şi egală cu unitatea (fig. 52.2). Acest caz limită defineşte o funcţiune improprie — numită şi *impulsie delta* sau funcţiunea delta a lui Dirac sau funcţiunea *impulsie unitate*, notată $\delta\,(t)$ — cu care se poate opera corect, dacă se efectuează calculele cu impulsia unitate finită şi se trece la limită numai în expresiile finale. Formal se scrie:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta T \to 0} \delta_{\Delta T}\,(t). \qquad (52.19)$$

Imaginea rezultă din relaţia (52.18') prin aplicarea regulii lui L'Hôpital:

$$\mathfrak{L}\,[\delta(t)] = \lim_{\Delta T \to 0} \mathfrak{L}[\delta_{\Delta T}\,(t)] = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{1-e^{-p\Delta T}}{p\Delta T} = 1. \qquad (52.20)$$

În tabela 52.1 se indică imaginile unor funcţiuni de timp, care intervin frecvent în studiul circuitelor.

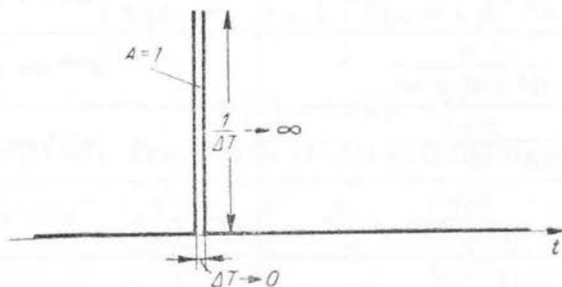


Fig. 52.2

Tabela 52.1.

	$\mathcal{L}$ [f(t)]	f (t)
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{p}$	$1, \gamma(t)$
3	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
4	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$t e^{-at}$
5	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
6	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab}+\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{b}e^{-bt}-\frac{1}{a}e^{-at}\right)$
7	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}\left(be^{-bt}-ae^{-at}\right)$
8	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$
9	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
10	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\mathrm{sh}\, at$
11	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\mathrm{ch}\, at$
12	$\frac{1}{p^2+\omega^2}(p \cos b-\omega \sin b)$	$\cos(\omega t+b)$
13	$\frac{1}{p^2+\omega^2}(p \sin b+\omega \cos b)$	$\sin(\omega t+b)$
14	$\frac{\omega}{(p^2+a^2)+\omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$
15	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$
16	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$	$t \sin \omega t$
17	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	$t \cos \omega t$

Tabela 52.1. *(continuare)*

	$\mathfrak{L}[f(t)]$	$f(t)$
18	$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$
19	e^{-pT}	$\delta(t-T)$
20	$\frac{1}{p} e^{-pT}$	$\gamma(t-T)$
21	$\frac{1}{p+a} e^{-pT}$	$\gamma(t-T)\, e^{-a(t-T)}$
22	$\frac{1}{p}\left(1-e^{-pT}\right)$	$T\delta_T(t) = \gamma(t) - \gamma(t-T)$

52.1.4. **Corespondenţa operaţiilor fundamentale prin transformarea Laplace.** Operaţiile fundamentale cu funcţiuni de timp care intervin în ecuaţiile circuitelor sînt înmulţirea cu un scalar, adunarea, derivarea şi integrarea. Prezentăm operaţiile corespunzătoare cu imagini pe care le implică corespondenţa biunivocă stabilită de transformarea Laplace.

1. *Transformata Laplace a sumei a două (sau mai multe) funcţiuni de timp e egală cu suma transformatelor fiecăreia în parte.* În adevăr;

$$\int_0^\infty (f_1(t) + f_2(t))e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty f_1(t)e^{-pt}\, dt + \int_0^\infty f_2(t)e^{-pt}\, dt$$

adică:

$$\mathfrak{L}[f_1 + f_2] = \mathfrak{L}[f_1] + \mathfrak{L}[f_2], \tag{52.21}$$

în analogie cu (34.63').

2. *Transformata Laplace a produsului dintre o constantă λ şi o funcţiune de timp e egală cu produsul dintre acea constantă şi transformata funcţiunii.* În adevăr;

$$\int_0^\infty \lambda f(t)e^{-pt} \cdot dt = \lambda \int_0^\infty f(t)e^{-pt} \cdot dt$$

adică:

$$\mathfrak{L}[\lambda f] = \lambda\, \mathfrak{L}[f], \tag{52.22}$$

în analogie cu (34.64'). Proprietăţile (52.21) şi (52.22) se prezintă strîns prin relaţia:

$$\mathfrak{L}\left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, \mathfrak{L}\left[f_k\right], \tag{52.23}$$

care exprimă proprietatea de liniaritate a transformării Laplace (teorema liniarităţii).

3. *Transformata Laplace a derivatei unei funcțiuni de timp e egală cu produsul imaginii funcțiunii prin p, mai puțin valoarea inițială a funcțiunii (teorema derivării).* În adevăr, integrînd prin părți, se obține :

$$\mathfrak{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-pt}\, dt = f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty fe^{-pt}\, dt = p\int_0^\infty fe^{-pt}\, dt - f(0),$$

deoarece observînd condițiile (52.6) și (52.7), rezultă (cu Re $\{p\} = \sigma$)

$$\lim_{t\to\infty} |\, f(t)e^{-pt} \,| \geqslant A_0 \lim_{t\to\infty} |\, e^{-(p-\sigma_a)t} \,| = A_0 \lim_{t\to\infty} e^{-(\sigma-\sigma_a)t} = 0.$$

Așadar :

$$\mathfrak{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\, \mathfrak{L}[f] - f(0). \tag{52.24}$$

În cazul unei derivate de ordinul (n) se obține, aplicînd de n ori regula de mai sus, relația :

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = \mathfrak{L}[f^n] = p^n \mathfrak{L}[f] - p^{n-1} f(o) - p^{n-2} f^{(1)}(o) \ldots\ldots - f^{n-1}(o). \tag{52.25}$$

În cazul condițiilor inițiale „de repaus“ $f(0) = 0$ și din (52.24) rezultă :

$$\mathfrak{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\, \mathfrak{L}[f]\,. \tag{52.26}$$

Adică, derivarea funcțiunii original în raport cu timpul se reprezintă prin înmulțirea imaginii cu variabila complexă p (în analogie cu 34.65').

4. *Transformata Laplace a integralei în* (0,t) *a unei funcțiuni de timp e egală cu produsul imaginii funcțiunii prin* $\frac{1}{p}$ *(teorema integrării).* În adevăr, dacă

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau, \tag{52.27}$$

avem $\frac{dg}{dt} = f(t)$ și $g(0) = 0$. Cu (52.24 rezultă atunci :

$$\mathfrak{L}[f] = \mathfrak{L}\left[\frac{dg}{dt}\right] = p\mathfrak{L}[g],$$

de unde cu relația (52.27)

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p}\, \mathfrak{L}[f]. \tag{52.28}$$

Integrarea funcțiunii original în timp de la 0 la t se reprezintă prin împărțirea imaginii cu variabila complexă p (în analogie cu 34.67').

Teoremele de mai sus arată că transformarea Laplace îndeplinește condițiile cerute de a asigura reprezentarea ecuațiilor integro-diferențiale ale circuitelor prin ecuații algebrice.

52.1.5. Alte teoreme privind transformarea Laplace

1. *Teorema retardării (a întîrzierii)* : Dacă $\varphi(t)$ e o funcțiune original identic nulă pentru $t \leqslant 0$ [1], atunci imaginea funcțiunii retardate (v. fig. 52.3) se obține din imaginea funcțiunii neretardate f (t), prin înmulțirea cu cu $e^{-p\tau}$:

$$\mathfrak{L}[\varphi(t-\tau)] = e^{-p\tau}\,\mathfrak{L}[\varphi(t)],\ \text{cu}\ \varphi(t) = 0\ \text{dacă}\ t \leqslant 0. \tag{52.29}$$

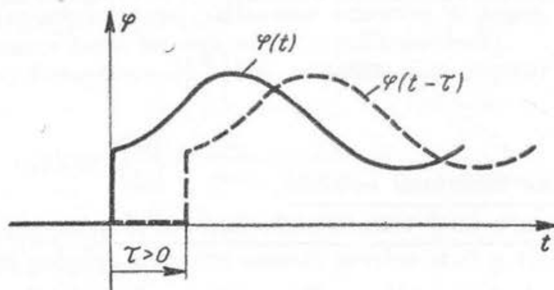


Fig. 52.3

În adevăr, deoarece $\varphi(t-\tau) = 0$ pentru $t \leqslant \tau$

$$\mathfrak{L}[\varphi(t-\tau)] = \int_0^\infty \varphi(t-\tau)e^{-pt}\,dt = \int_{t=\tau}^\infty \varphi(t-\tau)e^{-p(t-\tau)}\,e^{-p\tau}\,dt =$$

$$= e^{-p\tau}\int_{\xi=0}^\infty \varphi(\xi)\,e^{-p\xi}\,d\xi = e^{-p\tau}\,\mathfrak{L}[\varphi(t)].$$

2. *Teorema deplasării* : Dacă F(p) e o imagine, atunci funcțiunea $F(p+\lambda)$ e imaginea produsului dintre originalul lui F(p) și $e^{-\lambda t}$

$$\mathfrak{L}[e^{-\lambda t} f(t)] = F(p+\lambda)\ \text{dacă}\ \mathfrak{L}(f) = F(p). \tag{52.30}$$

În adevăr,

$$\mathfrak{L}[e^{-\lambda t} f(t)] = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(p+\lambda)t}\,dt = F(p+\lambda),$$

dacă

$$\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt = F(p).$$

3. *Teorema lui Borel (a produsului, a înfășurării, a convoluției)*: Produsul imaginilor $F_1(p)$ și $F_2(p)$ a două funcții $f_1(t)$ și $f_2(t)$ e imaginea funcțiunii

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau, \tag{52.31}$$

[1] O astfel de funcțiune de timp se obține din orice funcțiune f(t) dată în $-\infty < t < \infty$ prin înmulțire cu funcțiunea treaptă unitate $\gamma(t)$, (v. rel. 51.1).

adică

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right] = \mathfrak{L}[f_1]\cdot\mathfrak{L}[f_2] = F_1(p)\cdot F_2(p)\ ^{1} \qquad (52.32)$$

4. *Teorema asemănării:* Schimbarea variabilei t cu at corespunde împărțirii variabilei p și a întregii imagini cu a:

$$\mathfrak{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\, F\left(\frac{p}{a}\right). \qquad (52.33)$$

52.2. Determinarea funcțiunii original corespunzătoare unei transformate Laplace date

52.2.1. Metode de inversiune. Determinarea funcțiunii original corespunzătoare unei transformate Laplace date se mai numește inversiunea transformării Laplace. Principalele metode de inversiune, în ordinea utilizării lor în aplicații, sînt următoarele:

1. *Folosirea tabelelor de transformări.* Datorită caracterului biunivoc al transformării, toate funcțiunile original identice pentru $t \geqslant 0$ au aceeași imagine și, reciproc, toate funcțiunile cu aceeași imagine sînt identice pentru $t \geqslant 0$. O primă posibilitate de determinare a funcțiunilor original consistă în folosirea unor tabele de corespondențe, care conțin imaginile calculate ale unui mare număr de funcțiuni original (cum e, în particular, tabela 52.1). Folosirea tabelelor se completează cu utilizarea teoremelor prezentate în paragraful 52.1.3. și 52.1.4.

2. *Teoremele dezvoltării ale lui Heaviside.* În cazul cînd funcțiunea imagine e raportul a două polinoame (în variabila p), din care numărătorul are un grad mai mic, se descompune această imagine în fracții simple (v. mai jos par. 52.2.2).

3. *Formula de inversiune Mellin-Fourier* (numită și formula Riemann-Mellin). În cazul general, funcțiunea original f(t), cu $t \geqslant 0$, care are ca imagine o funcțiune F(p) dată, analitică în semiplanul Re $\{p\} \geqslant \sigma_0$, este

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(p)e^{pt}\, dp, \qquad (52.34)$$

integrarea făcîndu-se de-a lungul dreptei Re $\{p\} = \sigma_0$, care lasă la stînga ei [2] toate singularitățile funcțiunii imagine.

52.2.2. Teorema dezvoltării (prima formă). Considerăm cazul în care imaginea e raportul a două polinoame prime între ele, gradul polinomului de la numitor fiind mai mare decît gradul polinomului de la numărător și polinomul

[1] Pentru demonstrație a se consulta M. I. Kontorovici, lucrarea citată.

[2] Pentru demonstrație și indicații de utilizare se poate consulta M. I. Kontorovici, lucrarea citată.

de la numitor avînd n rădăcini (zerouri) simple p_k, evident diferite de cele ale polinomului de la numărător :

$$F(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)} \tag{52.35}$$

(prin împărţire, raportul a două polinoame oarecare se poate aduce la această formă după separarea unui termen aditiv : polinomul-cît).

În acest caz, funcţiunea imagine se poate descompune într-o sumă de fracţii raţionale :

$$F(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)} = \frac{C_1}{p-p_1} + \frac{C_2}{p-p_2} + ... + \frac{C_n}{p-p_n}.$$

Pentru a calcula coeficienţii C_k ai acestei descompuneri, se formează produsul $(p - p_k)\frac{P_1(p)}{P_2(p)}$ şi se calculează limita acestui produs cînd p tinde către p_k, aplicînd regula lui L'Hôpital. Se obţine :

$$\lim_{p \to p_k}\left[(p - p_k)\frac{P_1(p)}{P_2(p)}\right] = P_1(p_k) \lim_{p \to p_k} \frac{p - p_k}{P_2(p)} = P_1(p_k)\frac{1}{P_2'(p_k)} = C_k.$$

Introducînd aceste valori ale coeficienţilor C_k în descompunerea în fracţii raţionale, rezultă relaţia :

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_1(p_k)}{P_2'(p_k)} \frac{1}{p-p_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_1(p_k)}{P_2'(p_k)} \mathfrak{L}\,[e^{p_k t}],$$

în care am notat :

$$P_2'(p_k) = \left(\frac{dP_2}{dp}\right)_{p = p_k}$$

şi am folosit relaţia (52.14), cu $\alpha = p_k$. Aplicînd teorema liniarităţii, relaţia (52.23), se obţine :

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{L}\left[\frac{P_1(p_k)}{P_2'(p_k)} e^{p_k t}\right] = \mathfrak{L}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{P_1(p_k)}{P'(p_k)} e^{p_k t}\right]$$

sau

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_1(p_k)}{P_2'(p_k)} e^{p_k t} = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{P_1(p_k)}{P_2(p_k)}\right]}. \tag{52.36}$$

Această relaţie se numeşte prima formă a teoremei dezvoltării (a lui Heaviside).

52.2.3. **Teorema dezvoltării (a doua formă).** Considerăm cazul particular în care polinomul $P_2(p)$ are o rădăcină nulă şi deci se poate pune sub forma :

$$P_2(p) = p\,P_3(p),$$

în care rădăcinile polinomului P_3 sînt p_k, cu $k = 1, 2,..., n - 1$.

Pentru găsirea funcţiunii original, aplicăm prima formă a teoremei (52.36), observînd că $P_2'(p) = p\,P_3'(p) + P_3(p)$; $P_2'(0) = P_3(0)$ şi $P_2'(p_k) = p_k P_3'(p_k)$, deoarece $P_3(p_k) = 0$, cu $k < n$.

Cu aceste valori relaţia (52.36) devine:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_1(p_k)}{P_2'(p_k)} e^{p_k t} = \boxed{\frac{P_1(0)}{P_3(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_1(p_k)}{p_k P_3'(p_k)} e^{p_k t} = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{P_1(p)}{p\,P_3(p)}\right]}. \quad (52.37)$$

Această relaţie se numeşte a doua formă a teoremei dezvoltării (a lui Heaviside).

52.3. Aplicarea transformării Laplace la studiul unor regimuri tranzitorii

Din egalitatea celor doi membri ai unei ecuaţii integro-diferenţiale rezultă egalitatea imaginilor acestor membri. Pentru ecuaţii integro-diferenţiale liniare şi cu coeficienţi constanţi, această ultimă egalitate, pe baza teoremelor liniarităţii, derivării şi integrării, se exprimă sub forma unei relaţii liniare între imaginile funcţiunilor care intervin în ecuaţia integro-diferenţială dată. Ca urmare, determinarea imaginilor funcţiunilor necunoscute se poate face prin rezolvarea unor ecuaţii algebrice. După aflarea imaginilor funcţiilor necunoscute, cu ajutorul metodelor expuse în paragraful 52.2 se determină funcţiunile de timp corespunzătoare acestor imagini; aceste funcţiuni de timp reprezintă soluţiile căutate, care satisfac atît ecuaţiile integro-diferenţiale cît şi condiţiile iniţiale date.

Exemple: 1. *Se consideră circuitul inductiv* din fig. 52.4, *a*, care pentru $t < 0$ e parcurs de curentul continuu $I_0 = \frac{U_0}{2R}$. În momentul $t = 0$ se închide întreruptorul care scurt circuitează elementele R,L. Ecuaţia acestui circuit pentru $t > 0$ este:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0.$$

Aplicăm transformarea Laplace acestei ecuaţii, folosind teorema liniarităţii (52.23) şi a derivării (52.24):

$$\mathfrak{L}\left[Ri + L\frac{di}{dt}\right] = R\mathfrak{L}[i] + L(p\mathfrak{L}[i] - i(0)) \quad (52.38)$$

şi cu $i(0) = I_0 = U_0/2R$ se obţine ecuaţia operaţională (între imagini) a circuitului:

$$(R + pL)\,\mathfrak{L}[i] = L\,i\,(0) = \frac{L}{2R}U_0.$$

Din această ecuaţie rezultă imaginea curentului (funcţia necunoscută):

$$\mathfrak{L}[i] = \frac{\frac{L}{2R}U_0}{R + pL} = \frac{U_0}{2R}\cdot\frac{1}{p + \frac{R}{L}}. \quad (52.39)$$

Din tabela de transformări (52.1 poz. 3) și cu (52.22) rezultă curentul instantaneu :

$$i(t) = \frac{U_0}{2R} e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{cu } \tau = \frac{L}{R}, \tag{52.40}$$

reprezentat grafic in figura 52.4, b (de observat continuitatea curentului pentru $t = 0$).

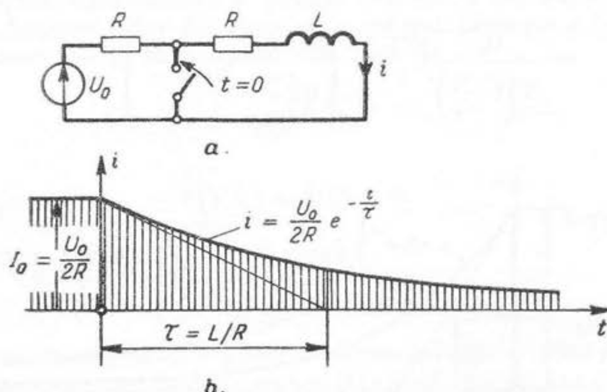


Fig. 52.4

2. *Se consideră circuitul capacitiv* din figura 52.5, a, al cărui condensator e încărcat cu sarcina Q_0, pentru $t \leqslant 0$. În momentul $t = 0$ se închide întreruptorul, aplicîndu-se circuitului tensiunea

$$u = U_0 \, e^{-\frac{t}{\tau_0}} \qquad \text{cu } U_0 > Q_0/C), \tag{52.41}$$

reprezentată în figura 52.5, b. Ecuația circuitului pentru $t > 0$ este

$$u = Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i \, dt + \frac{q(0)}{C} \qquad (\text{cu } q(0) = Q_0)\,. \tag{52.42}$$

Aplicăm transformarea Laplace acestei ecuații, folosind teorema liniarității (52.23) și a integrării (52.28). Se obține ecuația operațională (între imagini) a circuitului :

$$\mathfrak{L}(u) - \mathfrak{L}\left(\frac{Q_0}{C}\right) = \left(R + \frac{1}{Cp}\right) \mathfrak{L}(i),$$

in care imaginile termenilor din membrul stîng se pot calcula cu relațiile, (52.41), (52.12), (52.14) și (52.22). Se obține astfel imaginea curentului (funcția necunoscută) în care am notat $\tau = RC$

$$\mathfrak{L}(i) = \frac{U_0}{R} \frac{p}{\left(p + \frac{1}{\tau_0}\right)\left(p + \frac{1}{\tau}\right)} - \frac{Q_0}{\tau\left(p + \frac{1}{\tau}\right)}. \tag{52.43}$$

Folosind teorema liniarității (52.23) și prima formă a teoremei dezvoltării (52.36) — (sau poz. 3 și 7 din tabela de transformări 52.1), se obține valoarea instantanee a curentului:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \frac{1}{\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}} \left[\frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\right] - \frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau_0}} =$$

$$= \frac{U_0}{R\left(1-\frac{\tau_0}{\tau}\right)} e^{-\frac{t}{\tau_0}} - \left(\frac{U_0}{R\left(\frac{\tau}{\tau_0}-1\right)} + \frac{Q_0}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (52.44)$$

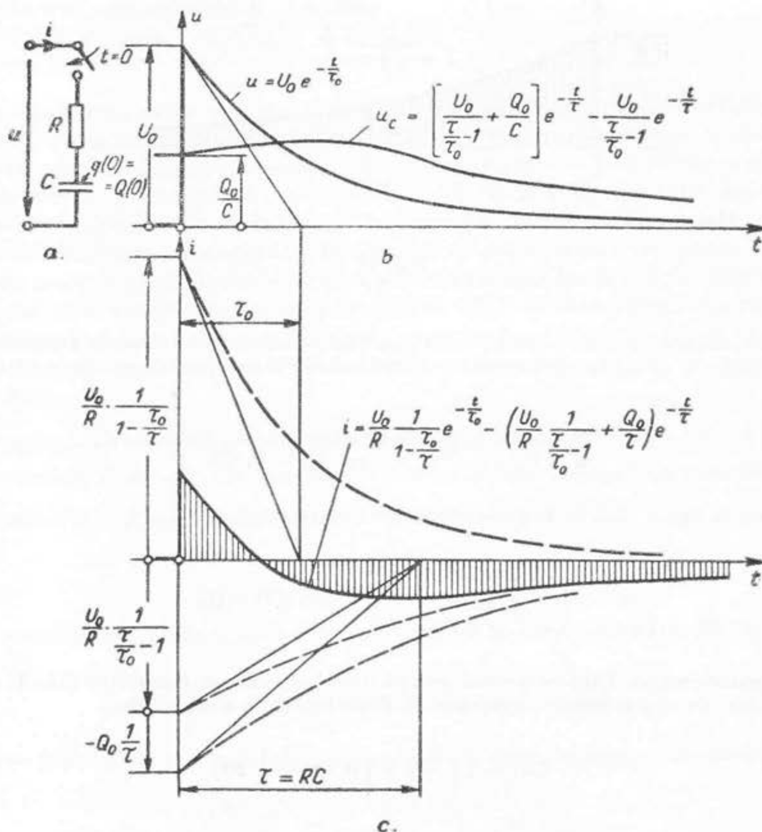


Fig. 52.5

În figura 52.5,*c* e reprezentată grafic evoluția curentului, iar în figura 52.5.*b*, evoluția tensiunii $u_c = u - Ri$ de la bornele condensatorului (de observat discontinuitatea curentului i și continuitatea tensiunii u_c pentru $t = 0$).

52.4. Forma operaţională a teoremelor lui Kirchhoff

În aplicaţii, calculul se sistematizează scriind direct ecuaţiile operaţionale care exprimă relaţiile dintre imaginile curenţilor şi tensiunilor. În acest scop, în electrotehnică se utilizează formele operaţionale ale teoremelor lui Kirchhoff.

52.4.1. Forma operaţională a primei teoreme a lui Kirchhoff. Aplicînd transformarea Laplace celor doi membri ai primei teoreme a lui Kirchhoff în valori instantanee (36.5), scrisă pentru un nod (b)

$$\sum_{k\in(b)} i_k = 0, \tag{52.45}$$

se obţine

$$\mathfrak{L}[\sum_{k\in(b)} i_k] = \mathfrak{L}[0] = 0.$$

Conform teoremei liniarităţii (52.23) rezultă:

$$\sum_{k\in(b)} \mathfrak{L}\,[i_k] = 0. \tag{52.46}$$

Aceasta e forma operaţională a primei teoreme a lui Kirchhoff: *suma algebrică a imaginilor curenţilor care ies dintr-un nod* (b) *e nulă.* Notînd imaginile curenţilor:

$$\mathfrak{L}\,[i_k] = I_k(\mathrm{p}),$$

forma operaţională a primei teoreme a lui Kirchhoff se scrie:

$$\boxed{\sum_{k\in(b)} I_k(\mathrm{p}) = 0}\,. \tag{52.47}$$

52.4.2. Forma operaţională a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff. Aplicînd transformarea Laplace celor doi membri ai celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff în valori instantanee (36.8), scrisă pentru un ochi (q):

$$\sum_{m\in(q)} e_m = \sum_{m\in(q)} (u_{R_m} + u_{C_m} + u_{L_m}) \tag{52.48}$$

se obţine cu relaţia (52.33)

$$\sum_{m\in(q)} \mathfrak{L}\,[e_m] = \sum_{m\in(q)} \left[\mathfrak{L}[u_{R_m}] + \mathfrak{L}[u_{C_m}] + \mathfrak{L}[u_{L_m}]\right]. \tag{52.49}$$

Căderile de tensiune se exprimă, în funcţie de curenţi, prin relaţiile:

$$u_{R_m} = Ri_m,\quad u_{C_m} = \frac{1}{C_m}\int_0^t i_m \mathrm{d}t + \frac{q_m(0)}{C_m},\quad u_{L_m} = \frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = \sum_{s=1}^{L} L_{m_s}\frac{\mathrm{d}i_s}{\mathrm{d}t}. \tag{52.50}$$

Imaginea căderii de tensiune rezistive rezultă din relaţia (52.22):

$$\mathfrak{L}[u_{R_m}] = R_m \mathfrak{L}[i_m]. \tag{52.51}$$

Imaginea căderii de tensiune capacitive rezultă din relaţia (52.22), (52.28) şi (52.12):

$$\mathfrak{L}\,[u_{C_m}] = \frac{1}{\mathrm{p}C_m}\mathfrak{L}[i_m] + \frac{q_m(0)}{\mathrm{p}C_m}, \tag{52.52}$$

unde q_m (0) e valoarea inițială a sarcinii condensatorului din latura m. Imaginea căderii de tensiune inductive rezultă din relațiile (52.23) și (52.24):

$$\mathfrak{L}[u_{L_m}] = \mathrm{p}\,\mathfrak{L}[\Phi_m] - \Phi_m(0) = \sum_{s=1}^{L} \mathrm{p}L_{ms}\,\mathfrak{L}[i_s] - \Phi_m(0), \tag{52.53}$$

unde cazul $m = s$ corespunde inductivității proprii $L_{mm} = L_m$, cazul $m \neq s$, inductivităților mutuale, iar $\Phi_m(0) = \sum_{s=1}^{L} L_{ms} i_s(0)$ e valoarea inițială a fluxului bobinei din latura m.

Observînd analogia formală cu forma complexă a ecuațiilor din cazul regimului permanent, mărimile:

$$Z_{R_m}(\mathrm{p}) = R_m; \quad Z_{C_m}(\mathrm{p}) = \frac{1}{\mathrm{p}C_m}; \qquad Z_{L_m}(\mathrm{p}) = \mathrm{p}L_m \tag{52.54}$$

se numesc impedanțele operaționale proprii ale elementelor de circuit considerate, iar

$$\boxed{Z_{ms}(\mathrm{p}) = \mathrm{p}L_{ms}} \tag{52.55}$$

impedanța operațională de cuplaj magnetic (mutuală) dintre bobinele m și s.

Înlocuind în relația (52.49) expresiile operaționale ale căderilor de tensiune și trecînd în membrul stîng termenii determinați de condițiile inițiale din (52.52) și (52.53), se obține relația:

$$\sum_{m\in(q)} \left[\mathfrak{L}[e_m] + \Phi_m(0) - \frac{1}{\mathrm{p}C_m} q_m(0)\right] = \sum_{m\in(q)} \left[\left(R_m + \mathrm{p}L_m + \frac{1}{\mathrm{p}C_m}\right)\mathfrak{L}[i_m] + \sum_{j=1}^{L} \mathrm{p}L_{ms}\mathfrak{L}[i_s]\right]. \tag{52.56}$$

Cu relația (52.55) și notînd cu

$$\boxed{Z_{mm}(\mathrm{p}) = Z_m(\mathrm{p}) = R_m + \mathrm{p}\,L_m + \frac{1}{\mathrm{p}C_m}} \tag{52.57}$$

impedanța operațională proprie a laturii m se obține, pentru forma operațională a celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff, expresia:

$$\sum_{m\in(q)} \left[\mathfrak{L}[e_m] + \Phi_m(0) - \frac{q_m(0)}{\mathrm{p}C_m}\right] = \sum_{m\in(q)} \left[Z_m(\mathrm{p})\,\mathfrak{L}[i_m] + \sum_{s=1}^{L} Z_{ms}(\mathrm{p})\mathfrak{L}[i_s]\right] \tag{52.58}$$

sau

$$\sum_{m\in(q)} \left[\mathfrak{L}[e_m] + \Phi_m(0) - \frac{q_m(0)}{\mathrm{p}C_m}\right] = \sum_{m\in(q)} \sum_{s=1}^{L} Z_{ms}(\mathrm{p})\mathfrak{L}[i_s]. \tag{52.59}$$

Fiecare termen din membrul stîng se numește tensiune electromotoare operațională echivalentă a laturii considerate, se notează :

$$\boxed{E_{e_m}(\mathrm{p}) = \mathfrak{L}[e_m] + \Phi_m(0) - \frac{q_m(0)}{\mathrm{p}C_m}} = E_m(\mathrm{p}) + E_{mo}(\mathrm{p}) \qquad (52.60)$$

și cuprinde, pe lîngă imaginea Laplace a t.e.m. instantanee $E_m(\mathrm{p})$ și t.e.m., operaționale echivalente condițiilor inițiale $E_{mo}(\mathrm{p})$, corespunzătoare valorilor inițiale ale fluxurilor bobinelor și sarcinilor condensatoarelor :

$$\boxed{E_{mo}(\mathrm{p}) = \Phi_m(0) - \frac{q_m(0)}{pC_m}}. \qquad (52.61)$$

Aceste t.e.m. operaționale echivalente sînt nule în cazul condițiilor inițiale „de repaus"

$$\Phi_m(0)=0, \quad q_m(0)=0, \rightarrow E_{mo}(\mathrm{p})=0. \qquad (52.62)$$

În figura 52.6 sînt reprezentate schemele echivalente operaționale ale elementelor ideale pasive de circuit, în care apar și surse fictive corespunzătoare t.e.m. operaționale echivalente condițiilor inițiale. Notînd imaginile curenților $\mathfrak{L}[i_s] = I_s(\mathrm{p})$, cu (52.60), forma operațională a teoremei a doua a lui Kirchhoff devine :

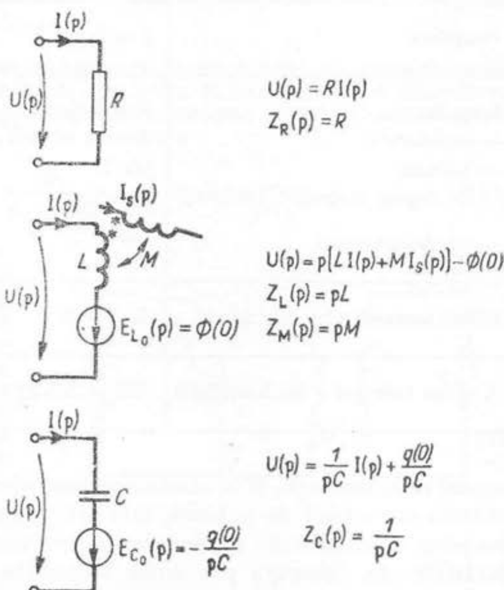


Fig. 52.6

$$\sum_{m\in(q)} E_{e_m}(\mathrm{p}) = \sum_{m\in(q)} \sum_{s=1}^{L} Z_{ms}(\mathrm{p}) I_s(\mathrm{p}) \quad (s = 1,2,\ldots m,\ldots L) \qquad (52.63)$$

și se enunță : *Pentru orice ochi (q), suma algebrică a tensiunilor electromotoare operaționale (inclusiv cele echivalente condițiilor inițiale) e egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune operaționale.*

Din cele de mai sus se observă că, după introducerea în serie cu fiecare bobină și fiecare condensator a surselor fictive cu t.e.m. operaționale echivalente condițiilor inițiale, se realizează o analogie formală completă cu forma complexă a ecuațiilor lui Kirchhoff (36.22) de la regimul permanent sinusoidal. Corespondența dintre mărimile și relațiile utilizate în cele două metode este redată în tabela 52.2

Ca urmare a acestei corespondențe, metodele și teoremele cunoscute din cadrul studiului în complex al circuitelor în regim sinusoidal se pot extinde,

Tabela 52.2.

Mărimea sau relația	Reprezentarea în complex	Metoda operațională
Mărimea instantanee	$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$	$i(t)$, funcțiune original.
Imaginea	$\underline{I} = Ie^{j\gamma}$	$\mathfrak{L}[i] = I(p) = \int_0^{\infty} i(t)e^{-pt}dt$
Impedanța — rezistorului — bobinei — de cuplaj magnetic (m ≠ s) — condensatorului	$\underline{Z} = Z(j\omega)$ R $j\omega L$ $j\omega L_{ms}$ $\frac{1}{j\omega C}$	$Z(p)$ R pL pL_{ms} $\frac{1}{pC}$
Prima teoremă a lui Kirchhoff	$\Sigma\,\underline{I} = 0$	$\Sigma\, I(p) = 0$
A doua teoremă a lui Kirchhoff	$\Sigma E = \Sigma\Sigma \underline{Z}\underline{I}$	$\Sigma E(p) = \Sigma\Sigma Z(p)I(p)$

formal neschimbate, și la studiul regimurilor tranzitorii cu metoda operațională : metoda curenților de ochiuri, metoda potențialelor de noduri, teoremele impedanțelor echivalente, teoremele generatoarelor echivalente, teoremele transfigurărilor etc. Singura precauție deosebită se referă la luarea în considerare a condițiilor inițiale prin tensiunile electromotoare operaționale echivalente lor. Dacă însă se studiază rețele în condiții inițiale „de repaus" (rel. 52.62), *toate relațiile liniare stabilite în studiul rețelelor de curent alternativ sinusoidal între reprezentările în complex ale tensiunilor și curenților rămîn valabile între imaginile Laplace ale tensiunilor și curenților, dacă se înlocuiesc impedanțele complexe prin impedanțe operaționale.*

52.5. Metoda operațională de rezolvare a circuitelor în regim tranzitoriu

52.5.1. **Metoda generală.** Ținînd seama de cele stabilite în paragraful precedent, metoda de rezolvare operațională a circuitelor electrice liniare cuprinde următoarele etape :

a) Se formează schema echivalentă operațională a circuitului cu sursele fictive corespunzătoare condițiilor inițiale (52.61) și sursele date. În schemă, mărimile se notează de obicei cu simbolurile operaționale.

b) Se aplică forma operațională (52.47) și (52.63) a ecuațiilor lui Kirchhoff, obținîndu-se ecuațiile operaționale ale circuitului și se rezolvă aceste ecuații în raport cu imaginile funcțiunilor necunoscute.

c) Se calculează imaginile funcţiunilor de timp date (de obicei tensiunile electromotoare) cu transformarea directă (52.9), cu teoremele din paragrafele 52.1.3 şi 52.1.4, sau cu tabelele de transformări; se introduc aceste imagini în expresiile imaginilor funcţiunilor necunoscute, obţinîndu-se astfel, explicit, ca funcţiuni de variabila p aceste imagini.

d) Se determină funcţiunile de timp necunoscute cu metodele de inversiune (par. 52.2.1), căutînd funcţiunile original corespunzătoare imaginilor determinate la sfîrşitul etapei precedente.

52.5.2. **Aplicaţie la scrierea ecuaţiilor operaţionale pentru o reţea cu anumite condiţii iniţiale date.** Considerăm reţeaua din fig. 52.7,*a*, în care la $t < 0$, întreruptorul K fiind deschis, se stabileşte un regim permanent sub acţiunea sursei de tensiune electromotoare constantă $e_1 = E_0$. Curenţii continui stabiliţi în reţea sînt în acest caz:

$$I_1 = I_2 = I_0 = \frac{E_0}{E_1 + R_2}, \quad I_3 = I_4 = 0. \qquad (52.64)$$

Presupunînd că pentru $t < 0$ condensatorul C era încărcat (în circuit deschis) cu sarcina Q_0 şi că în momentul $t = 0$ se închide întreruptorul K (fig. 52.7, *b*), se cere să se scrie ecuaţiile operaţionale necesare determinării imaginilor $I_1(\mathrm{p})$, $I_2(\mathrm{p})$, $I_3(\mathrm{p})$, $I_4(\mathrm{p})$, ale tuturor curenţilor din reţea. Conform relaţiei (52.61) şi a condiţiilor iniţiale arătate, în schema echivalentă operaţională apar următoarele t.e.m. operaţionale echivalente acestor condiţii iniţiale

$$E_{20}(\mathrm{p}) = \Phi_2(0) = L_2 i_2(0) + L_{23} i_3(0) = L_2 I_0$$

$$E_{30}(\mathrm{p}) = \Phi_3(0) = L_3 i_3(0) + L_{32} i_2(0) = = L_{32} I_0 = L_{23} I_0$$

$$E_{40}(\mathrm{p}) = -\frac{q_4(0)}{\mathrm{p}C_4} = -Q_0/\mathrm{p}C_4. \qquad (52.65)$$

Deoarece imaginea sursei date din latura 1 este (cu relaţia 52.12):

$$E_1(\mathrm{p}) = \mathfrak{L}[e_1] = \mathfrak{L}[E_0] = \frac{E_0}{\mathrm{p}}, \qquad (52.66)$$

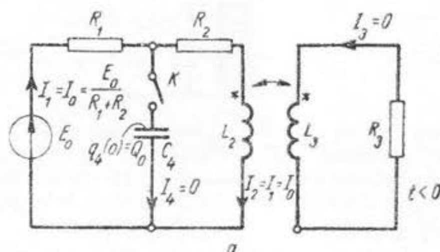
se obţine schema operaţională din figura 52.7, *c*, cu ecuaţiile de mai jos scrise pentru nodul (1), respectiv pentru ochiurile (1), (2), (3):

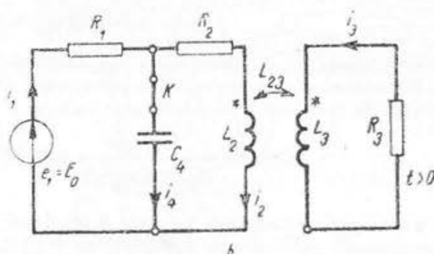
$$I_1(\mathrm{p}) - I_2(\mathrm{p}) - I_4(\mathrm{p}) = 0$$

$$\frac{E_0}{\mathrm{p}} - \frac{Q_0}{\mathrm{p}C_4} = R_1 I_1(\mathrm{p}) + \frac{1}{\mathrm{p}C_4} I_4(\mathrm{p})$$

$$L_2 I_0 + \frac{Q_0}{\mathrm{p}C_4} = -\frac{1}{\mathrm{p}C_4} I_4(\mathrm{p}) + + (R_2 + \mathrm{p}L_2) I_2(\mathrm{p}) + \mathrm{p}L_{23} I_3(\mathrm{p}) \qquad (52.67)$$

$$L_{23} I_0 = (R_3 + \mathrm{p}L_3) I_3(\mathrm{p}) + \mathrm{p}L_{23} I_2(\mathrm{p}).$$





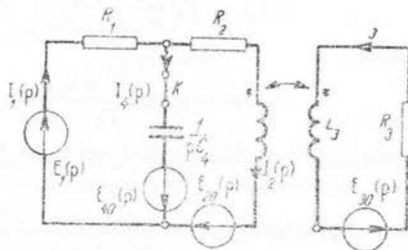


Fig. 52.7

Dacă se rezolvă aceste ecuaţii în raport cu $I_1(p)$, $I_2(p)$, $I_3(p)$, $I_4(p)$, se pot deduce valorile instantanee ale curenţilor :

$$i_1(t) = \mathfrak{L}^{-1}(I_1(p)),\quad i_2(t) = \mathfrak{L}^{-1}(I_2(p)),\quad i_3(t) = \mathfrak{L}^{-1}(I_3(p)),\quad i_4(p)=\mathfrak{L}^{-1}(I_4(p)) \qquad (52.68)$$

cu teorema dezvoltării.

52.5.3. **Aplicaţie la utilizarea formei operaţionale a teoremei generatorului echivalent (Thevenin.)** Considerăm un transformator, cu dispersiune magnetică neglijabilă ($L_{12} = \sqrt{L_1L_2}$)

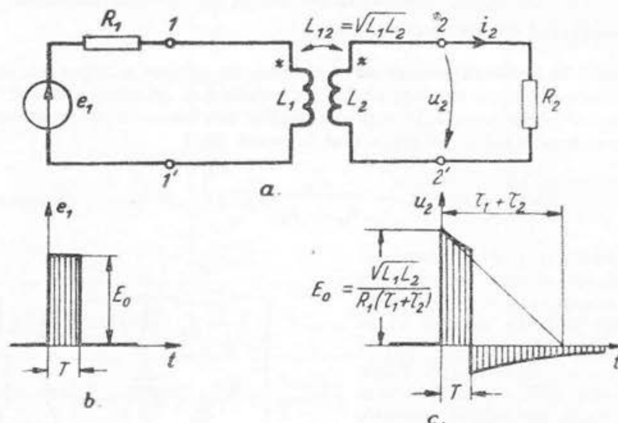


Fig. 52.8

şi cu rezistenţe neglijabile ale înfăşurărilor (fig. 52.8, *a*), alimentat la bornele de intrare 1, 1′ cu un generator de rezistenţă interioară R_1, care produce impulsii dreptunghiulare de tensiune de forma (fig. 52.8, *b*) :

$$e_1 = E_0[\gamma(t)-\gamma(t-T)] = E_0 T\delta_T(t). \qquad (52.69)$$

Se cere tensiunea de ieşire $u_2 = R_2 i_2$ la bornele rezistenţei de sarcină R_2.

În baza analogiei prezentate în paragraful 52.4.3 se poate aplica în acest caz teorema generatorului de tensiune echivalent sub forma

$$I_2(p) = \frac{U_{20}(p)}{R_2 + Z_{22'0}'(p)} \quad \text{sau} \quad U_2(p) = R_2 I_2(p) = R_2 \frac{U_{20}(p)}{R_2 + Z_{22'0}'(p)}, \qquad (52.70)$$

în care $U_{20}(p)$ e imaginea Laplace a tensiunii secundare de mers în gol, iar $Z_{22'}'(p)$ e impedanţa operaţională echivalentă a reţelei (cu bornele 2, 2′) pasivizate. Deoarece în complex am avea (v. şi calculul analog pentru rel. 38.21)

$$\underline{U}_{20} = \underline{E}_1 \frac{j\,\omega L_{12}}{R_1 + j\,\omega L_1}; \quad \underline{Z}_{22'0}' = j\,\omega L_2 + \frac{(j\,\omega L_{12})^2}{R_1 + j\,\omega L_1},$$

rezultă

$$U_{20}(p) = E_1(p)\frac{p L_{12}}{R_1 + pL_1}; \quad Z_{22'0}'(p) = pL_2 - \frac{p^2 L_{12}^2}{R_1 + pL_1}. \qquad (52.71)$$

Cu relaţia (52.70) se obţine (ţinînd seama că $L_{12}^2 = L_1L_2$)

$$U_2(p) = R_2 E_1(p) \frac{pL_{12}}{(R_2 + pL_2)(R_1 + pL_1) - p^2L_{12}^2} = E_1(p)\frac{p\dfrac{\sqrt{L_1L_2}}{R_1(\tau_1+\tau_2)}}{p+\dfrac{1}{\tau_1+\tau_2}}, \qquad (52.72)$$

unde am notat

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}, \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2}. \tag{52.73}$$

Imaginea tensiunii electromotoare (52.69) este (v. rel. 52.17):

$$E_1(\mathrm{p}) = \frac{E_0}{\mathrm{p}}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{p}T}) \tag{52.74}$$

și imaginea explicită a tensiunii de ieșire rezultă:

$$U_2(\mathrm{p}) = E_0 \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R_1(\tau_1 + \tau_2)} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{p}T}}{\mathrm{p} + \frac{1}{\tau_1 + \tau_2}}. \tag{52.75}$$

Cu teorema liniarității (52.23), a retardării (52.29) și cu (52.14) rezultă funcția original (reprezentată în fig. 52.8, c):

$$\mathrm{u}_2(t) = E_0 \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R_1(\tau_1 + \tau_2)} \left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1 + \tau_2}} - \gamma(t - T)\,\mathrm{e}^{-\frac{t - T}{\tau_1 + \tau_2}} \right] \tag{52.76}$$

52.5.4. **Studiul regimului tranzitoriu prin separarea componentei de regim permanent.** În numeroase probleme regimul permanent se poate determina fără dificultăți cu metodele cunoscute și e preferabil să se utilizeze calculul operațional numai pentru studiul regimului liber, cu condițiile inițiale corespunzătoare acestui regim. Ecuațiile operaționale ale re-

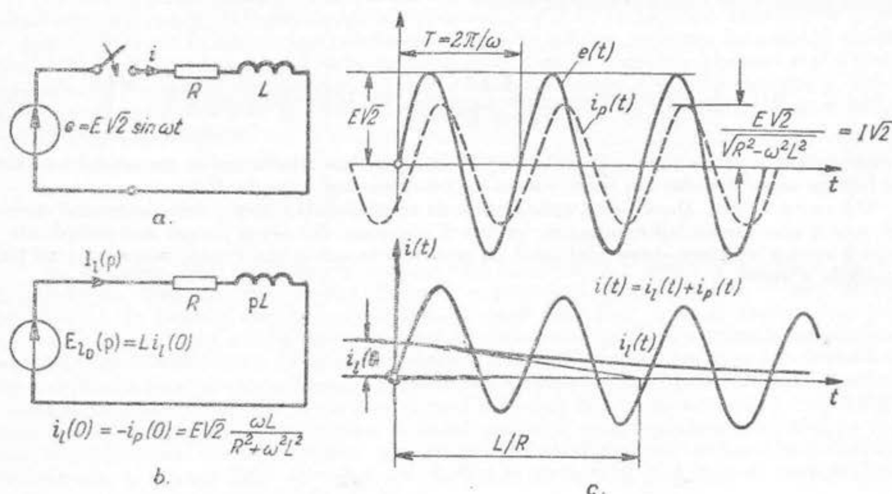


Fig. 52.9

gimului liber sînt ecuațiile obținute prin anularea imaginilor t.e.m. ale generatoarelor și prin introducerea t.e.m. operaționale echivalente condițiilor inițiale pentru componentele de regim liber ale curenților.

Studiem, ca exemplu, un circuit R, L (fig. 52.9, a), căruia în momentul $t = 0$ i se aplică tensiunea sinusoidală

$$e = E\sqrt{2}\sin\omega t \tag{52.77}$$

înainte de aplicarea tensiunii circuitul fiind în repaus: i(0) = 0. Deoarece, în general $i(t) = i_p(t) + i_l(t)$, unde

$$i_p(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi) \quad \text{cu} \quad \sin\varphi = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}. \tag{52.78}$$

e curentul de regim permanent, rezultă pentru curentul de regim liber valoarea inițială:

$$i_l(0) = i(0) - i_p(0) = -i_p(0) = \frac{E\sqrt{2}\sin\varphi.}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}. \tag{52.79}$$

Schema operațională echivalentă pentru curentul de regim liber e reprezentată în figura 52.9,*b* și e obținută din schema inițială a circuitului, pasivizînd-o și introducînd apoi o sursă fictivă cu t.e.m. operațională echivalentă $E_{l0}(p) = Li_l(0)$ corespunzătoare condiției inițiale (52.79). Rezultă imaginea curentului de regim liber:

$$I_l(p) = \frac{E_{l0}(p)}{R + pL} = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin\varphi \frac{1}{p + \frac{L}{R}} = L[i_l]. \tag{52.80}$$

Cu relația (52.14) se obține valoarea instantanee a acestui curent

$$i_l(t) = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin\varphi\, e^{-\frac{t}{\frac{L}{R}}}. \tag{52.81}$$

Curentul instantaneu total are deci expresia:

$$i(t) = i_p(t) + i_l(t) = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin\varphi\, e^{-\frac{t}{\frac{L}{R}}} \right] \tag{52.82}$$

și e reprezentat în figura 52.9, *c*. De subliniat că, în regim tranzitoriu, curba curentului nu e simetrică față de axa absciselor din cauza componentei aperiodice de regim liber.

Observație: Dacă s-ar fi aplicat metoda operațională ecuației care determină curentul total, s-ar fi ajuns la același rezultat cu un calcul mai lung, din cauza formei mai complicate pe care ar fi avut-o imaginea curentului total, ca urmare a expresiei mai complicate a imaginii t.e.m. sinusoidale a sursei.

LINII ELECTRICE LUNGI

53. LINII LUNGI ÎN REGIM TRANZITORIU

Am studiat pînă acum circuite electrice filiforme, cu parametri concentrați (v. par. 31.3), adică acele circuite care admit scheme echivalente, constituite din elemente ideale de circuit (r. L, C) strict localizate. Din punctul de vedere al ecuațiilor cîmpului electromagnetic, acest mod de prezentare reprezintă o aproximație cu atît mai bună, cu cît viteza de variație a stărilor (și deci frecvența) e mai mică și cu cît dielectricul care mărginește conductoarele e mai bun izolant.

În adevăr, aproximația parametrilor concentrați caracterizează în primul rînd regimul cuasistaționar (v. cap. 31), adică regimul în care nu se ia în considerare curentul de deplasare (v. par. 31.1), decît în dielectricul condensatoarelor. Ca urmare, valoarea intensității curentului electric de conducție se conservă în lungul unui conductor neramificat și perfect izolat (teorema continuității) — ceea ce corespunde neglijării vitezei de variație a sarcinii electrice q, localizate pe suprafața conductorului, și deci a intensității curentului de deplasare printr-o suprafață ce înconjoară conductorul

$$i_D = \frac{d\psi}{dt} = \iint_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, d\mathbf{A} = \frac{dq}{dt}.$$

În al doilea rînd, aproximația parametrilor concentrați e asociată neglijării pierderilor de curent de conducție prin mediul dielectric — niciodată perfect izolant — care înconjoară conductorul. În limitele acestor aproximații, în cazul unei linii cu două conductoare paralele (fig. 53.1), curentul are același sens și aceeași intensitate i prin toate secțiunile transversale ale fiecăruia dintre conductoare. Ca urmare, tensiunea electrică în lungul fiecăruia dintre conductoare e proporțională cu acest curent, ceea ce permite definirea unei rezistențe echivalente, concentrate, a celor două conductoare. De asemenea, cîmpul magnetic $\mathbf{H}$ e în fiecare punct proporțional cu intensitatea i a curentului; ca urmare, și fluxul magnetic prin suprafața sprijinită pe conductoare e proporțional cu acest curent, ceea ce permite definirea unei inductivități echivalente, concentrate, a întregii linii. De aceea am studiat în paragraful 35.6 linia de curent alternativ cu schema echivalentă din figura 35.14, *b*.

În numeroase aplicații întîlnite în tehnică, aproximația parametrilor concentrați nu e însă valabilă.

În electroenergetică, respectiv în telecomunicațiile pe fire, transmisiunea la distanțe mari a energiei electromagnetice, respectiv a semnalelor electromagnetice, se face cu ajutorul unor sisteme de conductoare filiforme paralele, cu lungimea foarte mare față de distanța dintre ele, numite *linii electrice lungi*.

În cele ce urmează vom considera astfel de linii *bifilare* (cu două conductoare) şi *omogene* (cu proprietăţi de material şi configuraţie geometrică invariabile în lungul lor). La frecvenţe nu prea joase şi la lungimi suficient de mari, curentul

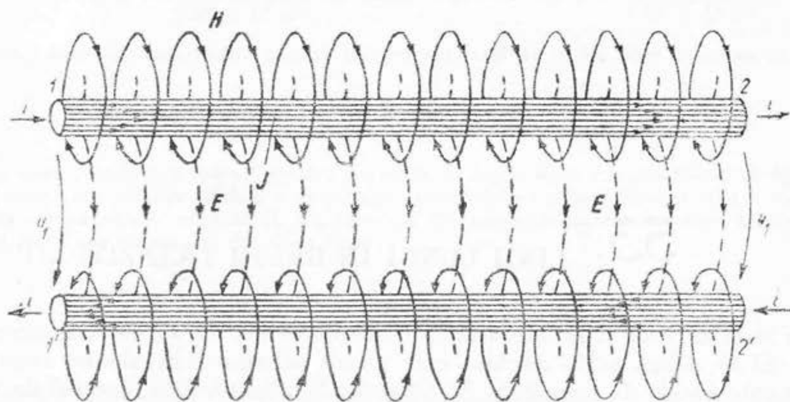


Fig. 53.1

de deplasare şi curentul de pierderi prin dielectric, care, în condiţii în rest egale, sînt proporţionali cu suprafaţa conductoarelor şi deci cu lungimea liniei, nu mai pot fi neglijaţi. Ca urmare, curentul de conducţie nu mai are aceeaşi intensitate în lungul fiecăruia dintre conductoare.

Teorema continuităţii nu se mai poate utiliza acum sub forma (31.10). Înlocuind în legea IX a conservării sarcinii (v. par. 31.1) valoarea sarcinii în funcţiune de fluxul electric (legea II), se observă că, în cazul general, se anulează fluxul prin suprafeţe închise al vectorului

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

adică

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{J}_t \, d\mathbf{A} = \iint_{\Sigma} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{A} = 0.$$

Vectorul $\mathbf{J}_t$, numit *densitatea curentului total*, e egal cu suma dintre densitatea curentului de conducţie $\mathbf{J}$ şi densitatea curentului de deplasare $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

Teorema continuităţii rămîne deci valabilă numai pentru curentul total şi numai liniile vectorului $\mathbf{J}_t$ trebuie să fie linii (practic)[1] închise. În figura 53.2

[1] Condiţia de anulare a fluxului printr-o suprafaţă închisă (şi deci a divergenţei) nu impune, de fapt, închiderea propriu-zisă a liniilor de cîmp, ci numai faptul că, urmărind suficient de mult o linie de cîmp, fără puncte la infinit, se ajunge oricît de aproape de punctul de la care s-a plecat.

sînt schițate liniile de cîmp ale vectorilor $\mathbf{J}_t$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ la propagarea unei unde armonice pe o linie electrică lungă. Se observă că, în acest caz, liniile de curent (total) se închid prin dielectricul de conductivitate σ și permitivitate ε, în care densi-

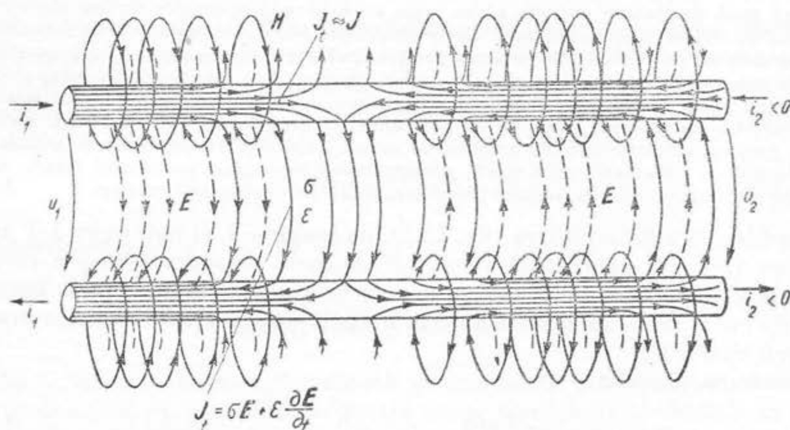


Fig. 53.2

tatea curentului de pierderi $\sigma\,\mathbf{E}$ și a curentului de deplasare $\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ nu se mai neglijează. Datorită acestui fapt, curentul are diferite valori în lungul liniei și poate să-și schimbe eventual sensul.

53.1. Parametrii primari ai liniilor electrice lungi (parametrii lineici)

Deoarece studiul fenomenelor care au loc pe liniile lungi nu se mai poate face în regim cvasistaționar, ar trebui să se apeleze la ecuațiile lui Maxwell pentru cîmpul electromagnetic (v. cap. 29, vol. I). Studiul mai complicat, dar exact, efectuat pe această cale arată că aceste fenomene reprezintă una dintre modalitățile de propagare ale *undelor electromagnetice ghidate*.

Dacă frecvența nu e prea mare, se poate adopta însă următorul punct de vedere intermediar : se ține seama de curentul de deplasare transversal, care se închide între conductoare, ca și de curentul de pierderi transversal prin izolație ; se neglijează însă componentele longitudinale ale acestor curenți, și deci contribuția acestor componente longitudinale la producerea cîmpului magnetic. În aceste condiții, în fiecare plan transversal al liniei se păstrează relațiile din regimul cvasistaționar, între mărimile localizate în acest plan.

De exemplu, cîmpul magnetic, ale cărui linii închise sînt conținute în plane transversale, e proporțional cu curentul i din conductor, din dreptul acestor linii de cîmp, deoarece se neglijează componenta longitudinală a curenților din dielectric, care ar putea să contribuie la circulația cîmpului magnetic în lungul unei linii de cîmp ; de aceea și fluxul magnetic $\Delta\Phi$, printr-o suprafață ΔS, sprijinită de conductoare și corespunzătoare unei porțiuni de lungime foarte mică Δx a liniei, e proporțional cu intensitatea curentului din conductoare, din dreptul acestei

porţiuni, ceea ce permite definirea unei inductivităţi $\Delta L = \frac{\Delta\Phi}{i}$ a acelei porţiuni. În mod analog se poate defini o capacitate ΔC între porţiunile corespunzătoare ale celor două conductoare, o conductanţă ΔG a izolaţiei dielectricului dintre ele şi o rezistenţă ΔR a lor.

Acest mod de tratare permite să se evite rezolvarea problemelor liniilor electrice lungi din punctul de vedere al teoriei undelor electromagnetice (ceea ce ar complica foarte mult calculele) şi permite să se explice proprietăţile acestor linii — cu o aproximaţie suficientă în practică — din punctul de vedere al teoriei circuitelor electrice, mai familiar inginerului electrician. Întreaga linie apare astfel echivalentă unei succesiuni de cuadripoli cu parametri concentraţi, şi aproximaţia e cu atît mai bună, cu cît porţiunile Δx considerate sînt mai mici. De aceea se consideră porţiunile elementare, de lungime dx infinit mică, iar întreaga linie se prezintă ca un circuit electric cu parametri repartizaţi, caracterizabil local prin parametrii locali, raportaţi la unitatea de lungime a liniei, numiţi parametri lineici sau parametri primari.

Considerăm o linie bifilară (fig. 53.3), de lungime l, şi notăm cu 1,1′ bornele de intrare (dinspre generator) şi cu 2,2′ bornele de ieşire (dinspre receptor). Notăm cu x distanţa elementului curent de lungime dx al liniei de la bornele de intrare (şi cu $x' = l - x$ distanţa de la bornele de ieşire). Se definesc următorii *parametri lineici* :

Rezistenţa lineică :

$$R_l = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2 \frac{\Delta u_f}{i \Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x} \qquad \left[\frac{\Omega}{\mathrm{m}}\right]. \tag{53.1}$$

Aici, Δu_f e căderea de tensiune din lungul uneia dintre porţiunile de conductor, pe lungimea Δx, i e curentul din conductor din dreptul acelei porţiuni, iar ΔR e rezistenţa electrică a ambelor conductoare pe porţiunea Δx. Cu ajutorul rezistenţei lineice, căderea de tensiune elementară din lungul unui singur conductor pe porţiunea dx se exprimă prin relaţia :

$$\mathrm{d}u_f = \frac{R_l}{2}\, i\, \mathrm{d}x. \tag{53.1'}$$

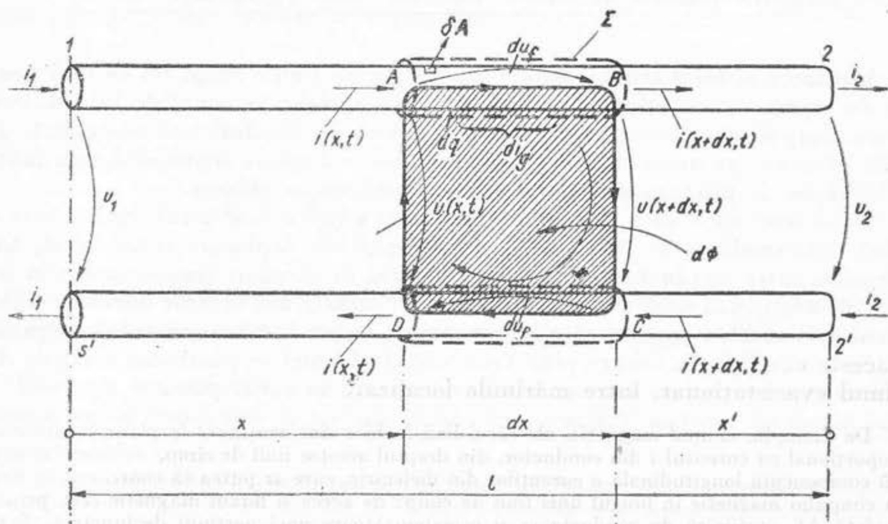


Fig. 53.3

Inductivitatea lineică :

$$L_l = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta \Phi}{i \Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta x}. \quad \left[\frac{H}{\text{m}}\right] \tag{53.2}$$

Aici, $\Delta \Phi$ e fluxul magnetic prin suprafaţa sprijinită pe cele două conductoare de lungime Δx, iar ΔL e inductivitatea proprie corespunzătoare acestei porţiuni a liniei. Cu ajutorul inductivităţii lineice, fluxul elementar prin suprafaţa S_Γ mărginită de curba $\Gamma \equiv ABB'A'A$, corespunzătoare elementului dx, se exprimă prin relaţia

$$d\Phi_\Gamma = L_l\, i\, dx. \tag{53.2'}$$

Capacitatea lineică :

$$C_l = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta q}{u \Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}. \quad \left[\frac{F}{\text{m}}\right] \tag{53.3}$$

Aici, Δq e sarcina electrică, localizată pe suprafaţa unuia dintre conductoare pe porţiunea Δx, u e tensiunea dintre acest conductor şi celălalt în dreptul acestei porţiuni, iar ΔC e capacitatea între cele două conductoare pe porţiunea Δx. Cu ajutorul capacităţii lineice, sarcina elementară din interiorul unei suprafeţe închise Σ, care înbracă o porţiune elementară dx a primului conductor, se exprimă prin relaţia :

$$dq_\Sigma = C_l\, u\, dx. \tag{53.3'}$$

Conductanţa lineică de izolaţie (sau *perditanţa*) *:*

$$G_l = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta i_g}{u \Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} \quad \left[\frac{S}{\text{m}} = \frac{\Omega^{-1}}{\text{m}}\right]. \tag{53.4}$$

Aici, Δi_g e curentul de conducţie, care se închide prin izolantul imperfect dintre cele două porţiuni de conductoare pe lungimea Δx, iar ΔG e conductanţa corespunzătoare acestei porţiuni din izolaţia liniei. Cu ajutorul conductanţei lineice de izolaţie, curentul de pierdere elementar, care trece de la un conductor la celălalt, pe lungimea elementară dx, se exprimă prin relaţia :

$$di_g = G_l\, u\, dx. \tag{53.4'}$$

Observaţie: a) Dacă parametrii lineici R_l, L_l, C_l, G_l nu depind de distanţa x linia se numeşte *omogenă*.

b) La frecvenţe suficient de joase, parametrii lineici se pot calcula ca în regim staţionar, deoarece repartiţia curentului pe secţiunea conductorului şi repartiţia sarcinii pe suprafaţa conductorului sînt practic neschimbate faţă de regimul staţionar, iar dielectricul are numai pierderi prin conducţie. La frecvenţe mai înalte, repartiţia curentului se modifică (v. efectul pelicular, cap. 55), iar dielectricul are şi pierderi prin isterezis (v. par. 49.5). Ca urmare, în acest caz, parametrii lineici R_l, L_l, G_l, C_l sînt, de fapt, parametri echivalenţi, care depind de frecvenţă.

c) În cazul unui dielectric omogen, de permitivitate ε şi permeabilitate μ, cu pierderi mici, şi neglijînd inductivitatea interioară a conductoarelor liniei, se pot utiliza următoarele expresii, stabilite în regim staţionar.

— Pentru *linia bifilară* cu conductoare foarte subțiri, de rază *a*, situate la distanța $D \gg a$:

$$C_l = \frac{\varepsilon\pi}{\ln\frac{D}{a}} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r\pi}{\ln\frac{D}{a}} \qquad \left[\frac{F}{m}\right] \tag{53.5}$$

v. par. 9.1, vol. I), cu $\varepsilon_0 = (1/36\pi)\,10^{-9}$ F/m și $\varepsilon_r \approx 1$ (în aer);

$$L_l = \frac{\mu}{\pi}\ln\frac{D}{a} = \mu_0\frac{\mu_r}{\pi}\ln\frac{D}{a} \qquad \left[\frac{H}{m}\right] \tag{53.6}$$

(v. par. 27.6.1, vol. I), cu $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m și $\mu_r \approx 1$.

— Pentru *linia coaxială* (cablul coaxial), constituită din două conductoare concentrice, de raze *a* și $b > a$:

$$C_l = \frac{\varepsilon 2\pi}{\ln\frac{b}{a}} = \varepsilon_0\frac{\varepsilon_r 2\pi}{\ln\frac{b}{a}} \qquad \left[\frac{F}{m}\right] \tag{53.7}$$

v. par. 7.4.1, vol. I)

$$L_l = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a} = \mu_0\frac{\mu_r}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad \left[\frac{H}{m}\right]. \tag{53.8}$$

53.2. Ecuațiile telegrafiștilor

Din cele expuse mai înainte rezultă că, în secțiunea curentă a liniei, atît curentul cît și tensiunea sînt funcțiune de cele două variabile x și t, deoarece ele variază nu numai în timp, ci și în lungul liniei. Astfel, în secțiunea *AD* (la distanța x de bornele de intrare),

$$i = \mathrm{i}(x, t) \qquad \text{și} \qquad u = \mathrm{u}(x, t), \tag{53.9}$$

iar în secțiunea *BC* (la distanța $x + \mathrm{d}x$ de bornele de intrare)

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{i}(x+\mathrm{d}x, t) &= \mathrm{i}(x, t) + \frac{\partial \mathrm{i}(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x \\ \text{și} \qquad \mathrm{u}(x+\mathrm{d}x, t) &= \mathrm{u}(x, t) + \frac{\partial \mathrm{u}(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x. \end{aligned}\right\} \tag{53.10}$$

Funcțiunile $\mathrm{u}(x\ t)$ și $\mathrm{i}(x, t)$ satisfac un sistem de ecuații cu derivate parțiale, numite ecuațiile telegrafiștilor, deoarece au fost stabilite pentru prima dată [1], pentru a explica funcționarea cablurilor telegrafice.

53.2.1. Ecuațiile de prim ordin. Pentru a găsi aceste ecuații, vom aplica întîi *legea inducției electromagnetice* conturului $\Gamma = ABCDA$, și apoi legea

[1] De către W. Thomson (ulterior lord Kelvin) în 1855, fără a considera și inductivitatea lineică (neglijabilă la cabluri, în primă aproximație) și de către G. Kirchhoff în 1857, ținînd seama și de această inductivitate.

conservării sarcinii suprafeței Σ. Conturul Γ fiind imobil, legea inducției electromagnetice se scrie:

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}(d\Phi_\Gamma).$$

Aici

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{E}d\mathbf{s} + \int_B^C \mathbf{E}d\mathbf{s} + \int_C^D \mathbf{E}d\mathbf{s} + \int_D^A \mathbf{E}d\mathbf{s} = du_f + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) + du_f + (-u).$$

Înlocuind această expresie în legea inducției electromagnetice cu relațiile (53.1′) și (53.2′) și, după simplificări, rezultă ecuația:

$$\boxed{-\frac{\partial u}{\partial x} = R_l i + L_l \frac{\partial i}{\partial t}}, \qquad (53.11)$$

care se poate interpreta spunînd că: scăderea tensiunii pe unitatea de lungime a liniei e egală cu suma dintre căderea de tensiune în rezistența ambelor conductoare și căderea de tensiune inductivă, ambele luate pe unitatea de lungime.

Suprafața Σ fiind imobilă, *legea de conservare a sarcinii electrice* se scrie:

$$\iint_\Sigma \mathbf{J}d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t}(dq_\Sigma).$$

Aici elementul de arie e orientat spre exterior, iar

$$\iint_\Sigma \mathbf{J}d\mathbf{A} = (-i) + \left(i + \frac{\partial i}{\partial x}dx\right) + di_g,$$

termenii din paranteză fiind în ordine: curentul care intră în suprafața Σ prin punctul A (și care, în consecință, trebuie luat cu semn schimbat în calculul curentului care iese prin suprafața Σ), curentul care iese din suprafața Σ prin punctul B și curentul de pierdere prin izolație între porțiunea AB și porțiunea CD de conductor.

Prin înlocuirea expresiei de mai sus în legea de conservare a sarcinii electrice cu relațiile (53.3′) și (53.4′), și după simplificări rezultă ecuația:

$$\boxed{-\frac{\partial i}{\partial x} = G_l u + C_l \frac{\partial u}{\partial i}}, \qquad (53.12)$$

care se poate interpreta, spunînd că: scăderea de curent pe unitatea de lungime a liniei e egală cu suma dintre curentul de pierdere prin izolație și curentul de încărcare cu sarcină a conductoarelor, ambele luate pe unitatea de lungime. Ecuațiile (53.11) și (53.12) se numesc *ecuațiile de primul ordin ale telegrafiștilor*

şi constituie un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale simultane. Interpretările date mai sus acestor ecuaţii permit să se stabilească pentru fiecare tronson elementar, de lungime dx al unei linii, schema echivalentă din figura 53.4, la utilizarea căreia toţi infiniţii mici de ordin superior sînt neglijabili.

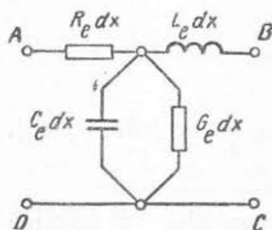


Fig. 53.4

53.2.2. Ecuaţiile de al doilea ordin. Între ecuaţiile (53.11) şi (53.12) se pot elimina oricare dintre funcţiunile necunoscute. Pentru a elimina pe i, se derivează relaţia (53.11) în raport cu x şi se obţine relaţia :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -R_l \frac{\partial i}{\partial x} - L_l \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)$$

(în care pentru ultimul termen s-a inversat ordinea de derivare) ; se înlocuieşte apoi în această expresie $\frac{\partial i}{\partial x}$ din relaţia (53.12). Se obţine astfel ecuaţia cu derivate parţiale a tensiunii :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_l G_l u + (R_l C_l + L_l G_l)\frac{\partial u}{\partial t} + L_l C_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}. \tag{53.13}$$

În mod asemănător, eliminînd pe u, se obţine ecuaţia cu derivate parţiale a curentului :

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = R_l G_l i + (R_l C_l + L_l G_l)\frac{\partial i}{\partial t} + L_l C_l \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}}. \tag{53.14}$$

Curentul şi tensiunea satisfac deci ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de aceeaşi formă, care se numesc *ecuaţiile de ordinul al doilea ale telegrafiştilor*. Cele două ecuaţii (53.13) şi (53.14) nu pot fi rezolvate independent una de alta, deoarece soluţiile lor sînt legate prin ecuaţiile (53.11) şi (53.12). Aceste soluţii $i(x, t)$ şi $u(x, t)$ mai depind şi de condiţiile iniţiale şi la limită (la capătul liniei).

Integrarea acestor ecuaţii în regim tranzitoriu e, în general, complicată şi se face cu metode operaţionale. În acest curs se va efectua (par. 53.3) numai în cazul cel mai simplu al liniei fără pierderi.

Dacă, pentru a indica secţiunea curentă, se utilizează distanţa $x' = l - x$, măsurată de la bornele de ieşire ale liniei, ecuaţiile de primul ordin iau forma :

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = R_l i + L_l \frac{\partial i}{\partial t}; \qquad \frac{\partial i}{\partial x'} = G_l u + C_l \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{53.15}$$

iar ecuațiile de ordinul al doilea iau forma :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} &= R_l G_l u + (R_l C_l + G_l L_l)\frac{\partial u}{\partial t} + L_l C_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 i}{\partial x'^2} &= R_l G_l i + (R_l C_l + G_l L_l)\frac{\partial i}{\partial t} + L_l C_l \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}, \tag{53.16}$$

în care funcțiunile necunoscute sînt $u(x', t)$ și $i(x', t)$.

53.2.3. **Bilanțul instantaneu al puterilor pe linie.** Înmulțind relația (53.11) cu i și ecuația (53.12) cu u și adunîndu-le, se obține relația :

$$-\frac{\partial(ui)}{\partial x} = R_l i^2 + G_l u^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(L_l \frac{i^2}{2} + G_l \frac{u^2}{2}\right). \tag{53.17}$$

Observînd că puterea transmisă printr-o secțiune a liniei este

$$p = ui \qquad [\mathrm{W}] \tag{53.18}$$

și că energia electromagnetică lineică este

$$W_l = L_l \frac{i^2}{2} + C_l \frac{u^2}{2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta x}, \qquad [\mathrm{J/m}] \tag{53.19}$$

relația (53.17) se scrie

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial W_l}{\partial t} + R_l i^2 + G_l u^2. \tag{53.20}$$

Scăderea specifică a puterii transmise în lungul liniei e egală cu suma dintre viteza de variație a energiei electromagnetice lineice și puterea specifică de pierderi pe linie, prin efect Joule-Lenz (și eventual prin isterezis), în conductoare și în izolație. Linia nu are pierderi numai dacă

$$R_l = 0 \qquad \text{și} \qquad G_l = 0. \tag{53.21}$$

53.3. Integrarea ecuațiilor telegrafiștilor în regim tranzitoriu pentru liniile fără pierderi

În regim tranzitoriu, rezolvarea ecuațiilor telegrafiștilor pentru o linie oarecare e relativ complicată și se poate face cu ajutorul integralei Fourier (v. cap. 50) sau al transformării Laplace (v. cap. 52). În cele ce urmează ne vom limita la linia fără pierderi [1], pentru care ecuațiile telegrafiștilor au forma :

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_l \frac{\partial i}{\partial t}; \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = C_l \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{53.22}$$

[1] La frecvențe suficient de înalte, această prezentare e adesea suficientă și pentru linii reale, cu pierderi. deoarece termenii cu derivate în raport cu timpul sînt proporționali cu frecvența și foarte mari față de termenii în care apar R_l și G_l (v. rel. 53.11 și 53.12).

respectiv

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_l C_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_l C_l \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \tag{53.23}$$

53.3.1. **Ecuațiile liniilor fără pierderi.** Fiecare dintre ecuațiile (53.23) este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea, de tip hiperbolic, numită ecuația undelor, pe care am mai întîlnit-o în studiul undei electromagnetice plane (v. par. 29.3, vol. I). Urmînd un raționament analog celui făcut cu ocazia acestui studiu, se găsește că cea mai generală soluție a ecuației (53.23) consistă în suprapunerea unei unde directe cu o undă inversă. În cazul ecuației tensiunii, de exemplu, cea mai generală soluție este

$$u = \mathrm{u}_d(x - v_0 t) + \mathrm{u}_i(x + v_0 t), \tag{53.24}$$

cu viteza de propagare

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}}. \tag{53.25}$$

Aici, primul termen, $\mathrm{u}_d\,(x - v_0 t)$ e o *undă elementară directă de tensiune*, adică o undă care se propagă fără atenuare și fără distorsiune în sensul x-lor pozitivi, cu viteza v_0 : valorile unei astfel de unde, în momentul t și din diferite puncte x, se regăsesc în momentul $t + \Delta t$ în punctele $x + \Delta x$, cu $\Delta x = v_0\,\Delta t$, același pentru toate punctele x (v. fig. 53.5,*a*). De aceea, pentru un observator mobil, care s-ar deplasa în sensul x-ilor pozitivi, cu viteza v_0, unda directă va apărea ca o repartiție spațială invariabilă. Al doilea termen, $\mathrm{u}_i\,(x + v_0 t)$, e o *undă elementară inversă de tensiune*, adică o undă care se propagă fără atenuare și fără distorsiune în sensul x-ilor negativi, cu aceeași viteză v_0 : valorile unei astfel de unde, în momentul t și din diferite puncte x, se regăsesc în momentul $t + \Delta t$ în punctele $x - \Delta x$, cu $\Delta x = v_0 \Delta t$, același pentru toate punctele x (v.fig. 53.5,*b*.). De aceea, pentru un observator mobil, care s-ar deplasa în sensul x-ilor negativi, cu viteza v_0, unda inversă va apărea ca o repartiție spațială invariabilă.

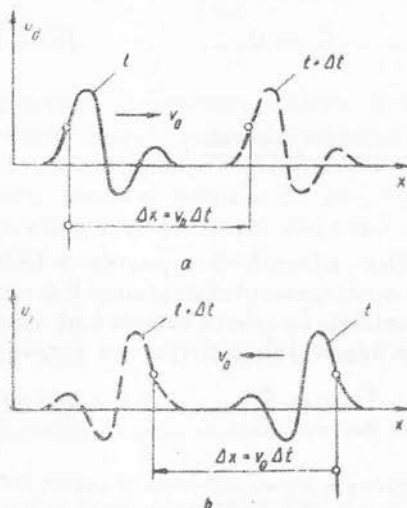


Fig. 53.5

Din punctul de vedere al ecuației undelor, funcțiunile $\mathrm{u}_d(x - v_0 t)$ și $\mathrm{u}_i(x + v_0 t)$ sînt arbitrare. Ele se determină prin condițiile concrete în care funcționează linia, și anume prin condițiile inițiale și cele de la capetele liniei. La utilizarea acestor din urmă condiții, trebuie subliniat că din proprietățile undelor elementare rezultă următoarele reguli : *Într-un moment oarecare $t > 0$ și într-un punct oarecare x al liniei poate exista unda directă numai dacă într-un moment $t - \Delta t$ (anterior lui t) a existat această undă în punctul $x - v_0 \Delta t$, situat la stînga lui x; și poate exista unda*

inversă numai dacă într-un moment $t - \Delta t$ (anterior lui t) a existat această undă în punctul $x + v_0\Delta t$, situat la dreapta lui x.

Dacă tensiunea e determinată, curentul i trebuie determinat din ecuațiile (53.22) (și nu din ecuația respectivă a undelor, care ar furniza soluții prea generale, independente de acelea ale ecuației tensiunii). Cu relația (53.24) și prima ecuație (53.22) rezultă:

$$-\mathrm{u}_d'(x - v_0t) - \mathrm{u}_i'(x + v_0t) = L_l \frac{\partial i}{\partial t}, \tag{53.26}$$

deoarece

$$\frac{\partial u_d}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}u_d}{\mathrm{d}(x - v_0t)} = u_d' \quad \text{şi} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}(x + v_0t)} = u_i'. \tag{53.27}$$

Observînd că

$$\frac{\partial u_d}{\partial t} = -v_0u_d' \;\text{ şi }\; \frac{\partial u_i}{\partial t} = +v_0u_i', \tag{53.28}$$

ecuația (53.26) devine:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Li - \frac{1}{v_0}(u_d - u_i)\right] = 0,$$

de unde, prin integrare,

$$i = \frac{1}{v_0L_l}(u_d - u_i) + \mathrm{f}(x), \tag{53.29}$$

unde f (x) e o funcțiune arbitrară de x. Înlocuind această expresie în a doua ecuație (53.22), se obține:

$$-\frac{1}{v_0L_l}u_d' + \frac{1}{v_0L_l}u_i' + f' = -C_lv_0u_d' + C_lv_0u_i'$$

și cu relația (53.25),

$$f' = 0, \text{ adică } \; f = \text{const.} \tag{53.30}$$

Mărimea

$$Z_0 = \frac{1}{v_0L_l} = v_0C_l = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} > 0 \tag{53.31}$$

se numește *impedanță caracteristică a liniei fără pierderi*. Cu relațiile (53.29), (53.30) și (53.31), expresia curentului se scrie:

$$i = \frac{1}{Z_0}\,\mathrm{u}_d(x - v_0t) - \frac{1}{Z_0}\,\mathrm{u}_i(x + v_0t) + \text{const.} \tag{53.32}$$

Aici, *unda elementară directă de curent* este

$$i_d = \frac{\mathrm{u}_d(x - v_0t)}{Z_0} = \mathrm{i}_d(x - v_0t). \tag{53.33}$$

iar *unda elementară inversă de curent* este

$$i_i = -\frac{u_i(x+v_0t)}{Z_0} = i_i(x+v_0t). \tag{53.34}$$

Constanta f e o componentă continuă arbitrară a curentului, aceeaşi în toate punctele liniei, determinabilă prin condiţiile iniţiale şi independentă de tensiune. Ecuaţiile (53.24) şi (53.32) se numesc ecuaţiile liniilor fără pierderi şi reprezintă soluţiile ecuaţiilor telegrafiştilor în regim tranzitoriu. Deoarece o constantă poate fi totdeauna considerată fie ca undă directă, fie ca undă inversă, rezultă că scoţînd un termen constant din u_d (de exemplu), ecuaţiile liniilor fără pierderi pot fi scrise sub forma simetrică:

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= u_d(x-v_0t) + u_i(x+v_0t) + U_0 \\ i(x,t) &= \frac{1}{Z_0}u_d(x-v_0t) - \frac{1}{Z_0}u_i(x+v_0t) + I_0 \end{aligned}}, \tag{53.35}$$

în care constantele U_0 şi I_0 trebuie determinate prin condiţiile iniţiale (şi sînt independente între ele, din punctul de vedere al ecuaţiilor telegrafiştilor), iar funcţiunile u_d şi u_i trebuie determinate prin condiţiile iniţiale şi cele de la capetele liniei.

Observaţii: a) În limitele de valabilitate ale formulelor (53.5), (53.6), (53.7), (53.8) pentru parametrii lineici ai liniei bifilare, respectiv coaxiale, se obţine, pentru viteza de propagare pe aceste linii (presupuse fără pierderi) expresia:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{L_lC_l}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c, \tag{53.36}$$

egală cu a vitezei de propagare a undelor electromagnetice în dielectrici omogeni nelimitaţi (v. rel. 29.21, vol. I.).

Dacă se iau însă în considerare sporul de inductivitate dat de cîmpul magnetic din interiorul conductoarelor şi alte efecte, se constată că prezenţa conductoarelor reduce puţin viteza de propagare a undelor ghidate pe linie, faţă de aceea a undelor din medii omogene nelimitate.

b) În aceleaşi limite se obţin următoarele expresii pentru impedanţele caracteristice:

— Pentru *linia bifilară* fără pierderi:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\ln\frac{D}{a}}{\pi} = \zeta\frac{\ln\frac{D}{a}}{\pi}, \tag{53.37}$$

unde ζ e *impedanţa de undă* a dielectricului (v. rel. 29.26, vol. I). Pentru liniile aeriene obişnuite se obţin valori între 300 şi 600Ω.

— Pentru *linia coaxială* (cablul coaxial):

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\ln\frac{b}{a}}{2\pi} = \zeta\frac{\ln\frac{b}{a}}{2\pi}. \tag{53.37'}$$

Deoarece $\frac{b}{a} \ll \frac{D}{a}$ impedanţa caracteristică a cablelor coaxiale e de ordinul a 30...75Ω.

53.3.2. **Puterile transmise de undele elementare.** Puterea instantanee directă, transmisă de unda directă în sensul x-lor pozitivi, este

$$p_d = u_d i_d = \frac{u_d^2}{Z_0} = Z_0 i_d^2 > 0. \tag{53.38}$$

Energia electromagnetică lineică instantanee a undei directe este, cu relațiile (53.31) și (53.33),

$$W_{l_d}(t) = L_l \frac{i_d^2}{2} + C_l \frac{u_d^2}{2} = L_l i_d^2 = C_l u_d^2, \tag{53.39}$$

și se observă că e în mod egal împărțită între cîmpul electric și cîmpul magnetic. Comparînd relațiile (53.36) și (53.37), rezultă, cu relația (53.25):

$$p_d = v_0 W_{l_d}. \tag{53.40}$$

Aceleași relații se obțin pentru unda inversă, dacă se calculează puterea inversă, transmisă în sensul x-lor negativi,

$$p_i = -u_i i_i = \frac{u_i^2}{Z_0} = Z_0 i_i^2 = v_0 W_{l_i} > 0. \tag{53.41}$$

În fiecare dintre undele elementare, puterea transmisă e egală cu produsul dintre viteza de propagare și energia acumulată pe unitatea de lungime a liniei.

53.3.3. **Aplicație:** Se consideră o linie lungă fără pierderi, de impedanță caracteristică Z_0 și viteză de propagare v_0, avînd conectată o sarcină rezistivă, de rezistență R la bornele secundare (fig. 53.6). În momentul $t = 0$ ajunge la aceste borne o undă directă de tensiune, cu front dreptunghiular,

$$u_d = U. \tag{53.42}$$

Se cere repartiția tensiunii și a curentului într-un moment $t > 0$, știind că linia are bornele primare suficient de depărtate de bornele secundare.

În acest caz, în ecuațiile (53.35) avem $U_0 = 0$ și $I_0 = 0$ (nu există curenți și tensiuni continue pe linie înainte de $t = 0$) și $u_i = 0$ pentru $t < 0$.

Ecuațiile liniilor devin:

$$\left.\begin{aligned} U + u_i(x, t) &= u(x, t) \\ U - u_i(x, t) &= Z_0 i(x, t) \end{aligned}\right\} \tag{53.43}$$

Considerînd aceste ecuații scrise pentru capătul liniei, unde $u = Ri$, rezultă, eliminînd necunoscutele u și i, pentru $t > 0$,

$$u_i(l, t) = \frac{R - Z_0}{Z_0 + R} \cdot U \tag{53.44}$$

și

$$i_d = \frac{u_d}{Z_0} = \frac{U}{Z_0},$$

$$i_i = -\frac{u_i}{Z_i} = -\frac{1}{Z_0} \cdot \frac{R - Z_0}{Z_0 + R} \cdot U. \tag{53.45}$$

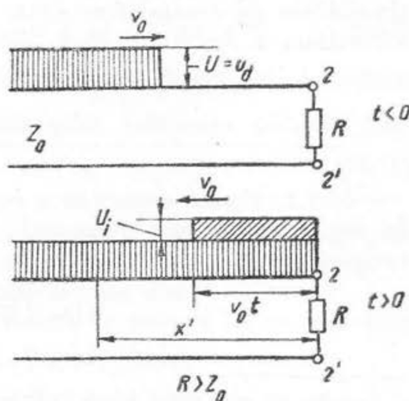


Fig. 53.6

În acest caz, unda inversă e o undă reflectată, şi anume pozitivă, dacă $R > Z$ $\left(\text{cazul din fig. 53.6, care determină o supratensiune } u = u_d + u_i = \frac{2RU}{(Z_0 + R)}\right)$ nulă, dacă $R = Z$, sau negativă, dacă $R < Z$ $\left(\text{caz care determină o supraintensitate } i = \frac{u_d - u_i}{Z_0} = \frac{2Z_0}{Z_0 + R} \cdot \frac{U}{Z_0}\right)$.
Pentru un moment $t > 0$

$$u_i(x', t) = \begin{cases} u_i(l, t) = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} U \text{ dacă } x' < vt \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{dacă } x' > vt \end{cases}, \tag{53.46}$$

aşa cum rezultă imediat din proprietăţile undei inverse, care se propagă cu v_0 în sensul x-lor negativi (şi deci al x'-lor pozitivi).

54. LINII LUNGI ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

În acest capitol vom studia liniile lungi *în regim sinusoidal*, adică atunci cînd curentul şi tensiunea sînt, în fiecare punct al liniei, funcţiuni sinusoidale de timp de aceeaşi frecvenţă f

$$u(x, t) = U(x)\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi(x)) \tag{54.1}$$

$$i(x, t) = I(x)\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi(x) - \varphi(x)), \tag{54.2}$$

cu valorile efective $U(x)$ şi $I(x)$, fazele iniţiale[1] $\psi(x)$ şi $\psi(x) - \varphi(x)$ şi cu defazajul $\varphi(x)$, dependente de punctul considerat x al liniei. Un astfel de regim se stabileşte, de exemplu, într-o linie lungă, căreia i se aplică la capete tensiuni sinusoidale de aceeaşi frecvenţă, în regim permanent (adică, după completa amortizare a regimului liber, determinat de condiţiile iniţiale).

54.1. Studiul ecuaţiilor telegrafiştilor în complex

54.1.1. Forma complexă a ecuaţiilor telegrafiştilor şi soluţiile elementare. În regim permanent sinusoidal, tensiunea şi curentul se pot reprezenta în complex simplificat, imaginile lor fiind acum funcţiuni de variabila spaţială x :

$$u(x, t) \rightleftarrows \underline{U}(x) = U(x)e^{j\psi(x)} \tag{54.3}$$

$$i(x, t) \rightleftarrows \underline{I}(x) = I(x)e^{j(\psi(x) - \varphi(x))}. \tag{54.4}$$

[1] Nu am mai notat fazele iniţiale cu β şi γ, deoarece aceste simboluri au altă semnificaţie în teoria liniilor lungi.

În acest caz, derivatele parțiale ale acestor mărimi se reprezintă astfel:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im}\{\underline{U}(x)\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\} = \operatorname{Im}\left\{\frac{d\underline{U}}{dx}\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\right\} \rightleftarrows \frac{d\underline{U}}{dx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Im}\{\underline{U}(x)\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\} = \operatorname{Im}\{\underline{U}(x)\sqrt{2}\, j\omega e^{j\omega t}\} \rightleftarrows j\omega \underline{U} \tag{54.5}$$

și, analog,

$$\frac{\partial i}{\partial x} \rightleftarrows \frac{d\underline{I}}{dx}; \qquad \frac{\partial i}{\partial t} \rightleftarrows j\omega \underline{I}. \tag{54.6}$$

Cu aceste reguli, sistemul de ecuații diferențiale cu derivate parțiale (în variabilele x și t), pe care îl constituie ecuațiile telegrafiștilor (53.11) și (53.12), se reprezintă în complex printr-un sistem de ecuații diferențiale ordinare (în variabila x):

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= (R_l + j\omega L_l)\,\underline{I} \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= (G_l + j\omega C_l)\,\underline{U} \end{aligned}}\,. \tag{54.7}$$

Aceasta este *forma complexă a ecuațiilor de ordinul întîi ale telegrafiștilor*. Prin derivare se poate elimina succesiv oricare dintre funcțiunile necunoscute $\underline{I}$ sau $\underline{U}$ și se obțin relațiile:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2\underline{U}}{dx^2} &= (R_l + j\,\omega\, L_l)\,(G_l + j\,\omega\, C_l)\,\underline{U} \\ \frac{d^2\underline{I}}{dx^2} &= (R_l + j\,\omega\, L_l)\,(G_l + j\,\omega\, C_l)\,\underline{I} \end{aligned}}\,, \tag{54.8}$$

care reprezintă *forma complexă a ecuațiilor de ordinul al doilea ale telegrafiștilor*. Dacă se notează

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_l + j\,\omega\, L_l)\,(G_l + j\,\omega\, C_l)} = \alpha + j\beta \qquad (\alpha > 0) \tag{54.9}$$

— alegînd, *prin definiție*, rădăcina cu parte reală pozitivă — ecuațiile de ordinul al doilea (54.8) capătă forma simplă:

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2\underline{U}; \quad \frac{d^2\underline{I}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2\,\underline{I}. \tag{54.10}$$

La rezolvarea acestor ecuații trebuie să se țină seama că $\underline{U}$ și $\underline{I}$ sînt legate prin ecuațiile de ordinul întîi (54.7). De aceea se rezolvă numai una dintre ecuații — de exemplu, aceea a tensiunii — curentul deducîndu-se din (54.7).

Ecuațiile (54.10) sînt ecuații diferențiale liniare de ordinul II, cu coeficienți constanți, avînd ecuația caracteristică

$$r^2 = \underline{\gamma}^2,$$

cu soluțiile :

$$r = \pm \underline{\gamma} = \pm (\alpha + j\beta). \quad (54.11)$$

Rezultă atunci, pentru soluția generală a tensiunii :

$$\underline{U}(x) = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{+\underline{\gamma}x}, \quad (54.12)$$

în care $\underline{A}_1$ și $\underline{A}_2$ sînt constante arbitrare (în general complexe). Curentul se obține introducînd această relație în prima ecuație (54.7) :

$$\underline{I}(x) = -\frac{1}{R_l + j\omega L_l} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\underline{\gamma}}{R_l + j\omega L_l} [\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{+\underline{\gamma}x}]. \quad (54.13)$$

Dacă se notează :

$$\underline{Z}_c = \frac{R_l + j\omega L_l}{\underline{\gamma}} = \frac{\underline{\gamma}}{G_l + j\omega C_l} = \sqrt{\frac{R_l + j\omega L_l}{G_l + j\omega C_l}} = Z_c e^{j\varphi_c}, \quad (54.14)$$

soluțiile generale ale formei complexe a ecuațiilor telegrafiștilor se pot pune sub forma :

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{+\underline{\gamma}x} \\ \underline{I}(x) &= \underline{A}_1 \frac{e^{-\underline{\gamma}x}}{\underline{Z}_c} - \underline{A}_2 \frac{e^{+\underline{\gamma}x}}{\underline{Z}_c}, \end{aligned} \quad (54.15)$$

în care constantele arbitrare complexe $\underline{A}_1$ și $\underline{A}_2$ sînt determinabile prin condițiile de la capetele liniei. Fiecare dintre termenii din relația (54.15) în parte se numește *soluție complexă elementară* a ecuațiilor telegrafiștilor.

54.1.2. **Interpretarea soluțiilor elementare.** Atît tensiunea cît și curentul din soluția generală (54.15) rezultă prin suprapunerea a doi termeni : primul depinde de x prin factorul $e^{-\underline{\gamma}x}$, iar al doilea prin factorul $e^{+\underline{\gamma}x}$. Arătăm că aceste soluții elementare sînt reprezentările în complex ale unor *unde elementare atenuate*, directă și inversă. Astfel, *tensiunea directă*

$$\underline{U}_d(x) = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x}, \quad (54.16)$$

cu coeficientul

$$\underline{A}_1 = \underline{U}_d(0) = \underline{U}_{d0} = U_{d0} e^{j\psi_{d0}} \quad (54.17)$$

se poate scrie sub formă exponențială (adică separînd modulul și argumentul), cu relația (54.11),

$$\underline{U}_d(x) = \underline{U}_{d0} e^{-\underline{\gamma}x} = U_{d0} e^{-\alpha x} e^{-j(\beta x - \psi_{d0})} \quad (54.18)$$

Valoarea instantanee corespunzătoare este :

$$u_d(x,t) = \mathrm{Im}\,\{\underline{U}_d \sqrt{2}\, e^{j\omega t}\} = U_{d0} e^{-\alpha x} \sqrt{2} \sin(\omega t - \beta x + \psi_{d0}) \quad (54.19)$$

sau

$$u_d(x,t) = U_{d0} e^{-\alpha x} \sqrt{2} \sin\left(-\beta\left(x - \frac{\omega t}{\beta} t\right) + \psi_{d0}\right). \quad (54.19')$$

Se observă imediat că, făcînd abstracție de factorul exponențial monoton descrescător $e^{-\alpha x}$ (deoarece $\alpha > 0$), această valoare instantanee reprezintă o undă elementară directă, de forma primului termen din relația (53.24), cu viteza de propagare:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = 2\pi \frac{f}{\beta}, \tag{54.20}$$

numită, în acest caz, *viteză de fază* a undei — în sensul x-lor pozitivi. La un moment dat t, această undă directă are o repartiție spațială sinusoidală, cu perioada spațială λ, numită *lungime de undă*. Se observă că lungimea de undă e cea mai mică distanță dintre două puncte, în care undele respective sînt în fază și, ca atare, e determinabilă prin condiția:

$$\omega t - \beta x = \omega t - \beta(x + \lambda) + 2\pi,$$

din care rezultă

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}}. \tag{54.21}$$

Întreaga repartiție se deplasează în sensul x-lor pozitivi, cu viteza de fază

$$\boxed{v = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda}. \tag{54.22}$$

Ținînd acum seama și de factorul exponențial, rezultă că unda elementară directă e atenuată în sensul propagării cu o atenuare (v. rel. 45.32):

$$\alpha x = \ln \left| \frac{\underline{U}_d(0)}{\underline{U}_d(x)} \right|, \tag{54.23}$$

proporțională cu distanța x. În figura 54.1, *a* se reprezintă o astfel de undă elementară atenuată directă în momentele t și $t + \Delta t$.

O analiză asemănătoare se poate face pentru *tensiunea inversă*

$$\underline{U}_i(x) = \underline{A}_2 e^{+\underline{\gamma} x} = \underline{U}_{i0}\, e^{+\underline{\gamma} x} = \underline{U}_{i0}\, e^{\underline{\gamma} l}\, e^{-\underline{\gamma} x'} = \underline{A}'_2\, e^{-\underline{\gamma} x'}, \tag{54.24}$$

care are aceeași formă cu o componentă directă, dacă se exprimă în funcțiune de variabila $x' = l - x$. Această componentă corespunde, prin urmare, unei unde elementare atenuate inverse (v. fig. 54.1, *b*), care se propagă cu aceeași viteză (v) în sensul x-lor negativi, atenuîndu-se în sensul ei de propagare cu aceeași atenuare α pe unitatea de lungime.

În sfîrșit, în analogie cu tensiunea, din relația (54.15) mai rezultă că și curentul consistă în suprapunerea unor soluții complexe elementare, *curentul direct:*

$$\underline{I}_d(x) = \frac{\underline{U}_d(x)}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{U}_{d0}}{\underline{Z}_c}\, e^{-\underline{\gamma} x}, \tag{54.25}$$

şi *curentul invers* :

$$\underline{I}_i(x) = -\frac{\underline{U}_i(x)}{\underline{Z}_c} = -\frac{\underline{U}_{i0}}{\underline{Z}_c}\,\mathrm{e}^{+\underline{\gamma}x}. \quad (54.26)$$

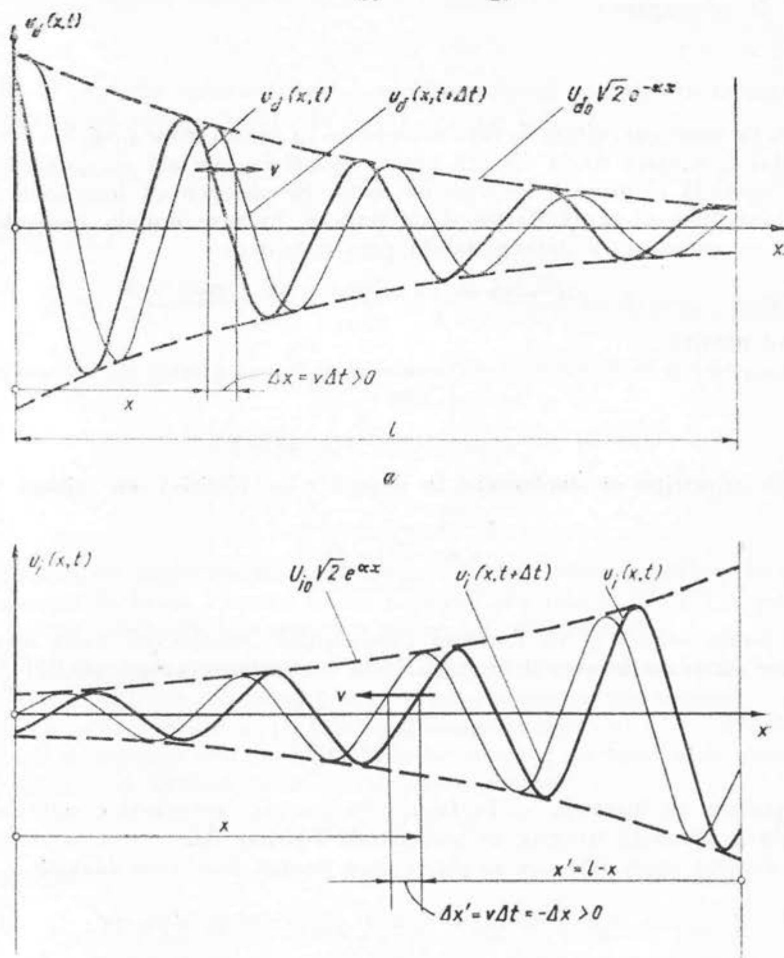


Fig. 54.1

54.1.3. **Parametrii secundari ai liniilor : impedanţa caracteristică şi constanta de propagare.** Soluţiile generale (54.15) pun în evidenţă proprietatea mărimilor complexe $\underline{Z}_c$ şi $\underline{\gamma}$ de a caracteriza complet linia în regim permanent sinusoidal, de frecvenţă dată. Aceste mărimi sînt *parametrii secundari* ai liniilor, şi anume :

Impedanţa caracteristică complexă a liniei :

$$\boxed{\underline{Z}_c = \frac{\underline{U}_d(x)}{\underline{I}_d(x)} = \frac{\underline{U}_i(x)}{(-\underline{I}_i(x))} = \sqrt{\frac{R_l + \mathrm{j}\,\omega L_l}{G_l + \mathrm{j}\,\omega C_l}} = Z_c\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_c}.} \quad (54.27)$$

Raportul dintre tensiunea complexă a unei unde elementare și curentul complex corespunzător (asociat după regula de la receptoare, în raport cu sensul de propagare respectiv) are aceeași valoare în toate punctele liniei, fiind egal cu impedanța caracteristică. Modulul acestei mărimi este *impedanța caracteristică scalară* și are valoarea :

$$Z_c = \left|\sqrt{\frac{R_l + \mathrm{j}\omega L_l}{G_l + \mathrm{j}\omega C_l}}\right| = \sqrt{\frac{|R_l + \mathrm{j}\omega L_l|}{|G_l + \mathrm{j}\omega C_l|}} = \sqrt[4]{\frac{R_l^2 + \omega^2 L_l^2}{G_l^2 + \omega^2 C_l^2}} > 0, \tag{54.28}$$

iar argumentul acestei mărimi este *defazajul caracteristic* și are valoarea :

$$\varphi = \frac{1}{2} \arg \{\underline{Z}_c^2\} = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L_l}{R_l} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega C_l}{G_l}\right\}$$

$$\varphi_c = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega\left(\dfrac{L_l}{R_l} - \dfrac{C_l}{G_l}\right)}{1 + \dfrac{\omega^2 L_l C_l}{R_l G_l}} \tag{54.29}$$

Se observă că

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi_c \leqslant \frac{\pi}{4} \tag{54.29'}$$

Constanta de propagare a liniei :

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{x} \ln \frac{\underline{U}_d(0)}{\underline{U}_d(x)} = \sqrt{(R_l + \mathrm{j}\,\omega L_l)(G_l + \mathrm{j}\,\omega C_l)}} = \alpha + \mathrm{j}\beta, \tag{54.30}$$

unde, la extragerea radicalului, se reține rădăcina cu parte reală pozitivă ($\alpha > 0$).

Interpretarea arătată pentru soluțiile elementare stabilește că mărimea

$$\alpha = \operatorname{Re}\{\underline{\gamma}\} = \frac{1}{x} \ln \left|\frac{\underline{U}_d(0)}{\underline{U}_d(x)}\right|, \tag{54.31}$$

numită *constanta de atenuare*, caracterizează linia din punctul de vedere al atenuării undelor elementare pe unitatea de lungime, iar mărimea

$$\beta = \operatorname{Im}\{\underline{\gamma}\} = \frac{1}{x} \arg \left\{\frac{\underline{U}_d(0)}{\underline{U}_d(x)}\right\}, \tag{54.32}$$

numită *constantă de defazaj* sau *constantă de fază*, caracterizează linia din punctul de vedere al defazajului introdus în undele elementare pe unitatea de lungime.

Pentru a calcula constantele α şi β în funcţie de parametrii lineici R_l, L_l, G_l, C_l, observăm că din (54.30) rezultă relaţiile:

$$\underline{\gamma}^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = R_l G_l - \omega^2 L_l C_l + j\omega(L_l G_l + R_l C_l) \quad (54.33)$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}\omega(L_l G_l + R_l C_l) \quad (54.34)$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = R_l G_l - \omega^2 L_l C_l \quad (54.35)$$

$$|\underline{\gamma}| = \sqrt{|R_l + j\omega L_l||G_l + j\omega C_l|} = \sqrt[4]{(R_l^2 + \omega^2 L_l^2)(G_l^2 + \omega^2 C_l^2)} \quad (54.36)$$

$$|\underline{\gamma}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R_l^2 + \omega^2 L_l^2)(G_l^2 + \omega^2 C_l^2)}. \quad (54.37)$$

Făcînd semisuma şi semidiferenţa expresiilor (54.34) şi (54.36), rezultă expresiile căutate:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(R_l G_l - \omega^2 L_l C_l) + \frac{1}{2}\sqrt{(R_l^2 + \omega^2 L_l^2)(G_l^2 + \omega^2 C_l^2)}} \geqslant 0 \quad (54.38)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 L_l C_l - R_l G_l) + \frac{1}{2}\sqrt{(R_l^2 + \omega^2 L_l^2)(G_l^2 + \omega^2 C_l^2)}} > 0. \quad (54.39)$$

Constanta de atenuare e pozitivă prin însuşi modul cum a fost definită constanta de propagare $\underline{\gamma}$; din relaţia (54.34) rezultă atunci că şi constanta de fază e pozitivă.

Parametrii $\underline{\gamma}$, α, β, $\underline{Z}_c$, Z_c, φ_c depind de frecvenţă, şi anume într-un mod mai complicat decît rezultă din relaţiile de mai sus, deoarece şi parametrii lineici R_l, L_l, G_l, C_l depind de frecvenţă, din cauza efectului pelicular (v. cap. 56) şi al pierderilor dielectrice (v. par. 49.5). De asemenea, viteza de fază a undelor:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{R_l G_l}{\omega^2 L_l C_l}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{F_l^2}{\omega^2 L_l^2}\right)\left(1 + \frac{C_l^2}{\omega^2 C_l^2}\right)}}} \quad (54.40)$$

depinde de frecvenţă.

Observaţii: *a*) În cazul liniei fără pierderi ($R_l \approx 0$, $G_l \approx 0$) parametrii secundari au valorile:

$$\alpha \approx 0, \; \beta \approx \omega\sqrt{L_l C_l}, \; \underline{Z}_c \approx \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = Z_0, \; \varphi_c \approx 0, \quad (54.41)$$

iar viteza de fază

$$v \approx \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} = v_0 \quad (54.42)$$

nu depinde de frecvenţă. De aceea, toate componentele sinusoidale ale unei unde directe periodice nesinusoidale se propagă neatenuate şi cu aceeaşi viteză, asigurînd propagarea fără distorsiuni a acestei unde (cum rezultă şi din studiul liniei fără pierderi în regim tranzitoriu — par. 53.3.1.).

b) În cazul unei linii cu pierderi mici, lucrînd la frecvenţe înalte ($R_l \ll L_l\omega$, $G_l \ll C_l\omega$), parametrii secundari iau valorile

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \approx \frac{1}{2} R_l \sqrt{\frac{C_l}{L_l}} + \frac{1}{2} G_l \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}, \quad \beta \approx \omega \sqrt{L_l C_l} \\ &\underline{Z}_c \approx \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = Z_0, \qquad \varphi_c \approx 0 \end{aligned}\right\}, \tag{54.43}$$

iar viteza de fază

$$v \approx \frac{1}{\sqrt{L_l C}} = v_0, \tag{54.44}$$

rezultă de asemenea independentă de frecvenţă.

c) În cazul liniei cu pierderi, atît viteza de fază cît şi constanta de atenuare depind de frecvenţă. Dependenţa vitezei de fază de frecvenţă poartă numele de *dispersiune*, din cauza faptului că în optică această proprietate determină dependenţa de frecvenţă a indicelui de refracţie şi deci fenomenul de dispersiune a luminii. Dispersiunea are drept consecinţă deformarea undelor (directe sau inverse) care se propagă pe linie. În adevăr, considerînd, pentru simplificare, o undă directă periodică, dar nesinusoidală, această undă poate fi considerată ca o suprapunere de armonice (prin dezvoltare în serie Fourier). Din cauza dispersiunii, armonicele au viteze de propagare diferite, ceea ce determină alte faze iniţiale la ieşirea din linie decît la intrarea în linie. Ca urmare, unda rezultantă va avea la ieşire o altă formă decît la intrare. Pentru telecomunicaţii, acest fenomen e supărător, deoarece reduce fidelitatea transmisiunii semnalelor pe linie, producînd distorsiuni.

Dacă însă parametrii lineici satisfac *condiţia lui Heaviside*

$$\boxed{\frac{R_l}{L_l} = \frac{G_l}{C_l}}, \tag{54.45}$$

se observă din relaţia (54.40) că radicalul, dependent de frecvenţă, de la numitor devine egal cu unitatea şi viteza de fază rezultă independentă de frecvenţă şi egală cu viteza de propagare de pe liniile fără pierderi:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} = v_0. \tag{54.46}$$

Condiţia (54.45) caracterizează *linia fără dispersiune*, pentru care parametrii secundari au valorile:

$$\alpha = R_l \sqrt{\frac{C_l}{L_l}} = G_l \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = \frac{R_l}{Z_0} = \frac{Z_0}{G_l}; \; \beta = \omega \sqrt{L_l C_l}; \; \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} = Z_0; \; \varphi_c = 0. \tag{54.47}$$

În telecomunicaţii, linia fără dispersiune prezintă deosebită importanţă, din punctul de vedere al fidelităţii transmisiunii, în special la circuitele telefonice de frecvenţă vocală, situate în cabluri telefonice, pentru legături pe distanţe mari. Deoarece circuitele din cabluri au conductoare foarte apropiate, cu dielectric de permitivitate relativ mare, capacitatea lor lineică e foarte mare, iar inductivitatea lor lineică foarte mică, adică:

$$\frac{R_l}{L_l} > \frac{G_l}{C_l}.$$

Pentru a satisface condiţia lui Heaviside, se sporeşte în mod artificial inductivitatea lineică medie a liniei (încărcarea liniei) — fie prin intercalarea, la intervale regulate şi mici faţă de lungimea de undă, a unor bobine de mare inductivitate (procedeul Pupin) — fie prin utilizarea unor materiale feromagnetice în structura dielectricului.

d) La frecvențe extrem de joase se obțin pentru parametrii secundari expresiile:

$$\alpha = \sqrt{R_l G_l}, \quad \beta = 0; \quad \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R_l}{G_l}}, \quad \varphi_c = 0. \tag{54.48}$$

Aceleași expresii caracterizează cazul limită al liniei de curent continuu cu pierderi în izolație.

54.2. Ecuațiile liniilor electrice lungi

Se numesc *ecuațiile liniilor* soluțiile complexe ale ecuațiilor telegrafiștilor, exprimate în funcțiune de mărimile de la capetele liniei.

54.2.1. Ecuațiile liniilor exprimate în funcție de unda directă și unda inversă. Dacă se dă unda directă de tensiune, respectiv unda inversă, la începutul liniei, respectiv la sfîrșitul liniei

$$\underline{U}_d(0) = \underline{U}_{d0} = U_{d0}\, e^{j\psi_{d0}}, \tag{54.49}$$

respectiv

$$\underline{U}_i(l) = \underline{U}_{i0}\, e^{\underline{\gamma} l} = \underline{U}_{il} = U_{il}\, e^{j\psi_{il}}, \tag{54.50}$$

soluțiile generale (54.15), cu relațiile (54.18), (54.24), (54.25) și (54.26) se scriu:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_d(x) + \underline{U}_i(x) = \underline{U}_{d0} e^{-\underline{\gamma} x} + \underline{U}_{il}\, e^{-\underline{\gamma}(l-x)} \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_d(x) + \underline{I}_i(x) = \frac{\underline{U}_{d0}}{\underline{Z}_c}\, e^{-\underline{\gamma} x} - \frac{\underline{U}_{il}}{\underline{Z}_c}\, e^{-\underline{\gamma}(l-x)} \end{aligned}\right\} \tag{54.51}$$

În valori instantanee rezultă expresiile:

$$\begin{cases} u(x,t) = U_{d0}\, e^{-\alpha x}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta x + \psi_{d0}) + U_{il}\, e^{-\alpha(l-x)}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta(l-x) + \psi_{il}) \\ i(x,t) = \dfrac{U_{d0}}{Z_c} e^{-\alpha x}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta x + \psi_{d0} - \varphi_c) - \dfrac{U_{il}}{Z_c} e^{-\alpha(l-x)}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta(l-x) + \\ \qquad + \psi_{il} - \varphi_c). \end{cases} \tag{54.52}$$

Se observă că, dacă $l \gg x$ și linia are pierderi, $|e^{-\underline{\gamma}(l-x)}| \ll 1$ și unda inversă e practic neglijabilă, astfel că

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}(x) &\approx \underline{U}_d(x) = \underline{U}_{d0}\, e^{-\underline{\gamma} x} \\ \underline{I}(x) &\approx \underline{I}_d(x) = \frac{\underline{U}_{d0}}{\underline{Z}_c}\, e^{-\underline{\gamma} x} = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{Z}_c} \end{aligned}\right\}. \tag{54.53}$$

Acestea sînt ecuațiile *liniei infinit lungi* ($l \to \infty$).

54.2.2. Ecuațiile liniilor exprimate în funcțiune de mărimile de intrare. Dacă se dau tensiunea și curentul la bornele de intrare

$$\underline{U}_1 = \underline{U}(0) = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \tag{54.54}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}(0) = \frac{\underline{A}_1 - \underline{A}_2}{\underline{Z}_c}, \tag{54.55}$$

constantele complexe $\underline{A}_1$ și $\underline{A}_2$ sînt date de relațiile:

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{Z}_c\underline{I}_1); \quad \underline{A}_2 = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{Z}_c\underline{I}_1). \tag{54.56}$$

Cu aceste valori, soluțiile generale (54.15) devin:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \underline{Z}_c\underline{I}_1 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x \end{aligned}} \tag{54.57}$$

Observații: a) La *linia fără pierderi*:

$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega\sqrt{L_l C_l} = j\frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{iar} \quad Z_c = Z_0 = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}},$$

și deoarece

$$\operatorname{ch} j\beta x = \cos \beta x, \qquad \operatorname{sh} j\beta x = j \sin \beta x,$$

ecuațiile devin:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_1 \cos\beta x - jZ_0\underline{I}_1 \sin \beta x \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_1 \cos \beta x - j\frac{\underline{U}_1}{Z_0} \sin \beta x \end{aligned}\right\} \tag{54.58}$$

b) La *linia foarte scurtă*, cu $|\underline{\gamma} x| \ll 1$ pentru orice x, se pot reține, din dezvoltarea în serie a funcțiilor hiperbolice, numai termenii de gradul 0 și 1 în $\underline{\gamma} x$. Se obțin, pentru întreaga linie ($x = l$), ecuațiile:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{U}(l) \approx \underline{U}_1 - \underline{Z}_c \underline{\gamma} l\, \underline{I}_1 = \underline{U}_1 - (R_l\, l + j\omega L_l\, l)\, \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}(l) \approx \underline{I}_1 - \frac{\underline{\gamma} l}{\underline{Z}_c}\, \underline{U}_1 \approx \underline{I}_1 - \frac{\underline{\gamma} l}{\underline{Z}_c}\, \underline{U}_2 = \underline{I}_1 - (G_l l + j\omega C_l l)\, \underline{U}_2 \end{aligned}\right\} \tag{54.59}$$

corespunzătoare schemei echivalente cu parametrii concentrați din figura 54.2.

c) Observația precedentă permite să se stabilească un *criteriu cantitativ*, pentru a putea aprecia dacă un circuit poate fi tratat în aproximația parametrilor concentrați, adică în regim evasistaționar. Pentru aceasta trebuie ca $\beta l \ll 1$, sau, deoarece $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, trebuie ca

$$l \ll \lambda = \frac{v}{f}. \tag{54.60}$$

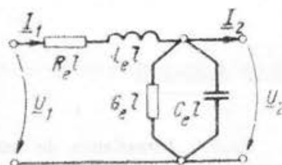


Fig. 54.2

Pot fi tratate ca linii scurte numai liniile avînd lungimea mică față de lungimea de undă corespunzătoare frecvenței de lucru. De aceea, o linie de transmisiune a energiei de 100 km, care lucrează la frecvența industrială de 50 Hz ($\lambda \approx 3.10^5/50 = 6\,000$ km) este o linie scurtă ($l/\lambda \approx 1/60$), pe cînd o linie de antenă de 10 m pentru televiziune, care lucrează la frecvențe de circa 50 MHz ($\lambda \approx 3.10^8/50.10^6 = 6$ m) este o linie lungă ($l/\lambda > 1$).

54.2.3. **Ecuațiile liniilor exprimate în funcțiune de mărimile de ieșire.** Dacă se dau tensiunea și curentul de la bornele de ieșire:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}(l) = \underline{A}_1 \mathrm{e}^{-\underline{\gamma} l} + \underline{A}_2 \mathrm{e}^{\underline{\gamma} l} \tag{54.61}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}(l) = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} \mathrm{e}^{-\underline{\gamma} l} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} \mathrm{e}^{\underline{\gamma} l}, \tag{54.62}$$

constantele complexe $\underline{A}_1 \mathrm{e}^{-\underline{\gamma} l}$ și $\underline{A}_2 \mathrm{e}^{\underline{\gamma} l}$ sînt date de relațiile:

$$\underline{A}_1 \mathrm{e}^{-\underline{\gamma} l} = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2); \quad \underline{A}_2 \mathrm{e}^{\underline{\gamma} l} = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2). \tag{54.63}$$

Cu aceste valori, soluțiile generale (54.15), exprimate în funcție de distanța $x' = l - x$, măsurată de la sfîrșitul liniei, devin:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{U}(x') &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x' + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x' \\ \underline{I}(x') &= \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x' + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x' \end{aligned}} \tag{54.64}$$

Observații: a) *La linia fără pierderi* aceste ecuații devin $\left(\text{cu } \beta = \dfrac{2\pi}{\lambda}\right)$:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}(x') &= \underline{U}_2 \cos \beta x' + \mathrm{j}\, Z_0 \underline{I}_2 \sin \beta x' \\ \underline{I}(x') &= \underline{I}_2 \cos \beta x' + \mathrm{j}\, \frac{\underline{U}_2}{Z_0} \sin \beta x' \end{aligned}\right\}. \tag{54.65}$$

b) Întreaga linie ($x' = l$) reprezintă un cuadripol reciproc și simetric, cu ecuațiile fundamentale:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\gamma} l \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l \end{aligned}\right\}. \tag{54.66}$$

54.3. Aplicații

54.3.1. **Impedanța de intrare a unei linii.** Dacă $\underline{Z}_2 = \underline{U}_2/\underline{I}_2$ e impedanța conectată la bornele de ieșire (v. fig. 54.3), *impedanța echivalentă la intrare* rezultă din relațiile (54.66):

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_2 \dfrac{\underline{I}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_2 \operatorname{th} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_c}. \tag{54.67}$$

În cazul liniei fără pierderi

$$\underline{Z}_c = Z_0; \quad \underline{\gamma} = j\beta = j\,\frac{2\pi}{\lambda}$$

şi se obţine

$$\underline{Z}_1 = Z_0\,\frac{\underline{Z}_2 + jZ_0\mathrm{tg}\beta l}{j\underline{Z}_2\mathrm{tg}\beta l + Z_0} = Z_0\,\frac{\underline{Z}_2 + jZ_0\mathrm{tg}\left(2\pi\,\frac{l}{\lambda}\right)}{j\underline{Z}_2\,\mathrm{tg}\left(2\pi\,\frac{l}{\lambda}\right) + Z_0}. \quad (54.68)$$

Se observă că o linie electrică fără pierderi acţionează ca un transformator de impedanţe. În cazul particular cînd $l = \frac{\lambda}{4}$ (linia în sfert de undă), se obţine:

$$\underline{Z}_1 = \frac{Z_0^2}{\underline{Z}_2}. \quad (54.69)$$

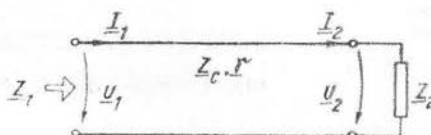


Fig. 54.3

O sarcină pur capacitivă determină, în acest caz, o impedanţă de intrare inductivă, şi invers (v. fig. 54.4, *a* şi *b*).

54.3.2. **Linia adaptată.** Se cere valoarea impedanţei de sarcină, care asigură anularea componentelor inverse de tensiune şi de curent. Din ecuaţiile (54.51), cu $x = l$ şi $\underline{U}_{il} = 0$, se obţine:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{d0}\,e^{-\underline{\gamma}l} \quad \text{şi} \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{d0}}{\underline{Z}_c}\,e^{-\underline{\gamma}l},$$

de unde $\underline{U}_2 = \underline{Z}_c\underline{I}_2$. Cum $\underline{Z}_2 = \underline{U}_2/\underline{I}_2$, rezultă:

$$\boxed{\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c}. \quad (54.70)$$

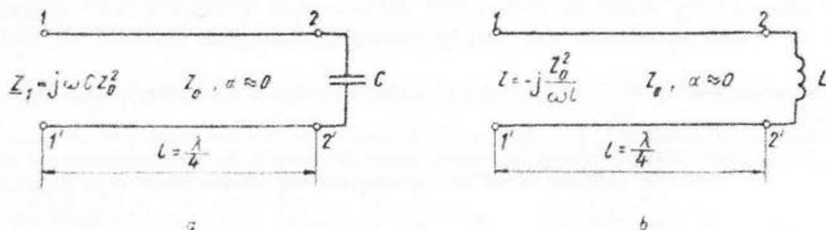


Fig. 54.4

Înlocuind această valoare în ecuaţia (54.67), se observă imediat că şi impedanţa de intrare rezultă egală cu $\underline{Z}_c$ (respectiv cu $\underline{Z}_2$),

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_c$$

şi, ţinînd seama de această relaţie, din ecuaţiile liniilor (54.57) se obţine:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1\,e^{-\underline{\gamma}x}; \quad \underline{I}(x) = \underline{I}_1 e^{-\underline{\gamma}x} = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{Z}_c}. \quad (54.71)$$

Condiția (54.69) e deci necesară și suficientă pentru anularea undelor inverse de tensiune și de curent în orice punct al liniei. În cazul cînd această condiție e realizată, linia se numește *adaptată* și raportul dintre tensiune și curent e egal cu impedanța caracteristică în orice punct al liniei.

54.3.3. **Linia fără distorsiuni.** Dacă o linie e adaptată (rel. 54.70) și nu prezintă dispersiune, adică dacă satisface și condiția lui Heaviside (54.45), pe linie se propagă numai unde directe, cu aceeași viteză, oricare ar fi frecvența lor, ceea ce asigură lipsa oricărei distorsiuni la transmiterea semnalelor nesinusoidale. De aceea, condițiile (54.45) și (54.70) caracterizează *linia fără distorsiuni*, pentru care, din relațiile (54.71), (54.46) și (54.47) rezultă :

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_1 e^{-G_l Z_0 x} e^{-j\frac{\omega}{v_0}x} = Z_0 \underline{I}(x) \tag{54.72}$$

sau

$$u(x, t) = Z_0 i(x, t) = U_1 e^{-\alpha x} \sqrt{2} \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v_0}\right) + \psi_1\right), \tag{54.73}$$

cu

$$Z_0 = \sqrt{L_l/C_l},\ v_0 = 1/\sqrt{L_l C_l},\quad \alpha = G_l Z_0 = \sqrt{R_l G_l} = \frac{R_l}{Z_0} \text{ și } \underline{U}_1 = U_1 e^{j\psi_1}.$$

CONDUCTOARE MASIVE

55. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC ÎN CONDUCTOARE MASIVE

Studiul circuitelor electrice de curent variabil a fost făcut în cadrul a două aproximații fundamentale (v. cap. 31): caracterul cvasistaționar al regimului de funcționare și caracterul filiform al conductoarelor care constituie circuitul. În studiul liniilor electrice lungi (cap. 53 și cap. 54) se înlătură (în cea mai mare parte) aproximația regimului cvasistaționar, dar se menține, de fapt, ipoteza caracterului filiform al conductoarelor. În cele ce urmează se vor prezenta cîteva probleme, în care se ia în considerare repartiția curentului în cuprinsul conductoarelor, adică se renunță la aproximația caracterului filiform. În schimb se menține ipoteza regimului cvasistaționar, adică se neglijează densitatea curentului de deplasare $\mathbf{J}_D = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ pe lîngă densitatea curentului de conducție $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Cît timp se studiază materiale conductoare propriu-zise (metale), care au conductivitatea $\sigma > 10^6 \Omega^{-1} \mathrm{m}^{-1}$, ipoteza regimului cvasistaționar e pe deplin justificată în toate problemele tehnice relative la studiul cîmpului electromagnetic *din interiorul* lor.

În adevăr, admițînd o variație sinusoidală cu frecvența $f = \frac{\omega}{2\pi}$ a mărimilor, densitatea curentului de deplasare are valoarea efectivă $J_D = \varepsilon\omega E$, iar densitatea curentului de conducție are valoarea efectivă $J = \sigma E$. Regimul cvasistaționar e realizat dacă $J_D \ll J$, adică dacă $\omega\varepsilon \ll \sigma$, de unde rezultă pentru pulsația de lucru condiția :

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{\tau}, \tag{55.1}$$

τ fiind așa-numitul *timp de relaxare* al materialului.

Cu valoarea $\sigma = 10^6\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$, cu $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\ 10^{-9}$ și cu $\omega = 2\pi f$ se obține acoperitor

$$f \ll 10^{16}\ \mathrm{Hz}.$$

Cele mai mari frecvențe utilizate azi în tehnică fiind de ordinul a 10 000 MHz = 10^{10} Hz, condiția aceasta e totdeauna satisfăcută. De aceea, chiar în regimul general variabil al undelor electromagnetice (v. cap. 57), în care se renunță în general și la aproximația regimului cvasistaționar și la aceea a circuitelor filiforme, se neglijează curentul de deplasare în mediile de conductivitate ridicată, cum sînt metalele.



55.1. Ecuațiile cîmpului electromagnetic în conductoare masive

55.1.1. Ecuațiile lui Maxwell pentru conductoare masive. Rezolvarea problemelor repartiției curentului în conductoare masive și a pierderilor prin efect Joule-Lenz corespunzătoare se poate face numai pe baza legilor cîmpului electromagnetic și, în particular, pe baza ecuațiilor lui Maxwell (par. 29.2, vol. I). Aceste ecuații sînt :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{55.2}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{55.3}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_v \tag{55.4}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \tag{55.5}$$

și reprezintă (în ordinea de mai sus) forma locală a *legii circuitului magnetic* în corpuri imobile, forma locală a *legii inducției electromagnetice* în medii imobile, forma locală a *legii fluxului electric* și forma locală a *legii fluxului magnetic*. Într-un mediu de permeabilitate μ, de permitivitate ε și de conductivitate $\sigma = \frac{1}{\rho}$ (unde ρ e rezistivitatea) și fără cîmp electric imprimat (cîmpul electric imprimat $\mathbf{E}_i$ e, în general, constant și nu prezintă interes în regim variabil), ecuațiile de mai sus se completează cu relațiile de material :

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E}, \tag{55.6}$$

care rezultă respectiv din legea magnetizării temporare, legea polarizației electrice temporare și legea conducției electrice (Ohm). În medii omogene, mărimile ε, μ și σ sînt constante. Introducînd relațiile (55.6) în primele două ecuații ale lui Maxwell și neglijînd densitatea curentului de deplasare $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, în conformitate cu cele arătate mai înainte, se obțin relațiile :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \sigma\mathbf{E} = \mathbf{J} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned}} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{55.7}$$

care reprezintă *ecuațiile fundamentale ale cîmpului electromagnetic în conductoare masive omogene*. Luînd divergența primei ecuații și ținînd seama de ultima ecuație a lui Maxwell, mai rezultă că cei trei vectori cîmp $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ și $\mathbf{J}$ sînt, în acest caz, solenoidali :

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{J} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \tag{55.8}$$

Luînd rotorul fiecăreia dintre ecuațiile (55.7), folosind identitatea

$$\text{rot rot } \mathbf{G} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{G}) = \nabla(\nabla\mathbf{G}) - (\nabla\nabla)\mathbf{G} = \text{grad div } \mathbf{G} - \Delta\mathbf{G}, \tag{55.9}$$

în care

$$\Delta \equiv \text{div grad} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{55.9'}$$

e operatorul laplacean și eliminînd cîte una dintre funcțiunile necunoscute, se obțin *ecuațiile de ordinul al doilea*, satisfăcute de vectorii cîmp **H**, **B**, **E**, **J**,

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta \mathbf{H} = \sigma\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; & \Delta \mathbf{B} = \sigma\mu \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \Delta \mathbf{J} = \sigma\mu \dfrac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}; & \Delta \mathbf{E} = \sigma\mu \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array}\right\} \tag{55.10}$$

În problemele de determinare a cîmpului trebuie să se observe că ecuațiile de ordinul doi de mai sus au soluții care sînt legate între ele prin ecuațiile de ordinul întîi (55.7). Ele trebuie completate, la suprafețe de discontinuitate, cu condițiile de conservare a componentelor tangențiale ale vectorilor **E** și **H** (v. par. 21.4 și 22.4, vol. I):

$$E_{t_1} = E_{t_2}, \quad H_{t_1} = H_{t_2} \tag{55.11}$$

și a componentelor normale ale vectorilor $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ și $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ (v. par. 12.2.3 și 20.2, vol. I)

$$\mu_1 H_{n_1} = \mu_2 H_{n_2}, \quad \sigma_1 E_{n_1} = \sigma_2 E_{n_2} \tag{55.12}$$

Observații: *a*) În cele ce urmează vom studia numai probleme referitoare la regimul permanent sinusoidal, în care se poate utiliza și reprezentarea în complex, care, în cazul vectorilor, se aplică fiecărei componente în parte, conducînd la vectori complecși, funcții numai de punct. Dacă $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{H}}$ și $\underline{\mathbf{J}}$ sînt imaginile în complex ale vectorilor **E**, **H** și **J**, ecuațiile (55.7) se reprezintă în complex sub forma:

$$\begin{array}{l} \text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \sigma\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{J}} \\ \text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\,\omega\underline{\mathbf{H}}. \end{array} \tag{55.13}$$

b) Principalele clase de probleme de cîmp electromagnetic care interesează în tehnică sînt următoarele:

— *problemele de curenți turbionari* (sau Foucault), în care se studiază curenții induși într-un conductor masiv de un cîmp magnetic variabil în timp:

— *problemele de efect pelicular* (curenți de aducție), în care se studiază repartiția neuniformă a unui curent alternativ dat pe secțiunea conductorului străbătut de acest curent;

— *problemele de efect de proximitate*, în care se studiază modificarea repartiției unui curent alternativ dat pe secțiunea conductorului, sub acțiunea cîmpului magnetic al altor conductoare vecine.

În cele ce urmează vom studia: o problemă idealizată — aceea a semispațiului conductor (par. 55.2), a cărei soluție permite rezolvarea aproximativă a problemelor de mai sus, în cazul frecvențelor foarte înalte; probleme de curenți turbionari (par. 55.3) și probleme de efect pelicular (cap. 56).

55.1.2. **Puterea activă disipată prin efect Joule-Lenz în regim periodic.** În problemele de cîmp electromagnetic, în conductoare masive interesează puterea disipată prin efect Joule-Lenz, într-o porțiune V_Σ a unui mediu

conductor, mărginită de o suprafață Σ. Conform legii transformării de energie în conductori (XI, par. 31.1), valoarea instantanee a acestei puteri este:

$$P_J(t) = \iiint\limits_{V_\Sigma} \mathbf{E}\mathbf{J}\, dv = \iiint\limits_{V_\Sigma} \rho \mathbf{J}^2\, dv = \iiint\limits_{V_\Sigma} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2 dv. \qquad (55.14)$$

Conform teoremei energiei electromagnetice (v. par. 29.4, vol. I, rel. 29.35), această putere se mai poate scrie:

$$P_J(t) = -\frac{dW(t)}{dt} + \iint\limits_{\Sigma} (\mathbf{E}\times\mathbf{H}) d\mathbf{A}_{int} \qquad (55.15)$$

unde primul membru e variația *energiei electromagnetice* instantanee localizate în V_Σ, iar al doilea membru e *fluxul de energie instantaneu* din exteriorul spre interiorul suprafeței Σ (am operat cu normala interioară în $d\mathbf{A}_{int} = -d\mathbf{A}$, unde $d\mathbf{A}$ e elementul de arie, orientat spre exterior), adică fluxul vectorului Poynting instantaneu

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}. \qquad (55.15')$$

În regim permanent periodic interesează numai valoarea medie pe o perioadă a acestor expresii, adică puterea activă disipată prin efect Joule-Lenz în conductor

$$P = \widetilde{P_J(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T P_J(t)\, dt.$$

Deoarece în acest regim și energia electromagnetică e o funcțiune periodică $W(t) = W(t+T)$, media derivatei energiei electromagnetice e nulă:

$$\widetilde{\frac{dW(t)}{dt}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dW}{dt} dA = \frac{1}{T}\int_0^T dW = \frac{1}{T}[W(T) - W(0)] = 0. \qquad (55.16)$$

Rezultă atunci, cu relația (55.14) și (55.15), că puterea activă disipată prin efect Joule-Lenz se poate calcula în două moduri:

— fie prin integrala de volum a mediei puterii dezvoltate în unitatea de volum:

$$\boxed{P = \widetilde{P_J(t)} = \iiint\limits_{V_\Sigma} \rho \mathbf{J}^2 dv = \iiint\limits_{V_\Sigma} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}_{ef}^2\, dv} \qquad (55.17)$$

— fie prin integrala de suprafață a mediei vectorului Poynting (afluxul de energie mediu):

$$\boxed{P = \widetilde{P_J(t)} = \iint\limits_{\Sigma} (\widetilde{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}) d\mathbf{A}_{int}}\,. \qquad (55.17')$$

55.2. Pătrunderea cîmpului electromagnetic în semispațiul conductor infinit

Considerăm un bloc de material conductor, de permeabilitate μ și conductivitate σ, limitat spre stînga de o față plană, teoretic infinit extinsă, și ocupînd întregul semispațiu drept (fig. 55.1). Alegem un sistem de axe cartezian, ca în figură, cu axa Ox normală pe fața blocului și dirijată spre interior. Se cere să se studieze pătrunderea cîmpului electromagnetic și repartiția curentului în acest semispațiu conductor, știind că la suprafața lui e stabilit în exterior un cîmp magnetic omogen tangențial $\mathbf{H}_0$ (a cărui orientare e aleasă ca axă Oz), care variază sinusoidal în timp (origine de fază):

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{k}H_0(t), \quad \text{cu}$$
$$H_0(t) = H_{0max} \sin \omega t. \qquad (55.18)$$

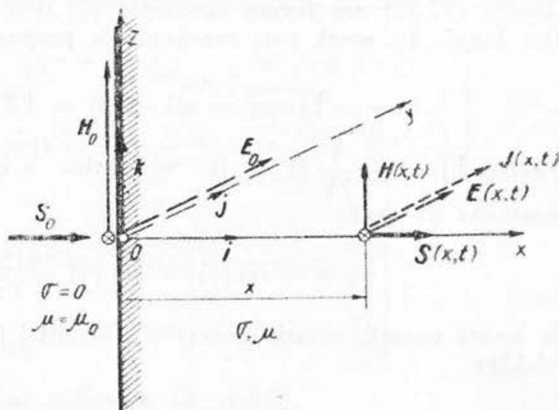


Fig. 55.1

Se studiază numai regimul permanent și se consideră că, datorită extinderii infinite a blocului în direcțiile Oy și Oz și a caracterului omogen al cîmpului magnetic la suprafața lui, toate mărimile de stare locală au aceeași valoare în toate punctele oricărui plan $x = \text{const.}$, paralel cu fața blocului. Altfel spus, toate aceste mărimi sînt funcțiuni numai de x și de t, adică în interiorul blocului:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, t); \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t); \qquad \mathbf{J} = \mathbf{J}(x, t). \qquad (55.19)$$

55.2.1. **Repartiția cîmpului și a curentului.** Deoarece la suprafața blocului se conservă componentele tangențiale ale cîmpului **H**, valoarea acestuia în interior pentru $x \to 0$ trebuie să fie egală cu cîmpul tangențial exterior (55.18)

$$\mathbf{H}(0, t) = \mathbf{H}_0 = \mathbf{k}H_0(t)$$

și putem admite că în oricare alt punct, **H** are numai componente după Oz, adică

$$\mathbf{H}(x, t) = \mathbf{k}\, H_z\,(x, t), \qquad (55.19')$$

cu

$$H_z(0, t) = H_0(t) = H_{0max} \sin \omega t. \qquad (55.20)$$

Din relațiile (55.10) rezultă atunci că în interiorul blocului această unică componentă a cîmpului magnetic satisface ecuația:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\mathrm{d}x^2} = \sigma\mu\, \frac{\partial H_z}{\partial t}. \qquad (55.21)$$

În regim permanent sinusoidal, această ecuație *se reprezintă în complex simplificat* sub forma:

$$\frac{d^2\underline{H}_z}{dx^2} = j\,\omega\mu\sigma\,\underline{H}_z = \underline{\gamma}^2\underline{H}_z, \tag{55.22}$$

astfel că

$$H_z(x, t) = \mathrm{Im}\{\underline{H}_z\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\}. \tag{55.23}$$

Ecuația (55.22) are forma ecuațiilor (54.10), studiate în teoria liniilor electrice lungi. În acest caz, *constanta de propagare* este:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\,\omega\mu\sigma} = \alpha(1 + j) = \sqrt{2}\,\alpha e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (\alpha > 0), \tag{55.24}$$

deoarece $\sqrt{j} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j)$. Se obține o constantă de atenuare egală cu constanta de fază:

$$\alpha = \mathrm{Re}\{\underline{\gamma}\} = \mathrm{Im}\{\underline{\gamma}\} = \frac{|\underline{\gamma}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}. \tag{55.25}$$

Cu aceste notații, soluția generală a ecuației (55.22) este analogă cu relația (54.12):

$$\underline{H}_z = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{+\underline{\gamma}x}.$$

În acest caz, deoarece blocul conductor e presupus infinit extins ($0 \leqslant x \leqslant \infty$), unda inversă trebuie să se anuleze, pentru a avea cîmp magnetic finit la $x \to \infty$, adică $\underline{A}_2 = 0$. Cu $x = 0$, $\underline{H}_z = \underline{H}_z(0) = \underline{A}_1$ rezultă soluția:

$$\underline{H}_z = \underline{H}_z(0)e^{-\underline{\gamma}x}. \tag{55.26}$$

Dar

$$\underline{H}_z(0) = \underline{H}_0 = \frac{H_{0_{max}}}{\sqrt{2}} \tag{55.27}$$

e imaginea complexă a cîmpului magnetic de la fața blocului (55.20), așa că imaginea complexă a cîmpului magnetic din interior, ținînd seama și de relația (55.24), se scrie:

$$\underline{H}_z = \frac{H_{0_{max}}}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x} e^{-j\alpha x} = \frac{H_{0_{max}}}{\sqrt{2}} e^{-\underline{\gamma}x}, \tag{55.28}$$

iar valoarea instantanee se scrie:

$$H_z(x, t) = H_{0_{max}} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x). \tag{55.29}$$

Aceasta este o undă elementară directă, puternic atenuată, cu viteza de fază v și lungimea de undă λ, date de relațiile (v. par. 54.1.2.):

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\mu\sigma}}. \tag{55.30}$$

Densitatea de curent **J** şi intensitatea cîmpului electric **E** se deduc din prima ecuaţie a lui Maxwell (55.7), observînd că, deoarece $\mathbf{H} = \mathbf{k}H_z(x, t)$, singurele componente nenule ale rotorului lui **H**, şi deci ale acestor vectori, sînt dirijate după Oy (adică paralel cu faţa blocului şi perpendicular pe direcţia lui **H** (v. fig. 55.1):

$$\mathbf{J} = \text{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}\,J_y(x, t); \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}\,\mathbf{J} = \mathbf{j}\,E_y(x, t). \tag{55.31}$$

Dezvoltînd rotorul lui **H** se obţine cu relaţiile (55.28) şi (55.25) în complex:

$$\left.\begin{aligned} \underline{J}_y(x) &= -\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = \frac{H_{0_{max}}}{\sqrt{2}}\,\alpha(1+\mathrm{j})\,e^{-\underline{\gamma}x} = \alpha H_{0_{max}}\,e^{-\alpha x}\,e^{-\mathrm{j}\left(\alpha x - \frac{\pi}{4}\right)} \\ \underline{E}_y(x) &= \frac{1}{\sigma}\,\underline{J}_y(x) = \frac{H_{0_{max}}}{\sqrt{2}\,\sigma}\,\alpha\,(1+\mathrm{j})\,e^{-\underline{\gamma}x} = \frac{\alpha}{\sigma}\,H_{0_{max}}\,e^{-\alpha x}\,e^{-\mathrm{j}\left(\alpha x - \frac{\pi}{4}\right)}, \end{aligned}\right\} \tag{55.32}$$

cu valorile instantanee

$$\left.\begin{aligned} J_y(x, t) &= \alpha H_{0_{max}}\sqrt{2}\;e^{-\alpha x}\,\sin\left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}\right) \\ E_y(x, t) &= \frac{\alpha}{\sigma}\,H_{0_{max}}\sqrt{2}\;e^{-\alpha x}\,\sin\left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}\right\} \tag{55.33}$$

defazate cu $\frac{\pi}{4}$ înaintea cîmpului magnetic (fig. 55.2).

Valoarea efectivă a intensităţii cîmpului electric la suprafaţa conductorului rezultă:

$$E_{0_{ef}} = (E_y(0, t))_{ef} = \frac{\alpha}{\sigma}\,H_{0_{max}} = \sqrt{2}\,\frac{\alpha}{\sigma}\,H_{0_{ef}}, \tag{55.34}$$

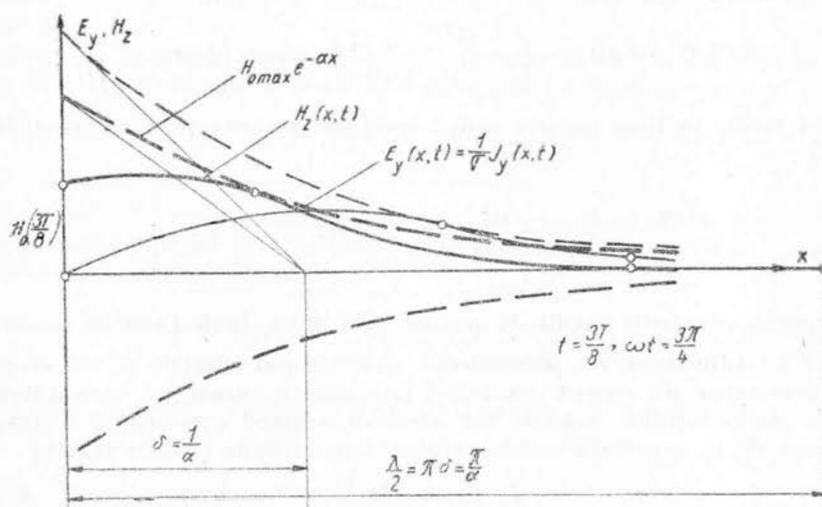


Fig. 55.2

unde $H_{0_{ef}} = \frac{H_{0_{max}}}{\sqrt{2}}$ e valoarea efectivă a intensității cîmpului magnetic la suprafața conductorului.

55.2.2. **Pierderile de putere.** Deoarece $\mathbf{E} = \mathbf{j}E_y$ și $\mathbf{H} = \mathbf{k}H_z$, vectorul densității fluxului de energie, adică vectorul Poynting (55.15') e dirijat în sensul x-lor pozitivi (în care se propagă undele elementare $H_z(x, t)$ și $E_y(x, t)$),

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}\, E_y H_z = \mathbf{i} E_y H_z = \mathbf{i} S_x(x, t). \qquad (55.35)$$

Cu relațiile (55.29) și (55.33) rezultă valoarea instantanee:

$$S_x(x, t) = H_{0_{max}}^2 \frac{\alpha}{\sigma} \sqrt{2}\, e^{-2\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x) \sin\left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}\right)$$

sau

$$S_x(x,t) = \frac{H_{0max}^2}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{\sigma} e^{-2\alpha x} \left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(2\omega t - 2\alpha x + \frac{\pi}{4}\right)\right). \qquad (55.36)$$

Așa cum știm, mărimea $S_x = |\mathbf{S}|$ reprezintă puterea instantanee transmisă prin unitatea de suprafață (a planelor x = const.). Acest aflux de energie provine de la cîmpul electromagnetic exterior și scade rapid o dată cu pătrunderea în conductor. Deoarece în regim periodic energia electromagnetică a cîmpului nu variază în medie (rel. 55.16), valoarea medie pe o perioadă a vectorului Poynting scade cu distanța x, datorită exclusiv faptului că acoperă pierderile locale de putere prin efect Joule-Lenz. Practic, aceste pierderi locale sînt importante numai aproape de suprafața blocului, unde $x < \frac{1}{2\alpha}$. Valoarea aportului de putere instantanee prin unitatea de suprafață a conductorului este

$$S_x(0, t) = S_0(t) = \frac{P(t)}{A} = \frac{H_{0max}^2}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{\sigma} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

și are ca medie în timp *puterea activă specifică* (primită prin unitatea de suprafață):

$$\frac{\overline{P(t)}}{A} = \frac{P}{A} = \boxed{\frac{H_{0max}^2}{2} \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\alpha}{\sigma} H_{0_{ef}}^2 = \frac{\sigma}{2\alpha} E_{0_{ef}}^2}. \qquad (55.37)$$

care acoperă pierderile medii de putere prin efect Joule-Lenz în conductor.

55.2.3. **Adîncimea de pătrundere.** Atît cîmpul electric și cel magnetic cît și densitatea de curent au valori importante numai în vecinătatea suprafeței conductorului, valorile lor efective scăzînd exponențial o dată cu depărtarea de la suprafața conductorului. Din relațiile (55.33) rezultă:

$$J_{y_{ef}}(x) = \alpha H_{0_{max}} e^{-\alpha x} \qquad (55.38)$$

(v. curba plină din fig. 55.3).

Se numește *adîncime de pătrundere* (sau adîncime echivalentă de pătrundere) a cîmpului electromagnetic în semispațiul conductor distanța δ de la suprafața acestui semispațiu, pe care ar trebui repartizat în mod uniform și sinfazic curentul total, pentru ca pierderile de putere activă să fie aceleași.

Curentul total pe înălțimea a (în sensul Oz) este în complex cu relațiile (55.32):

$$\underline{I} = \int_0^\infty \underline{J}_y(x) a \, \mathrm{d}x = -a \int_0^\infty \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \mathrm{d}x = a(\underline{H}_z(0) - \underline{H}_z(\infty)) = a\underline{H}_0$$

și are valoarea efectivă:

$$I = aH_{0_{ef}} = \frac{a}{\sqrt{2}} H_{0_{max}}. \quad (55.39)$$

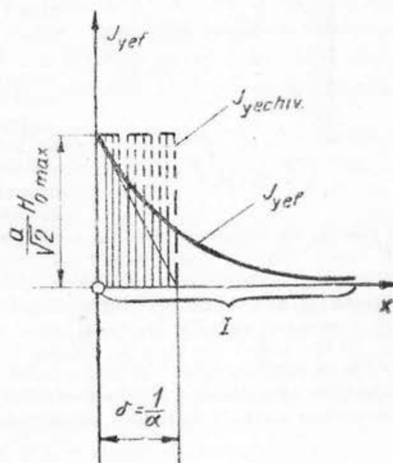


Fig. 55.3

Dacă ar fi repartizat uniform și sinfazic pe grosimea δ, ar avea o densitate de curent echivalentă (efectivă):

$$J_{y\,\text{echivalent}} = \frac{I}{a\delta} = \frac{H_{0_{max}}}{\delta} \quad (55.40)$$

(v. curba punctată din fig. 55.3).

Valoarea adîncimii de pătrundere se obține egalînd pierderile reale de putere activă cu cele care s-ar obține cu repartiția uniformă a curentului în stratul de grosime δ.

Pentru o porțiune dreptunghiulară de arie $A = ab$ din fața blocului (v. fig. 55.4), puterea activă de pierderi absorbită de la cîmp este (cu 55.37):

$$P = \left(\frac{P}{A}\right) ab = \frac{\alpha}{\sigma} \frac{H_{0_{max}}^2}{2} ab. \quad (55.41)$$

Dacă curentul (55.39) ar fi uniform repartizat pe grosimea δ, ar determina în volumul paralelipipedic $a \cdot \delta \cdot b$, corespunzător ariei A (v. fig. 55.4), pierderile de putere:

$$P = RI^2 = \frac{1}{\sigma} \frac{b}{a\delta} \frac{a^2 H_{0_{max}}^2}{2} = \frac{ab}{\sigma\delta 2} H_{0_{max}}^2 \quad (55.42)$$

Egalînd aceste valori, rezultă pentru adîncimea de pătrundere expresia:

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu\sigma}} = \frac{\lambda}{2\pi}} \,. \quad (55.43)$$

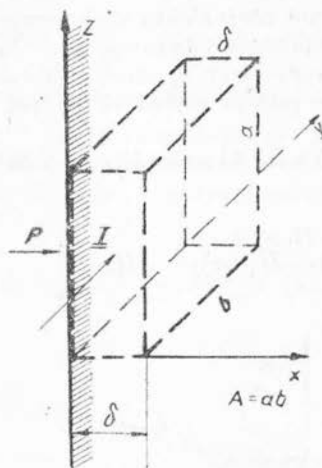


Fig. 55.4

Din această relație rezultă că adîncimea de pătrundere e o caracteristică a materialului, invers proporțională cu rădăcina pătrată a frecvenței. Această caracteristică e utilă atît pentru calculul pierderilor de putere (ca și cum întregul curent ar fi repartizat uniform la suprafața blocului pe grosimea δ), cît și pentru a aprecia cu aproximație pătrunderea cîmpului electromagnetic în mediul conductor: pentru $x = \delta$ cîmpurile H_z, E_y, J_y scad de $e \approx 2{,}718$ ori, iar vectorul Poynting de $e^2 \approx 7{,}389$ ori. În tabela 55.1 sînt indicate cîteva valori ale adîncimii de pătrundere.

Observație: Teoria dezvoltată aici e riguros exactă numai pentru semispațiul conductor infinit. În cazul unui conductor oarecare finit, dacă dimensiunile și raza de curbură minimă a suprafeței lui sînt foarte mari față de adîncimea de pătrundere corespunzătoare frecvenței de lucru, această teorie se poate aplica local cu bună aproximație, permițînd calculul pierderilor de putere activă, care revin unității de suprafață, cu formula (55.37), în funcție de valoarea efectivă a cîmpului magnetic exterior tangențial (sau a celui electric). În acest caz se mai spune că pierderile au fost calculate cu metoda adîncimii de pătrundere. Deoarece adîncimea de pătrundere e invers proporțională cu rădăcina pătrată a frecvenței de lucru, la frecvențe suficient de înalte se poate întotdeauna aplica această metodă. În cazul unui conductor cilindric de cupru, de rază $a = 2$ mm, la $f = 50$ Hz, $\delta \approx 1$ cm $> a$ (v. tabela 55.1) și nu se poate face nici un fel de analogie cu problema semispațiului conductor infinit; la frecvența $f = 0{,}5$ MHz însă $\delta \approx 0{,}1$ mm $\ll a$ și suprafața exterioară a conductorului cu o rază de curbură mult mai mare decît adîncimea de pătrundere poate fi asimilată cu suprafața semispațiului conductor (v. și par. 56.3).

Tabela 55.1

Materialul	σ $[\Omega^{-1}\,m^{-1}]$	μ $[H \cdot m^{-1}]$	δ[m]		
			$f = 50$ Hz	$f = 5\,000$ Hz	$f = 0{,}5$ MHz
Cupru	$57 \cdot 10^6$	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$	$9{,}5 \cdot 10^{-3}$	$0{,}95 \cdot 10^{-3}$	$0{,}095 \cdot 10^{-3}$
Fier (cu $\mu_r \approx 200$)	$10 \cdot 10^6$	$200\,\mu_0$	$1{,}8 \cdot 10^{-3}$	$0{,}18 \cdot 10^{-3}$	$0{,}018 \cdot 10^{-3}$
Apa de mare (valori indicative)	~ 5	μ_0	~ 30	~ 3	$\sim 0{,}3$
Sol (valori indicative)	$\sim 10^{-2}$	μ_0	~ 750	~ 75	$\sim 7{,}5$

55.3. Probleme de curenți turbionari

Se numesc *curenți turbionari* sau *curenți Foucault*, curenții induși într-un conductor masiv de un cîmp magnetic variabil în timp.

În aplicațiile tehnice, curenții turbionari apar în miezurile feromagnetice ale circuitelor magnetice din mașinile și aparatele electrice de curent alternativ, determinînd pierderi suplimentare de putere prin efect Joule-Lenz.

(v. şi par. 49.4.3.) şi înrăutăţind funcţionarea acestor maşini şi aparate. Totodată, există numeroase aplicaţii utile ale acestor curenţi: încălzirea electrică prin inducţie (în care se utilizează puterea dezvoltată de aceşti curenţi pentru a încălzi şi chiar pentru a topi conductorul), frînele şi ambreiajele electromagnetice de inducţie (în care se utilizează forţele pe care cîmpul magnetic le exercită asupra conductorului parcurs de aceşti curenţi) etc.

Deoarece, prin apariţia curenţilor turbionari şi a cîmpului magnetic suplimentar, produs de aceşti curenţi (numit şi cîmp magnetic de reacţiune al curenţilor turbionari), repartiţia cîmpului magnetic în cuprinsul conductorului este mai mult sau mai puţin influenţată, revolvarea exactă a acestor probleme necesită utilizarea ecuaţiilor generale (55.6). În cazurile limită ale frecvenţelor joase (cîmp magnetic de reacţiune neglijabil) şi ale frecvenţelor înalte (adîncime de pătrundere mică faţă de dimensiunile conductorului) se utilizează metode aproximative, aşa cum arătăm în cele ce urmează.

55.3.1. **Pierderi prin curenţi turbionari în tole feromagnetice.** Miezul feromagnetic al unui circuit magnetic, cu o înfăşurare de curent alternativ (fig. 55.5, *a*), e străbătut de un flux magnetic $\Phi = \Phi_{max} \sin \omega t$, sub acţiunea căruia se induc curenţi cu liniile de curent conţinute în plane transversale faţă de liniile cîmpului magnetic (în fig. 55.5, *a* sînt indicate sensurile de referinţă pentru aceşti curenţi, de densitate **J** sensurile reale instantanee depinzînd de momentul din perioadă considerat). Pentru a reduce pierderile de putere determinate de aceşti curenţi (pierderile din fier prin curenţi turbionari), se divizează miezul în tole izolate între ele (v. fig. 55.5, *b*, unde pentru claritatea desenului, s-au figurat numai trei tole) ceea ce măreşte rezistenţa căilor de închidere ale acestor curenţi şi reduce intensitatea lor. Considerăm o astfel de tolă (fig. 55.6) de înălţime *h*, de lăţime *l* şi de grosime Δ foarte mică

$$\Delta \ll l, \quad \Delta \ll h \tag{55.44}$$

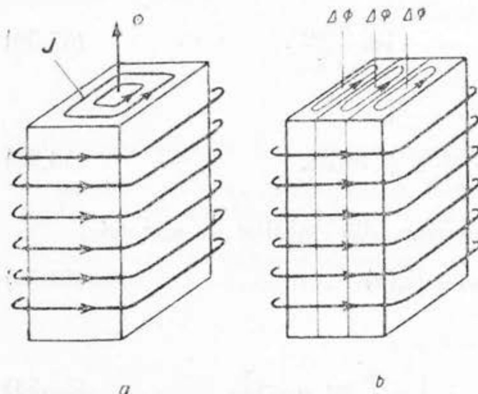


Fig. 55.5

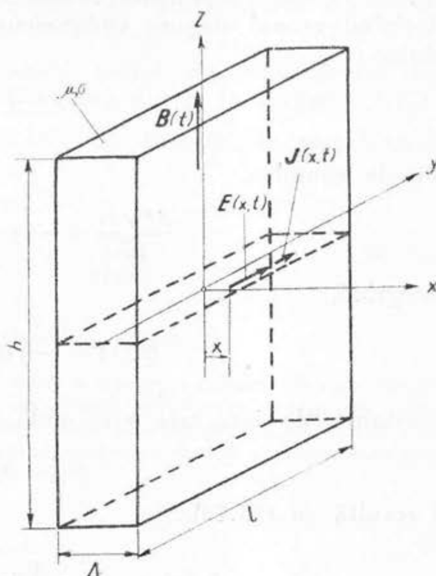


Fig. 55.6

și determinăm puterea activă dezvoltată în tolă de curenții induși, în ipoteza că se neglijează cîmpul magnetic de reacțiune al acestor curenți. În acord cu această ipoteză și alegînd axele ca în figura 55.6, inducția magnetică în tolă e un cîmp omogen, dirijat după axa Oz:

$$\mathbf{B} = \mathbf{k}B_z(t), \tag{55.45}$$

cu valoarea instantanee și reprezentarea în complex:

$$B_z(t) = B_{max} \sin \omega t \rightleftarrows \underline{B}_z = \frac{B_{max}}{\sqrt{2}}. \tag{55.46}$$

Deoarece tola e foarte subțire (v. rel. 55.44), o putem considera infinit extinsă, din punctul de vedere al repartiției curentului în zona ei centrală (adică neglijînd întoarcerea liniilor de curent la marginile ei). Putem admite atunci că densitatea de curent $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, care la fețele $x = \pm \frac{\Delta}{2}$ trebuie să fie tangențială, e dirijată în sensul axei Oy și depinde numai de variabila spațială x:

$$\mathbf{J} = \mathbf{j}\, J_y(x, t), \quad \mathbf{E} = \mathbf{j}E_y(x, t), \tag{55.47}$$

cu valorile instantanee și reprezentările în complex

$$J_y(x, t) = \sigma E_y(x, t) \rightleftarrows \underline{J}_y(x) = \sigma \underline{E}_y(x). \tag{55.48}$$

Intensitatea cîmpului electric indus în tolă $\mathbf{E}$ se poate calcula din inducția magnetică $\mathbf{B}$ cu ajutorul celei de-a doua ecuații a lui Maxwell (v. a doua rel. 55.7), care reprezintă forma locală a legii inducției electromagnetice. Reținînd numai singura componentă nenulă a acestei ecuații (după Oz) se obține:

$$\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(t)}{\partial t}, \tag{55.49}$$

sau, în complex,

$$\frac{\mathrm{d}\underline{E}_y(x)}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{j}\,\omega \underline{B}_z = -\mathrm{j}\,\omega \frac{B_{max}}{\sqrt{2}}. \tag{55.50}$$

Integrînd,

$$\underline{E}_y(x) = -\mathrm{j}\,\omega \frac{B_{max}}{\sqrt{2}}\, x + \text{const.} \tag{55.51}$$

Constanta de integrare este nulă, deoarece, din motive de simetrie,

$$\underline{E}_y(-x) = -\underline{E}_y(x) \tag{55.52}$$

și rezultă cu (55.48),

$$\underline{J}_y(x) = -\mathrm{j}\,\omega\sigma \frac{B_{max}}{\sqrt{2}}\, x = \omega\sigma \frac{B_{max}}{\sqrt{2}}\, x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}, \tag{55.53}$$

cu valoarea instantanee :

$$J_y(x, t) = \omega\sigma B_{max}\, x \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{55.54}$$

Curenții induși sînt proporționali cu frecvența, sînt defazați în urma fluxului magnetic cu $\frac{\pi}{2}$ (așa cum am admis și la studiul ciclului de magnetizare al bobinei cu miez de fier) și variază liniar (cu x) în grosimea tolei. Densitatea de volum a puterii instantanee disipate prin efect Joule rezultă :

$$p_J(x,t) = \frac{1}{\sigma} J_y^2(x, t) = \omega^2\sigma B_{max}^2 \frac{x^2}{2} (1 + \cos 2\omega t). \tag{55·55}$$

Puterea instantanee disipată în întreaga tolă se obține prin integrare cu $dv = l\, h\, dx$,

$$P_J(t) = \iiint p_J(x,t)\, dv = lh\omega^2\sigma \frac{B_{max}^2}{2} (1 + \cos 2\omega t) \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} x^2\, dx$$

$$P_J(t) = lh\, \omega^2\sigma \frac{B_{max}^2}{24} \Delta^3(1 + \cos 2\omega t). \tag{55.56}$$

Puterea activă disipată de curenții turbionari în tolă se obține luînd media pe o perioadă a acestei expresii. Cu $\omega = 2\pi f$ rezultă :

$$\widetilde{P}_J(t) = (\Delta\, lh) \frac{\pi^2}{6} f\ \sigma\ B_{max}^2 \Delta^2 \quad [\omega]. \tag{55.57}$$

Pierderile specifice prin curenți turbionari (adică pierderile pe unitatea de volum a tolei) se calculează împărțind această putere la volumul $\Delta\, l \cdot h \cdot$ al tolei. Înlocuind și conductivitatea $\sigma = \frac{1}{\rho}$ în funcție de rezistivitate, se obține expresia :

$$\boxed{p_f = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\rho} \Delta^2 f^2 B_{max}^2} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right], \tag{55.58}$$

utilizată în studiul bobinei cu miez de fier (rel. 49.68).

Observații: a) Aceste pierderi au fost calculate la frecvențe suficient de joase, pentru a neglija cîmpul magnetic al curenților induși. Cum această aproximație corespunde neglijării variației cîmpului magnetic în cuprinsul tolei, rezultă, prin comparație cu studiul cîmpului în semispațiul conductor, că această aproximație corespunde cazului cînd grosimea tolei e foarte mică față de adîncimea de pătrundere :

$$\Delta \ll \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}. \tag{55.59}$$

În practică, la $f = 50$ Hz, în fier $\delta \approx 1 ... 2$ mm, iar tolele au $\Delta = 0{,}5$ mm și $0{,}35$ mm. Studiul exact arată că în aceste condiții aproximația de mai sus e satisfăcătoare.

b) Pierderile sînt proporționale cu pătratul frecvenței, cu pătratul inducției maxime și cu pătratul grosimii tolei. La frecvență și tole date, proiectantul aparatelor și mașinilor electrice trebuie să asigure o inducție maximă compatibilă cu pierderi admisibile.

c) Pierderile sînt invers proporționale cu rezistivitatea tolelor. De aceea se utilizează tole cu rezistivitatea sporită, prin îmbogățirea fierului cu siliciu. Se ajunge astfel la pierderi prin curenți turbionari sub 1 W/kg pentru B_{max} de ordinul a 1 tesla (10^4 gauss). În practică interesează însă pierderile totale, care includ și pierderile prin isterezis cu valori de același ordin de mărime.

55.3.2. Încălzirea prin inducție la frecvențe înalte. În numeroase probleme de încălzire superficială prin inducție — cum sînt topirea unor șarje în cuptoare de inducție fără fier (*S* în fig. 55.7, *a*) sau călirea superficială a unor piese cilindrice (*F* în fig. 55.7, *b*), sub acțiunea

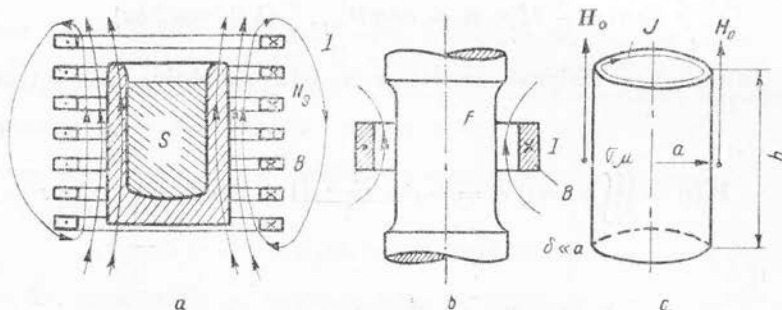


Fig. 55.7

unui cîmp magnetic de frecvență relativ înaltă (din punctul de vedere al pătrunderii cîmpului în materialul conductor încălzit), produs de o bobină inductoare *B* — se poate admite următoarea schematizare (fig. 55.7, *c*): un corp conductor cilindric, de rază *a* și înălțime *h* e supus acțiunii unui cîmp magnetic tangențial sinusoidal

$$H_0(t) = H_{0_{max}} \sin \omega t = H_{0_{ef}}\sqrt{2} \sin \omega t. \tag{55.60}$$

În corpul conductor, de conductivitate σ și permeabilitate μ, se induc curenți turbionari și se cere puterea activă totală disipată de acești curenți. Dacă frecvența e suficient de înaltă, pentru ca adîncimea de pătrundere a cîmpului să fie mică față de raza conductorului

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \ll a\,, \tag{55.61}$$

curenții turbionari au linii de cîmp circulare, localizate în imediata apropiere a suprafeței conductorului. Încălzirea e deci superficială, dar căldura se transmite prin conducție și restului conductorului, dacă timpul de încălzire e suficient de mare (cazul topirii unei șarje în cuptoare). Adîncimea de pătrundere fiind mică, se poate calcula puterea cu formula (55.37) de la semispațiul conductor, considerînd cîmpul omogen repartizat (ceea ce reprezintă o primă aproximație) pe întreaga suprafață laterală

$$P = \left(\frac{P}{A}\right)\cdot 2\pi\, ah = 2\pi\, ah\, \frac{\alpha}{\sigma}\, H_{0ef}^2. \quad [\mathrm{W}] \tag{55.62}$$

Cîmpul exterior H_0 trebuie calculat separat, ținînd seama de configurația bobinei inductoare care îl produce. În cazul din figura 55.7, *a*, în care bobina e un solenoid drept, suficient de lung, cu N_s spire pe unitatea de lungime, parcurs de curentul efectiv *I*, se poate scrie (v. par. 21.5.1, vol. I):

$$H_{0_{ef}} = N_s \cdot I \quad \left[\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}}\right] \tag{55.63}$$

56. EFECTUL PELICULAR

Dacă un curent variabil $i(t)$ parcurge un conductor cilindric rectiliniu (fig. 56.1), repartiția curentului nu se mai face uniform pe secțiunea conductorului, ca în regim staționar (în curent continuu). În regim variabil, densitatea de curent are valori mai mici în axul conductorului și mai mari la periferia secțiunii acestuia. Acest fenomen se numește *efect pelicular* (sau *efect skin* — de la cuvîntul skin — piele, în limba engleză) sau *efect de refulare a curentului* și are următoarele consecințe: sporirea pierderilor de putere prin efect Joule-Lenz în conductor (pierderi, care fiind proporționale cu pătratul densității de curent, sînt minime la repartiția uniformă a aceluiași curent total), sporirea rezistenței echivalente a conductorului, reducerea inductivității lui interioare și dependența tuturor acestor mărimi de frecvența de lucru.

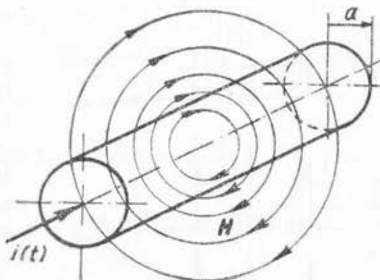


Fig. 56.1

56.1 Problemele efectului pelicular

56.1.1. **Analiza calitativă și interpretarea efectului pelicular.** Modificarea repartiției curentului alternativ pe secțiunea conductorului o dată cu creșterea frecvenței se datorește curenților suplimentari, induși de cîmpul magnetic variabil în timp din interiorul conductorului.

Din punctul de vedere al pătrunderii cîmpului electromagnetic în conductoare (par. 55.2), efectul pelicular se poate analiza în funcție de raportul dintre raza a a conductorului și adîncimea de pătrundere δ.

$$\frac{a}{\delta} = a\alpha = a\sqrt{\pi f \sigma \mu}. \qquad (56.1)$$

În curent continuu, acest raport e nul ($f = 0$) și curentul se repartizează uniform pe secțiune (v. fig. 56.2, unde se reprezintă valoarea efectivă a densității de curent ca funcție de raza conductorului, cazul *a*).

La frecvențe suficient de joase, astfel ca $\delta \gg a$ și $\frac{a}{\delta} \ll 1$, pătrunderea cîmpului electromagnetic în conductor începe să fie incompletă și densitatea de curent e mai mică în ax (fig. 56.2, *b*). Aceasta e *efectul pelicular slab*, în care, în primă aproximație, se poate neglija cîmpul magnetic suplimentar al curenților induși (v. par. 56.2).

La frecvențe mai înalte, adîncimea de pătrundere scade și ajunge de același ordin cu raza conductorului, adică $\delta \approx a$ și $\frac{a}{\delta} \approx 1$. În acest caz, pătrunderea

cîmpului electromagnetic e parțială și efectul de refulare a curentului e important (fig. 56.2, c). Acesta e *efectul pelicular mediu*, în care determinarea repartiției curentului se poate face numai integrînd ecuațiile cîmpului (55.6), ceea ce conduce la calcule relativ complicate[1].

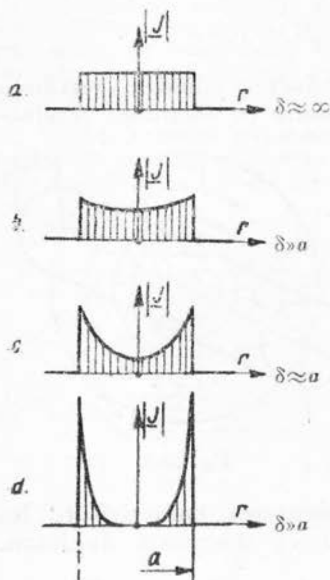


Fig. 56.2

La frecvențe foarte înalte, adîncimea de pătrundere e foarte mică față de raza conductorului, adică $\delta \ll a$ și $\frac{a}{\delta} \gg 1$. În acest caz, cîmpul electromagnetic pătrunde, practic, numai într-un strat superficial, de ordinul adîncimii de pătrundere, cu o repartiție practic identică cu aceea studiată în cazul semispațiului conductor infinit (fig. 56.2, *d*). Acesta e *efectul pelicular net* (sau pronunțat), care se studiază asimilînd suprafața conductorului cu aceea a unui semispațiu conductor (v. par. 56.3).

Din punctul de vedere al teoriei circuitelor electrice, efectul pelicular poate fi explicat, asimilînd conductorul masiv cu un ansamblu de conductoare tubulare concentrice, cu pereți suficient de subțiri, pentru ca în cuprinsul fiecăruia repartiția curentului să poată fi considerată uniformă. În acest caz, conductoarele din interior sînt înlănțuite de mai multe linii de cîmp magnetic, au o inductivitate mai mare și o impedanță mai mare și — drept urmare — au un curent mai mic.

O analiză mai exactă se poate face în cazul simplu cînd conductorul studiat (fig. 56.1) e asimilat unui sistem de două conductoare concentrice (1) și (2), conectate în paralel (fig. 56.3).

Oricum s-ar considera închis prin exterior (curba Γ_{ex}) circuitul fiecăruia dintre aceste două conductoare, pentru a defini inductivitățile lor L_1 și L_2, ele admit schema echivalentă din figura 56.4, *a*, în care apare și inductivitatea lor mutuală L_{12} și rezistențele lor R_1 și R_2.

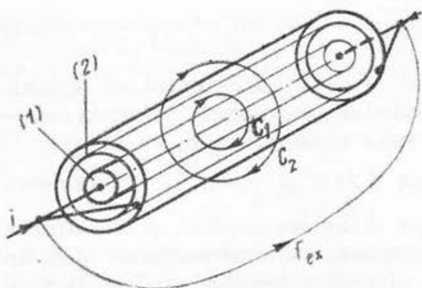


Fig. 56.3

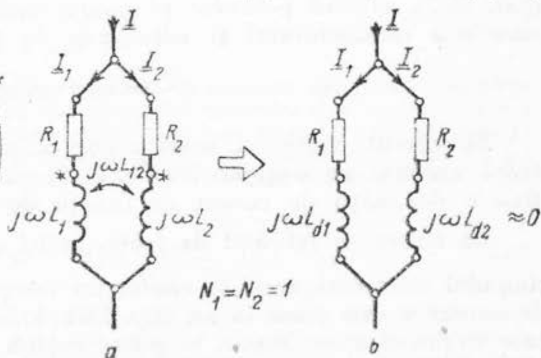


Fig. 56.4

[1] V. R. Rădulet, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. IV, Efectul pelicular în conductorul cilindric, rezolvat prin metoda integrării ecuațiilor cîmpului.

Se observă că dacă se descompun fluxurile proprii (v. şi par. 27.1, vol. I) care înlănţuie aceste conductoare (prin suprafeţe mărginite în exterior de Γ_{ex}) într-o parte utilă (corespunzătoare liniilor de cîmp care înlănţuie şi celălalt conductor) şi o parte de dispersiune (corespunzătoare liniilor de cîmp care înlănţuie numai conductorul considerat),

$$\Phi_{11} = \Phi_{u1} + \Phi_{d1}; \qquad \Phi_{22} = \Phi_{u2} + \Phi_{d2} \tag{56.2}$$

se pot defini inductivităţile astfel:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \frac{\Phi_{11}}{i_1} = \frac{\Phi_{u1}}{i_1} + \frac{\Phi_{d1}}{i_1} = L_{21} + L_{d1} \\ L_2 &= \frac{\Phi_{22}}{i_2} = \frac{\Phi_{u2}}{i_2} + \frac{\Phi_{d2}}{i_2} = L_{12} + L_{d2}. \end{aligned}\right\} (L_{12} = L_{21}) \tag{56.3}$$

Pentru a stabili repartiţia curentului total I între cele două conductoare, se scriu ecuaţiile:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad ; \quad (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + j\omega L_{12}\underline{I}_2 - (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 - j\omega L_{21}\underline{I}_1 = 0,$$

din care rezultă:

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}\,\frac{R_2 + j\omega(L_2 - L_{12})}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2L_{12})} = \underline{I}\,\frac{R_2 + j\omega L_{d2}}{R_1 + R_2 + j\omega(L_{d1} + L_{d2})} \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}\,\frac{R_1 + j\omega(L_1 - L_{21})}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2L_{21})} = \underline{I}\,\frac{R_1 + j\omega L_{d1}}{R_1 + R_2 + j\omega(L_{d1} + L_{d2})} \end{aligned}\right\} \tag{56.4}$$

Se constată că repartiţia curenţilor în cele două conductoare, echivalente cu două bobine cuplate magnetic şi conectate în paralel, e hotărîtă de rezistenţele lor şi de reactanţele lor de dispersiune, în acord cu schema echivalentă mai simplă din figura 56.4, *b*.

În cazul celor două conductoare concentrice considerate mai sus, orice linie de cîmp (de ex. C_2 — fig. 56.3) care înlănţuie conductorul (2), înlănţuie şi conductorul (1) din interiorul lui (2). Nu există deci flux de dispersiune a lui (2) faţă de (1), adică $L_{d2} = 0$. Există însă linii de cîmp ale conductorului (1) care nu înlănţuie pe (2), (de ex. C_1 — fig. 56.3). De aceea $L_{d1} \neq 0$. Cu aceste valori repartiţia curentului, (56.4), devine:

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{R_2}{R_1 + j\omega L_{d1}} \tag{56.5}$$

Se observă că cu cît frecvenţa e mai mare, cu atît acest raport diferă de valoarea corespunzătoare repartiţiei de curent continuu, curentul $\underline{I}_1$ fiind mai mic. Dacă $\omega \to \infty$, $\underline{I}_1 \to 0$ şi $\underline{I}_2 \to \underline{I}$, adică întregul curent trece numai prin conductorul tubular exterior, în acord cu fenomenul de efect pelicular.

56.1.2. **Rezistenţa echivalentă în curent alternativ şi factorul în alternativ.** În cazul efectului pelicular, circuitul nu mai poate fi considerat filiform şi legea conducţiei electrice nu mai poate fi pusă sub forma relaţiei (31.9), care pentru o latură pasivă devine:

$$u_f = Ri. \tag{56.6}$$

Într-adevăr, în acest caz, tensiunea în lungul firului $u_f = \int_C \mathbf{E}\, d\mathbf{s}$ depinde de linia de curent C, în lungul căreia se calculează (între capetele conductorului) şi, ca urmare, rezistenţa conductorului nu se mai poate defini prin relaţia (56.6) ca în curent continuu. Puterea activă disipată prin efect Joule-

Lenz în conductor se poate însă calcula și în cazul unei repartiții neuniforme a curentului, și anume cu relația (55.17), respectiv (55.17'). Cunoscînd această putere, prin integrare pe volumul conductorului, respectiv pe suprafața lui exterioară, *rezistența în curent alternativ* a conductorului se definește prin relația :

$$\boxed{R_a = \frac{P}{J^2}} = R_a(\omega) \tag{56.7}$$

și este o funcție de frecvență.

Cîtul dintre această rezistență și rezistența R_0 în curent continuu a acestui conductor se numește *factorul de creștere al rezistenței în curent alternativ:*

$$k_a = \frac{R_a}{R_0} = \frac{R_a(\omega)}{R_a(0)} = k_a(\omega), \tag{56.8}$$

sau, scurt, factorul în alternativ al conductorului. Acest factor depinde numai de forma și natura conductorului și de frecvență, și determinarea lui reprezintă principalul obiectiv al cercetărilor în domeniul efectului pelicular.

În domeniul efectului pelicular slab (cînd $\delta \gg a$), factorul în alternativ e puțin diferit de unitate și determinarea lui se poate face cu metoda iterației (par. 56.2); în domeniul efectului pelicular net (cînd $\delta \ll a$), factorul în alternativ e mult supraunitar și determinarea lui se poate face cu metoda adîncimii de pătrundere (par. 56.3); între aceste două situații extreme se poate folosi numai metoda exactă a integrării ecuațiilor cîmpului.

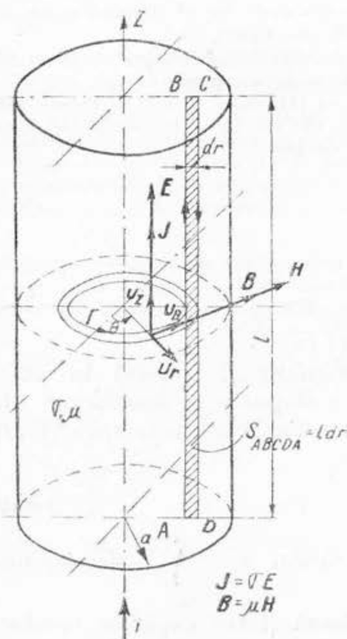


Fig. 56.5

56.2. Efectul pelicular slab în conductorul cilindric, studiat cu metoda iterației

Considerăm un conductor cilindric circular drept (fig. 56.5) de rază a și de lungime l foarte mare ($l \gg a$), avînd conductivitatea σ și permeabilitatea magnetică μ, străbătut în regim permanent de curentul

$$i = I\sqrt{2}\sin\omega t \rightleftarrows \underline{I} = I. \tag{56.9}$$

Alegînd sistemul de coordonate cilindrice (r, θ, z) din figură, se observă că din motive de simetrie vectorii **J** și **E** nu au decît componente axiale, vectorii **H** și **B** nu au decît componente tangențiale și toți acești vectori nu depind decît de coordonata spațială r și de timp :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E(r,t)\,\mathbf{u}_z \;;\; \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = J(r,t)\,\mathbf{u}_z \\ \mathbf{H} &= H(r,t)\,\mathbf{u}_\theta \;;\; \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = B(r,t)\,\mathbf{u}_\theta. \end{aligned} \tag{56.10}$$

56.2.1. **Metoda iterației**, aplicabilă în cazul unui efect pelicular slab, consistă în următoarele:

a) Se calculează cu legea circuitului magnetic cîmpul magnetic $H_0(r, t)$ pe care l-ar produce curentul total I, dacă ar fi uniform repartizat pe secțiunea conductorului (ca în curent continuu), adică cu densitatea omogenă:

$$\sigma E_0(t) = J_0(t) = \frac{i(t)}{\pi a^2} = \frac{I\sqrt{2}}{\pi a^2} \sin \omega t. \tag{56.11}$$

b) Se calculează cu legea inducției electromagnetice cîmpul electric suplimentar $E_1(r, t)$ indus de cîmpul magnetic $H_0(r, t)$ și densitatea de curent suplimentară $J_1(r, t) = \sigma E_1(r, t)$. În acest calcul, deoarece J_0 a fost dedus din curentul total I, densitatea de curent J_1 reprezintă o corecție care nu modifică valoarea curentului total, adică aduce o contribuție totală nulă pe întreaga secțiune S a conductorului,

$$\iint_S J_1 \, \mathrm{d}A = 0. \tag{56.12}$$

c) În primă aproximație se neglijează cîmpul magnetic $H_1(r, t)$, produs de curenții cu densitatea J_1, din punctul de vedere al contribuției lui la determinarea cîmpului electric indus. În această primă aproximație se consideră că densitatea de curent din conductor este

$$J(r, t) = J_0(t) + J_1(r, t) \tag{56.13}$$

și se calculează cu această expresie puterea activă de pierderi:

$$P = \iiint_{V_{cond}} \frac{1}{\sigma} \widetilde{(J_0 + J_1)^2} \, \mathrm{d}v = \iiint_{V_{cond}} \frac{J_{ef}^2}{\sigma} \mathrm{d}v, \tag{56.14}$$

din care se deduce rezistența în curent alternativ cu relația (56.7) și factorul în curent alternativ cu relația (56.8).

În principiu acest mod de calcul s-ar putea repeta oricît, trecînd succesiv prin etape analoge cu *a* și *b* (ceea ce explică denumirea metodei). De exemplu, pentru o aproximație mai bună s-ar putea calcula și cîmpul H_1, produs de curenții cu densitatea J_1 și curenții suplimentari induși de acest cîmp, cu densitatea $J_2 = \sigma E_2$, considerîndu-se că $J \approx J_0 + J_1 + J_2$. Practic, calculele se complică atît de mult, încît metoda se folosește numai la efect pelicular slab, în care caz $|J_1| \ll |J_0|$ și nu mai e necesară o nouă iterație.

56.2.2. **Determinarea intensității de curent în prima iterație.**

a) Calculăm cîmpul H_0, aplicînd legea circuitului magnetic unei linii de cîmp interioare (Γ) de rază $\mathbf{r}$:

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}_0 \, \mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_{S_\Gamma} \mathbf{J}_0 \, \mathbf{dA} \quad \text{sau} \quad 2\pi r H_0 = \pi r^2 J_0.$$

Se obține:

$$H_0(r, t) = \frac{r}{2} J_0(t). \quad (56.15)$$

b) Calculăm cîmpul electric $E_1(r, t)$ indus de H_0 (r, t), aplicînd legea inducției electromagnetice conturului $ABCDA$ (fig. 56.5), cu aria infinitezimală l dr:

$$\oint_{ABCDA} \mathbf{E}_1 \, \mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu H_0 l \, \mathrm{d}r)$$

sau

$$l(E_1(r, t) - E_1(r + \mathrm{d}r, t)) = -l \frac{\partial E_1}{\partial r} \mathrm{d}r = -l\mathrm{d}r \, \mu \frac{\partial H_0}{\partial t}.$$

Rezultă ecuația:

$$\frac{\partial E_1}{\partial r} = \mu \frac{\partial H_0}{\partial t}, \quad (56.16)$$

care se putea scrie și direct cu relațiile (55.6), exprimînd rotorul în coordonate cilindrice. Cu relația (56.15) se obține:

$$\frac{\partial E_1}{\partial r} = \mu \frac{r}{2} \frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}t}$$

și integrînd:

$$E_1(r, t) = \mu \frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}t}\left(\frac{r^2}{2} + C\right), \quad (56.17)$$

unde C este o constantă de integrare. Cu legea lui Ohm se obține densitatea J_1 a curenților suplimentari induși:

$$J_1(r, t) = \sigma E_1(r, t) = \sigma\mu \frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}t}\left(\frac{r^2}{4} + C\right). \quad (56.18)$$

Constanta C se determină din condiția (56.12), care, cu d$A = 2\pi r \mathrm{d}r$, se scrie:

$$\int_0^a J_1(r, t) \, r \, \mathrm{d}r = 0 \quad (56.19)$$

sau

$$0 = \int_0^a \left(\frac{r^2}{4} + C\right) r \, \mathrm{d}r = \frac{a^4}{16} + C\frac{a^2}{2} \quad ; \quad C = -\frac{a^2}{8}. \quad (56.20)$$

Cu relațiile (56.18), (56.20) și (56.11) rezultă:

$$J_1(r, t) = \omega\sigma\mu \frac{I\sqrt{2}}{4\pi a^2}\left(r^2 - \frac{a^2}{2}\right) \cos \omega t = \frac{\alpha^2}{2} \frac{I\sqrt{2}}{\pi a^2}\left(r^2 - \frac{a^2}{2}\right) \cos \omega t, \quad (56.21)$$

unde am introdus parametrul $\alpha = \frac{1}{\delta}$ caracteristic studiului cîmpului electromagnetic în conductoare masive (v. rel. 55.25).

c) În primă aproximație, densitatea de curent totală rezultă :

$$J(r, t) \approx J_0(t) + J_1(r, t) = \frac{I\sqrt{2}}{\pi a^2} \sin \omega t + \frac{\alpha^2}{2} \frac{I\sqrt{2}}{\pi a^2}\left(r^2 - \frac{a^2}{2}\right) \cos \omega t. \quad (56.22)$$

Deoarece aceste două componente sînt în cuadratură, pătratul valorii efective a rezultantei e egal cu suma pătratelor valorilor efective ale componentelor :

$$J_{ef}^2(r) \approx J_{0ef}^2 + J_{1ef}^2 = \frac{I^2}{\pi^2 a^4} + \frac{\alpha^4 I^2}{4\pi^2 a^4}\left(r^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{I^2}{\pi^2 a^4}\left[1 + \frac{\alpha^4}{4}\left(r^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2\right]. \quad (56.23)$$

56.2.3. **Determinarea pierderilor și a factorului în alternativ.** Cu relațiile (56.14) și (56.23) rezultă puterea activă de pierderi pe lungimea l (cu $dv = 2\pi r dr l$),

$$P = \frac{I^2 2l}{\pi a^4 \sigma} \int_0^a \left[1 - \frac{\alpha^4}{4}\left(r^4 - r^2 a^2 + \frac{a^4}{4}\right)\right] r dr. \quad (56.24)$$

Efectuînd integrala, se obține :

$$P = \frac{I^2 l}{\pi a^2 \sigma}\left(1 + \frac{\alpha^4 a^4}{48}\right). \quad (56.25)$$

Cu relația (56.7) rezultă rezistența în curent alternativ :

$$R_a = \frac{P}{I^2} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{\pi a^2}\left(1 + \frac{\alpha^4 a^4}{48}\right) \quad (56.26)$$

și deoarece rezistența în curent continuu este $R_0 = \frac{l}{\sigma \pi a^2}$, factorul în alternativ rezultă :

$$k_a = \frac{R_a}{R_0} = 1 + \frac{\alpha^4 a^4}{48} = 1 + \frac{1}{48}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4. \quad (56.27)$$

Deoarece cu această metodă am obținut numai o primă aproximație, rezultatul e valabil în măsura în care termenul de corecție e mic față de unitate, adică dacă

$$a < \delta.$$

Ținînd seama că :

$$\alpha = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \sqrt{\pi f \mu_r \mu_0 \sigma} = 2\pi\, 10^{-3} \sqrt{\frac{f \mu_r \sigma}{10}}, \quad (56.28)$$

rezultă pentru factorul în alternativ expresia :

$$k_a = 1 + \frac{1}{3}\, 10^{-8} \pi^4 \mu_r^2 \sigma^2 f^2 a^4. \quad (56.29)$$

La frecvențe joase, factorul în curent alternativ diferă de unitate cu un termen de corecție $k_a - 1$, care crește cu pătratul frecvenței și cu puterea a patra a razei conductorului. În paragraful următor vom vedea că la frecvențe foarte înalte factorul din alternativ k_a crește cu rădăcina pătrată a frecvenței și e proporțional cu raza conductorului.

56.3. Studiul efectului pelicular net cu metoda adîncimii de pătrundere

Considerăm un conductor cilindric drept de secțiune transversală oarecare (fig. 56.6) străbătut de curentul $i = I\sqrt{2}\sin\omega t$. Dacă frecvența e suficient de mare și raza de curbură a conturului secțiunii conductorului e peste tot mare față de adîncimea de pătrundere, se poate asimila local suprafața acestui conductor cu aceea a semispațiului infinit și puterea activă absorbită prin unitatea de suprafață este în fiecare punct dată de relația (55.37):

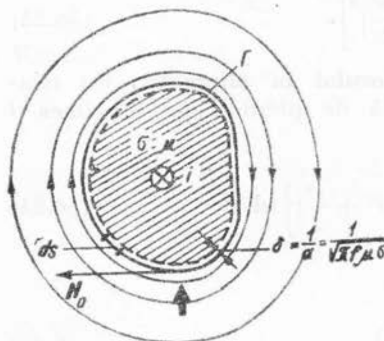


Fig. 56.6

$$\frac{P}{A} = \frac{\alpha}{\sigma} H_{0ef}^2. \tag{56.30}$$

Puterea totală absorbită se poate determina integrînd această expresie pe suprafața laterală a conductorului de lungime l, cu elementele de arie l ds. Se obține integrala:

$$P = l\frac{\alpha}{\sigma}\int_{\Gamma} H_{0ef}^2 \mathrm{d}s, \tag{56.31}$$

efectuată pe conturul Γ al secțiunii transversale a conductorului.

Cîmpul H_0 urmînd a fi determinat separat, cu împlinirea condiției impuse de legea circuitului magnetic

$$\oint_{\Gamma} H_{0ef}\mathrm{d}s = I \tag{56.32}$$

(din cauza efectului pelicular net liniile cîmpului magnetic exterior sînt practic tangente la suprafața conductorului).

Dacă cîmpul magnetic exterior H_0 e practic constant în modul în lungul acestui contur, și dacă $p = \oint_{\Gamma} \mathrm{d}s$ e perimetrul secțiunii transversale, expresiile (56.31) și (46.32) devin:

$$P = pl\frac{\alpha}{\sigma} H_{0ef}^2 \quad \text{și} \quad I = pH_{0ef}.$$

Rezultă:

— pierderile de putere activă:

$$P = \frac{l}{p}\frac{\alpha}{\sigma} I^2 \tag{56.33}$$

— rezistența în curent alternativ:

$$R_a = \frac{P}{I^2} = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{p\delta} \tag{56.34}$$

— factorul în curent alternativ:

$$k_a = \frac{R_a}{R_0} = \frac{\frac{1}{\sigma}\frac{l}{p\delta}}{\frac{l}{\sigma A}} = \frac{A}{p\delta} \tag{56.35}$$

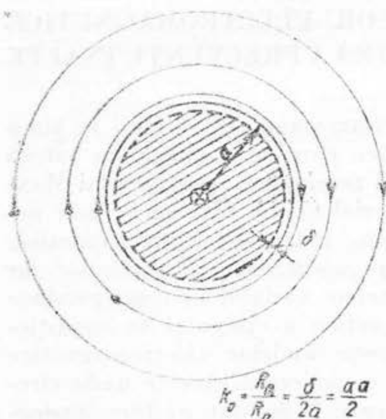


Fig. 56.7

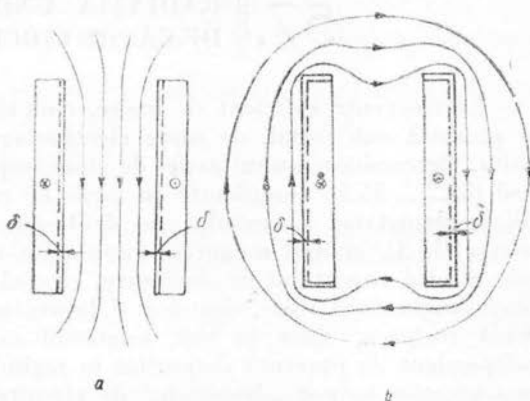


Fig. 56.8

Exemplu: În cazul conductorului cilindric de secțiune circulară (fig. 56.7) de rază a, aria $A = \pi a^2$ și $p = 2\pi a$, astfel că se obține:

$$k_a = \frac{\pi a^2}{2\pi a\delta} = \frac{a}{2\delta} = \frac{\alpha a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{\pi f \omega \mu}, \tag{56.36}$$

proporțional cu raza conductorului și cu rădăcina pătrată a frecvenței.

Observație: Teoria semispațiului conductor infinit arată că la suprafața conductorului densitatea de curent e proporțională cu intensitatea cîmpului magnetic exterior tangențial. De aceea, la frecvențe înalte, curentul se concentrează în porțiunile periferiei conductoarelor, unde cîmpul magnetic e mai intens — indiferent de faptul dacă această situație e realizată la margini interioare sau exterioare sistemului de conductoare considerat (v. fig. 56.8, *a* și *b*)

RADIAȚIA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

57. RADIAȚIA UNDELOR ELECTROMAGNETICE DE CĂTRE CIRCUITE LA FRECVENȚE ÎNALTE

La frecvențe suficient de înalte, cîmpul electromagnetic variabil în timp se prezintă sub formă de unde electromagnetice care se propagă cu viteză finită. Determinarea unui astfel de cîmp implică rezolvarea ecuațiilor lui Maxwell (55.2 ... 55.5), completate cu legile de material (55.6), fără să se mai neglijeze densitatea curentului de deplasare. Prin inducție electromagnetică, relația (55.3), cîmpul magnetic variabil în timp produce un cîmp electric, iar prin efectul curentului de deplasare, cîmpul electric variabil în timp produce cîmp magnetic. Latura electrică și latura magnetică a cîmpului se condiționează reciproc, chiar în vid, asigurînd existența undelor electromagnetice independent de prezența corpurilor în regiunea considerată. Aceste unde electromagnetice se pot „desprinde" de circuitele care le-au dat naștere, propagîndu-se la distanțe extrem de mari și transmițînd o parte din energia circuitelor, sub o formă specifică cîmpului electromagnetic. De aceea, la frecvențe înalte are loc fenomenul *radiației circuitelor*, prin care acestea pierd o parte din puterea primită pe la borne, cedînd-o undelor electromagnetice emise în mediul înconjurător.

În vol. I, paragraful 29.3 și 29.4.1. am studiat cea mai simplă undă electromagnetică, și anume unda electromagnetică plană, fără vreo preocupare referitoare la modul cum poate fi generată o astfel de undă. În acest capitol vom prezenta problemele radiației undelor de către circuite, considerînd cel mai simplu circuit electric radiant: dipolul electric elementar variabil în timp. Acest circuit se mai numește *oscilatorul electric elementar* sau oscilatorul lui Hertz, deoarece a fost studiat și construit pentru prima dată de H. Hertz[1], care a reușit (în 1888) să pună în evidență experimental undele electromagnetice și identitatea cu ele a undelor luminoase, în acord cu prevederile teoriei elaborate de Maxwell (1865), după introducerea curentului de deplasare (1862) în teoria fenomenelor electrice și magnetice.

57.1. Potențialele electrodinamice retardate și determinarea lor

Problemele radiației undelor electromagnetice de către circuite de curent variabil se rezolvă mai ușor cu ajutorul *potențialelor electrodinamice* ale cîmpului electromagnetic. Aceste potențiale generalizează pentru cîmpuri varia-

[1] Pentru detalii privind experiențele lui Hertz și aspectele experimentale în legătură cu undele electromagnetice, se poate consulta și *Curs de Fizică Generală*, vol. 2, par. 240 și următoarele, de S. E. Friș și A. V. Timoreva, ed. II. Ed. tehnică, 1955.

bile în timp mărimile derivate numite *potenţial magnetic vector* (v. par. 20.4, vol. I) şi *potenţial electric scalar* (v. potenţialul electrostatic, par. 6.4, vol. I) introduse în studiul cîmpurilor staţionare, magnetice, respectiv electrice.

Astfel, legea fluxului magnetic (55.5) e identic satisfăcută dacă se introduce *potenţialul electrodinamic vector* $\mathbf{A}_e$, prin relaţia

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}_e \tag{57.1}$$

(deoarece div rot $\equiv 0$). Pentru a defini însă univoc un asemenea potenţial, mai este necesară impunerea valorii mărimii div $\mathbf{A}_e$, deoarece un cîmp de vectori e complet caracterizat nu numai de rotorul său, ci şi de divergenţa sa. Condiţia care fixează divergenţa potenţialului vector se numeşte *condiţie de etalonare* a potenţialelor electrodinamice. În regim staţionar (rel. 25.2, vol. I) s-a ales div $\mathbf{A} = 0$; în regim general variabil se va utiliza o altă condiţie, (57.7).

Introducînd relaţia (57.1) în expresia locală (55.3) a legii inducţiei electromagnetice, rezultă relaţia :

$$\text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t}\right) = 0,$$

care stabileşte caracterul potenţial al vectorului din paranteză (deoarece rot grad $\equiv 0$). Se poate deci introduce *un potenţial electrodinamic scalar* V_e prin relaţia

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} = -\text{grad } V_e \quad \text{sau} \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t} - \text{grad } V_e. \tag{57.2}$$

Relaţiile (57.1) şi (57.2) reprezintă alte moduri de formulare ale legilor fluxului magnetic şi inducţiei electromagnetice — şi permit calculul cîmpurilor **E** şi **B**, dacă se cunosc potenţialele electrodinamice $\mathbf{A}_e$ şi $\mathbf{V}_e$.

Pentru a determina aceste potenţiale, trebuie să stabilim ce ecuaţii satisfac ele, în baza celorlalte două ecuaţii ale lui Maxwell, (55.2) şi (55.4). Ne vom referi numai la medii omogene şi liniare în care sînt valabile legile de material (55.6), cu ajutorul cărora ecuaţiile (55.2) şi (55.4) iau forma :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{57.3}$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho_v, \tag{57.4}$$

presupunînd cunoscute repartiţiile de sarcină $\rho_v(\mathbf{r}, t)$ şi de curent $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$.

Cu relaţiile (57.1) şi (57.2), legea circuitului magnetic (57.3) se scrie :

$$\Delta \mathbf{A}_e - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}_e}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \text{grad}\left(\text{div } \mathbf{A}_e + \varepsilon\mu \frac{\partial V_e}{\partial t}\right), \tag{57.5}$$

iar legea fluxului electric (57.4) se scrie :

$$\Delta V_e - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho_v - \frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div } \mathbf{A}_e + \varepsilon\mu \frac{\partial V_e}{\partial t}\right), \tag{57.6}$$

dacă se foloseşte identitatea vectorială (55.9), cu relaţia (55.9').

Acestea sînt ecuaţiile care trebuie rezolvate pentru a determina potenţialele electrodinamice. Rezolvarea lor este îngreuiată de faptul că ambele funcţiuni necunoscute $\mathbf{A}_e(r, t)$ şi $V_e(r, t)$ apar în fiecare dintre aceste ecuaţii. Se poate însă folosi acum o condiţie de etalonare, care să precizeze valoarea lui div $\mathbf{A}_e$, astfel ca rezolvarea ecuaţiilor să fie simplificată. Lorentz a observat că cea mai avantajoasă este condiţia:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{A}_e + \varepsilon\mu \frac{\partial V_e}{\partial t} = 0,} \tag{57.7}$$

numită *condiţia lui Lorentz*. Cu relaţia (57.7) se completează definiţia potenţialului electromagnetic vector şi rezultă pentru cele două potenţiale electrodinamice ecuaţiile:

$$\Delta \mathbf{A}_e - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}_e}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \tag{57.8}$$

$$\Delta V_e - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho_v, \tag{57.9}$$

numite *ecuaţiile undelor neomogene* (tridimensionale).

Se observă că în regim staţionar ecuaţiile de mai sus trec în ecuaţiile lui Poisson pentru potenţialele **A** şi V

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \qquad \Delta V = -\frac{1}{\varepsilon} \rho, \tag{57.10}$$

ale căror soluţii (în cazul unor surse $\rho_v(\mathbf{r}')$ şi $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ ocupînd un domeniu mărginit din spaţiu şi a anulării tuturor potenţialelor suficient de repede la infinit) au forma „coulombiană".

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint\limits_{V\infty} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \mathrm{d}v', \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint\limits_{V\infty} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{R} \mathrm{d}v', \tag{57.11}$$

unde integrarea se extinde în principiu la întregul spaţiu (v. rel. 9.19 şi 25.12, vol. I); de asemenea, condiţia (57.7) trece în condiţia (25.2) de anulare a divergenţei potenţialului vector. În analogie cu expresiile (57.11) se demonstrează că ecuaţiile cu derivate parţiale (57.8) şi (57.9), cu $\rho_v(\mathbf{r}', t)$ şi $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$, diferiţi de zero într-un domeniu D mărginit din spaţiu, ocupat de circuitele care radiază, au soluţiile:

$$\mathbf{A}_e(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint\limits_{V\infty} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \sqrt{\mu\varepsilon} R)}{R} \mathrm{d}v' \tag{57.12}$$

şi

$$V_e(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint\limits_{V\infty} \frac{\rho_v(\mathbf{r}', t - \sqrt{\mu\varepsilon} R)}{R} \mathrm{d}v', \tag{57.13}$$

în cazul cînd se consideră că potenţialele şi cîmpul se anulează suficient de repede la infinit.

Expresiile de mai sus au următoarea semnificaţie: calculul potenţialelor în punctul curent P (fig. 57.1) — avînd raza vectoare **R** faţă de elementul de volum dv' din punctul P', cu $\rho_v(\mathbf{r}', t)$ şi $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$, în raport cu care se integrează — şi în momentul t. se face în funcţie de valorile pe care le-au avut densităţile de curent şi de sarcină din P' într-un moment anterior:

$$t' = t - \sqrt{\varepsilon\mu}R = t - \frac{1}{c} R. \tag{57.14}$$

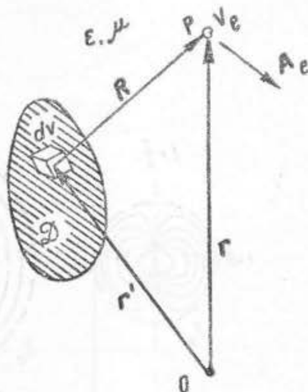


Fig. 57.1

Retardarea

$$t - t' = \sqrt{\varepsilon\mu}R = \frac{1}{c} R \tag{57.15}$$

e egală cu timpul necesar propagării unui semnal pe distanţa R cu viteza constantă:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} c_0, \tag{58.16}$$

care este tocmai viteza de propagare a undelor electromagnetice libere în mediul omogen de permitivitate $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ şi permeabilitate $\mu = \mu_r\mu_0$.

Expresiile (57.12) şi (57.13) ale potenţialelor electrodinamice ilustrează deci transmisiunea cu viteză finită a acţiunilor fizice: fiecare element de corp avînd sarcină sau curent contribuie la valoarea potenţialelor din punctul P cu o retardare (întîrziere) egală cu timpul necesar unei unde electromagnetice libere pentru a ajunge din punctul P' în punctul P. De aceea, potenţialele (57.12) şi (57.13) se mai numesc ***potenţialele electrodinamice retardate.*** Ele se pot calcula dacă se cunoaşte repartiţia curentului şi a sarcinii în fiecare moment în cuprinsul corpului (circuitului) care radiază. Cele două repartiţii nu sînt însă independente din cauza legii conservării sarcinii:

$$\operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho_v(\mathbf{r},t) = 0. \tag{57.17}$$

De aceea se foloseşte numai una din integralele (57.12) sau (57.13) şi celălalt potenţial se deduce din condiţia lui Lorentz (57.7).

Dacă pentru $t \leqslant 0$ corpul considerat nu era parcurs de curenţi şi nu avea sarcini electrice, rezultă că funcţiile ρ_v şi $\mathbf{J}$ se anulează

$$\rho_v\left(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c} R\right) = 0, \quad \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c} R\right) = 0 \tag{57.18}$$

pentru $t' = t - \frac{1}{c} R \leqslant 0$. În toată regiunea din spaţiu ale cărei puncte P satisfac în momentul t condiţia

$$R \geqslant c\, t \tag{57.19}$$

(unde R e distanţa de la P la cel mai apropiat punct al corpului D), nu există încă unde electromagnetice, deoarece potenţialele rezultă nule. Suprafaţa Σ_0 cu ecuaţia:

$$R_0 = ct \tag{57.20}$$

e locul geometric al punctelor P pentru care cea mai mică distanță la corpul D e egală cu distanța pe care o poate străbate unda în timpul t (măsurat din momentul în care apar sarcini și curenți în corp). Ea se numește *frontul undei*, deoarece separă regiunea din spațiu unde a ajuns unda de regiunea din spațiu (57.19) lipsită de cîmp. În figura 57.2 sînt reprezentate liniile cîmpului electric și frontul undei pentru un dipol electric elementar (v. și par. 57.3), al cărui moment electric variază sinusoidal în timp începînd cu momentul t = 0.

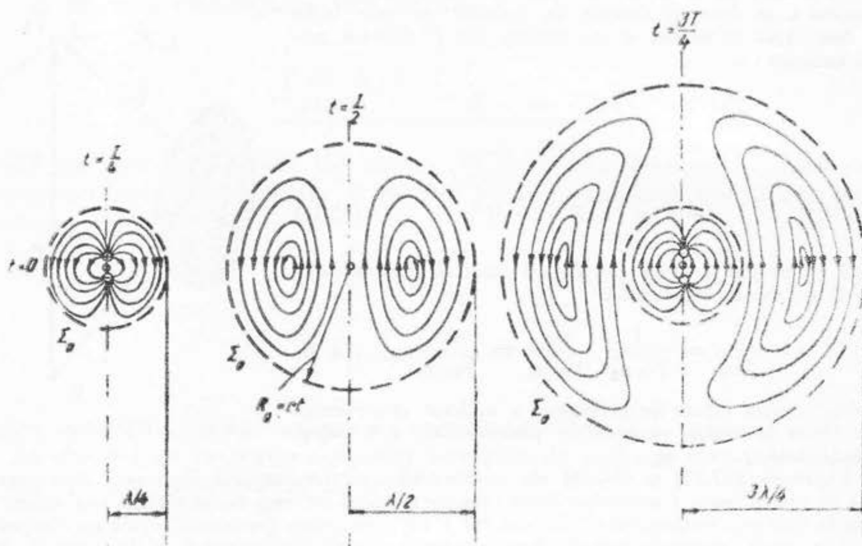


Fig. 57.2

57.2. Rezistența de radiație a circuitelor

Ca urmare a radiației undelor la frecvențe înalte de către circuite, acestea pierd putere, pe care o transmit undelor radiate. La aceeași valoare efectivă a curentului I primit pe la borne, în regim sinusoidal, puterea activă primită pe la borne:

$$P_b = R_e I^2 \tag{57.21}$$

(unde R_e e rezistența echivalentă a circuitului considerat) crește la frecvențe înalte, datorită *pierderii de putere prin radiație* P_{rad}. Rezistența echivalentă a circuitului este mai mare decît în regimul în care radiația e neglijabilă cu valoarea

$$R_{rad} = \frac{P_{rad}}{I^2}, \tag{57.22}$$

numită *rezistență de radiație*.

Un exemplu, cu totul particular, ilustrează faptul că apariția rezistenței de radiație e o consecință a retardării discutate în paragraful precedent. Considerăm în acest scop o spiră

filiformă (fig. 57.3, a) de dimensiuni foarte mici, alimentată în regim sinusoidal cu tensiunea $\underline{U}$, care absoarbe curentul $\underline{I}$. Din cauza retardării, inducția magnetică din punctele unei suprafețe S sprijinită pe conturul Γ al spirei nu mai este în fază, ci rămîne în urmă față de curent. Ca urmare, fluxul magnetic $\underline{\Phi}$ prin acea suprafață e defazat în urma curentului $\underline{I}$ cu unghiul α care crește cu frecvența (deoarece retardările corespunzătoare diferitelor puncte reprezintă fracțiuni din ce în ce mai mari din perioada $T=1/f$). Inductivitatea L a spirei trebuie definită acum numai în funcție de componenta fluxului în fază cu curentul (v. fig. 57.3, b) și se poate scrie:

$$\underline{\Phi} = L\underline{I} - j\Lambda\underline{I}$$

cu

$$\Lambda = \Lambda(\omega) \qquad (57.23)$$

(unde Λ e factorul de proporționalitate al componentei fluxului defazată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma curentului).

Ecuația circuitului în valori instantanee fiind

$$u = Ri + \frac{d\Phi}{dt} \qquad (57.24)$$

se reprezintă în complex sub forma:

$$\underline{U} = R\underline{I} + j\omega\underline{\Phi} \qquad (57.25)$$

și înlocuind expresia (57.23) a fluxului, devine:

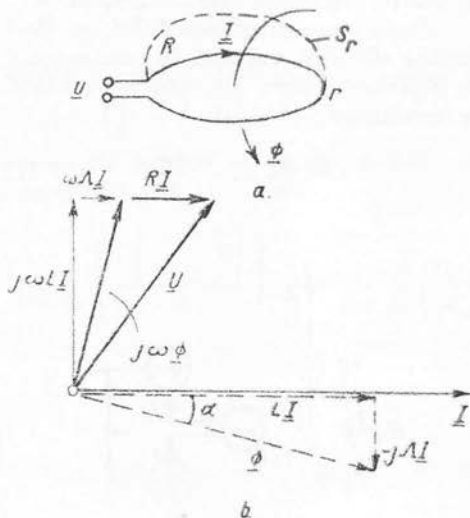


Fig. 57.3

$$\underline{U} = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \omega\Lambda\underline{I} = [(R + \omega\Lambda) + j\omega L]\underline{I} \qquad (57.26)$$

Se obține pentru spiră impedanța echivalentă:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + \omega\Lambda + j\omega L, \qquad (57.27)$$

corespunzătoare rezistenței echivalente:

$$R_e = \text{Re}\,\{\underline{Z}_e\} = R + \omega\Lambda = R + R_{rad}, \qquad (57.28)$$

în care primul termen e rezistența R a conductorului (calculată eventual cu luarea în considerare a efectului pelicular), iar

$$R_{rad} = \omega\Lambda \qquad (57.29)$$

e rezistența de radiație, apărută ca urmare a întîrzierii fluxului față de curent.

57.3. Radiația oscilatorului electric elementar

57.3.1. Potențialele electrodinamice ale oscilatorului electric elementar. Considerăm un dipol electric (fig. 57.4, a), avînd momentul

$$\mathbf{p}(t) = q(t)\mathbf{l} = \mathbf{k}q(t)l, \qquad (57.30)$$

variabil în timp (cu direcția invariabilă). Un astfel de dipol reprezintă un model idealizat pentru oscilatorul lui Hertz, compus din două sfere încărcate cu sarcini q și $-q$ reunite printr-un conductor scurt (față de lungimea de undă), întrerupt la mijloc pentru legăturile de alimentare de la un generator de înaltă frecvență (fig. 57, 4, *b*).

Dacă momentul dipolului, și deci sarcina sferelor, variază, în conductorul de legătură apare un curent electric de conducție:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{l}\frac{dp}{dt}. \qquad (57.31)$$

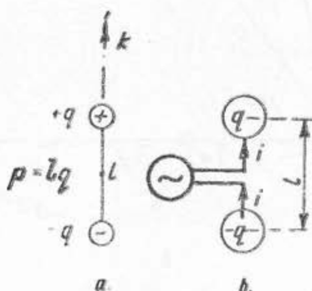


Fig. 57.4

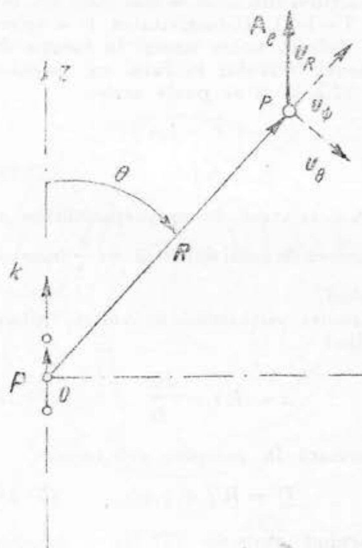


Fig. 57.5

Potențialul electrodinamic vector într-un punct P cu raza vectoare $\mathbf{R}$ față de dipol (fig. 57.5) se poate calcula cu relația (57.12), care cu (58.16) se scrie:

$$\mathbf{A}_e = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}R\right)}{R}\,dv'. \qquad (57.32)$$

Deoarece vom considera cazul limită al unui dipol elementar cu $l \to 0$ (practic cu $l \ll R$), putem considera densitatea de curent în fază și repartizată uniform pe volumul $\Delta V = \Delta A.l$ al conductorului. Cum în acest caz $\mathbf{J}\Delta V = \mathbf{J}\Delta A l = il\mathbf{k}$, rezultă pentru potențialul electrodinamic vector expresia:

$$\mathbf{A}_e = \frac{\mu}{4\pi}\,\mathbf{k}\,\frac{i\left(t - \frac{1}{c}R\right)}{R}l, \qquad (57.33)$$

sau, deoarece $li = \frac{dp}{dt} = \dot{p}$ (v.57.31),

$$\mathbf{A}_e = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{1}{c}R\right)}{R} = A_{ez}\mathbf{k}, \qquad (57.34)$$

cu unica componentă diferită de zero după axa dipolului, aleasă axa Oz.

$$A_{e_z}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\dot{p}\left(t-\frac{1}{c}R\right)}{R} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{[\dot{p}]}{R}. \qquad (57.35)$$

În relațiile de mai sus am notat cu punct deasupra derivatele în raport cu timpul $\dot{f} = \frac{df}{dt}$ ale funcțiilor de timp și cu $[f] = f\left(t - \frac{1}{c}R\right)$ valorile retardate ale funcțiilor de timp. Potențialul electrodinamic scalar se poate deduce din relația (57.35) și din condiția lui Lorentz (57.7):

$$\frac{\partial V_e}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon\mu}\operatorname{div}\mathbf{A}_e = -\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial A_{e_z}}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dot{p}\left(t-\frac{1}{c}R\right)}{R}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{[\dot{p}]}{R}\right).$$

Deoarece $\left(\text{cu } \ddot{p} = \frac{d^2p}{dt^2}\right)$

$$\frac{\partial\dot{p}\left(t-\frac{1}{c}R\right)}{\partial z} = [\ddot{p}]\frac{\partial\left(t-\frac{1}{c}R\right)}{\partial z} = -\frac{1}{c}[\ddot{p}]\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{[\ddot{p}]}{c}\cos\theta \qquad (57.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{1}{R^2}\cos\theta \qquad (57.37)$$

se obține:

$$\frac{\partial V_e}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{R}\frac{\partial[\dot{p}]}{\partial z} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}[\dot{p}]\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{[\dot{p}]\cos\theta}{R^2} + \frac{[\ddot{p}]\cos\theta}{cR}\right)$$

și integrînd (cu constanta de integrare nulă pentru ca potențialul scalar să se anuleze la infinit în acord cu relația (57.13), rezultă:

$$V_e(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cos\theta\left[\frac{[p]}{R^2} + \frac{[\dot{p}]}{cR}\right]. \qquad (57.38)$$

Din expresiile (57.35) și (57.38) ale potențialelor electrodinamice ale dipolului elementar rezultă imediat pentru cazul limită al regimului staționar $\left(\dot{p} = \frac{dp}{dt} = 0\right)$ expresiile

$$\mathbf{A}_e = 0 \qquad V_e = V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{p\cos\theta}{R^2}, \qquad (57.39)$$

care corespund cîmpului strict electrostatic al unui dipol electric (v. rel. 4.16, vol. 1) de moment p.

57.3.2. **Cîmpul de radiație al dipolului elementar.** Cu relațiile (57.35) și (57.38) introduse în expresiile (57.1) și (57.2) se pot calcula vectorii E și $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$

în orice punct din spațiu[1]. Nu vom face aici calculul decît pentru acele componente ale cîmpurilor electric și magnetic care subsistă la distanță foarte mare de dipol, adică pentru acele componente care scad cel mai încet cu distanța. Acestea sînt componentele care scad ca $\frac{1}{R}$ cu distanța și care se vor obține din relațiile care dau cîmpurile:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V_e - \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial t}; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}_e, \tag{57.40}$$

dacă la derivarea în raport cu coordonatele spațiale se vor neglija derivatele lui $\frac{1}{R}$ și $\frac{1}{R^2}$ care dau puteri negative de ordin superior ale lui R. În decursul calculului vom avea nevoie de expresia gradientului unei funcțiuni scalare Φ în coordonate sferice (în care nu mai punem termenul cu $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, deoarece, din motive de simetrie cilindrică — v. fig. 57.6 — variabila φ nu apare în expresiile potențialelor care se derivează)

$$\operatorname{grad} \Phi = \mathbf{u}_R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \mathbf{r}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \tag{57.41}$$

Se observă că derivarea în raport cu θ introduce un factor în $\frac{1}{R}$. Cum expresiile potențialelor conțin termeni în $\frac{1}{R}$ și $\frac{1}{R^2}$, derivarea în raport cu θ va duce, în expresiile cîmpurilor, la termeni în $\frac{1}{R^2}$ și $\frac{1}{R^3}$, care pentru zona depărtată de dipol pot fi neglijați. De aceea, pentru zona depărtată gradientul are expresia:

$$\operatorname{grad} \Phi \approx \mathbf{u}_R \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \tag{57.42}$$

la derivare toți factorii în $\frac{1}{R}$ și $\frac{1}{R^2}$ fiind considerați constanți.

Cu relațiile (57.34), (57.38), (57.40) și (57.42) rezultă cu ($\varepsilon\mu = 1/c^2$):

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \operatorname{grad}\left(\cos\theta \frac{[p]}{R^2} + \cos\frac{[\dot{p}]}{Rc}\right) - \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{k} \frac{[\ddot{p}]}{R} \approx$$

$$\approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \mathbf{u}_R \left[\frac{\cos\theta}{R^2} \frac{\partial [p]}{\partial R} + \frac{\cos\theta}{Rc} \frac{\partial [\dot{p}]}{\partial R}\right] - \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{k} \frac{[\ddot{p}]}{R} \approx$$

$$\approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \mathbf{u}_R \frac{\cos\theta}{Rc} [\ddot{p}] \left(-\frac{1}{c}\right) - \frac{\mu\mathbf{k}}{4\pi} \frac{[\ddot{p}]}{R} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon c^2 R} [\ddot{p}] [\mathbf{u}_R \cos\theta - \mathbf{k}]\Big)$$

și, deoarece

$$\mathbf{k} = \mathbf{u}_R \cos\theta - \mathbf{u}_\theta \sin\theta, \tag{57.43}$$

[1] V. R. Răduleț, *Bazele teoretice ale electrotehnicii* vol. IV, Tipografia și Litografia Ministerului Învățămîntului, 1956.

se obţine pentru cîmpul electric în zona depărtată, numit şi *cîmp electric de radiaţie*, expresia :

$$\boxed{\mathbf{E}_{rad} = \frac{1}{4\pi\varepsilon c^2}\frac{[\ddot{p}]\sin\theta}{R}\mathbf{u}_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon c^2}\frac{\sin\theta}{R}\ddot{\mathrm{p}}\left[t - \frac{1}{c}R\right]\mathbf{u}_\theta} \quad (57.44)$$

Analog, cu relaţiile (57.34), (57.40) şi (57.42) rezultă :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\left(\mathbf{k}\frac{[\dot{p}]}{R}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\operatorname{grad}\frac{[\dot{p}]}{R}\right)\times\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi R}\frac{\partial[\dot{p}]}{\partial R}\mathbf{u}_R\times\mathbf{k}$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi Rc}[\ddot{\mathrm{p}}]\,\mathbf{u}_R\times\mathbf{k}$$

şi, deoarece

$$\mathbf{u}_R\times\mathbf{k} = -\mathbf{u}_\varphi\sin\theta, \quad (57.45)$$

se obţine pentru cîmpul magnetic în zona depărtată, numit şi *cîmp magnetic de radiaţie*, expresia :

$$\boxed{\mathbf{H}_{rad} = \frac{1}{4\pi c}[\ddot{p}]\frac{\sin\theta}{R}\mathbf{u}_\varphi = \frac{1}{4\pi c}\frac{\sin\theta}{R}\ddot{\mathrm{p}}\left(t - \frac{1}{c}R\right)\mathbf{u}_\varphi} \quad (57.46)$$

Se observă (fig. 57.6) că în zona depărtată unda radiată e o undă transversală, cu vectorii cîmp perpendiculari unul pe altul şi pe direcţia de propagare radială, de versor $\mathbf{u}_R$ (v. fig. 57.6). Vectorii $\mathbf{E}_{rad}$, $\mathbf{H}_{rad}$ şi $\mathbf{u}_R$ formează un triedru drept, iar cîmpurile $E_{\theta rad}(\mathbf{r}, t)$ şi $H_{\varphi rad}(\mathbf{r}, t)$ sînt în fiecare moment şi în fiecare punct proporţionale, raportul lor fiind egal cu impedanţa de undă a mediului (v. rel. 29.26, vol. I).

$$\left(\frac{E_\theta}{H_\varphi}\right)_{rad} = \frac{1}{\varepsilon c} = \mu c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \zeta = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\ [\Omega]. \quad (57.47)$$

Densitatea fluxului de energie, adică vectorul lui Poynting e radial, adică e dirijat în sensul propagării undei,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} = \mathbf{u}_R S_R(\mathbf{r}, t)$$

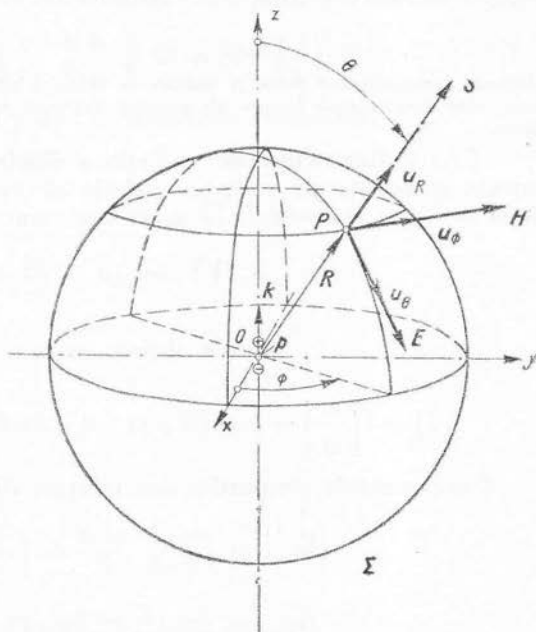


Fig. 57.6

cu
$$S_R(\mathbf{r},t) = (\mathrm{E}_\theta \mathrm{H}_\varphi)_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon c^3} \frac{\sin^2\theta}{R^2} \ddot{p}^2\left(t - \frac{R}{c}\right), \tag{57.48}$$

fiind invers proporțional cu pătratul distanței R și proporțional cu $\sin^2\theta$. Radiația energiei se face deci directiv și e maximă în planul perpendicular pe dipol și nulă în axul dipolului. Se mai observă că pentru domenii nu prea mari față de R, mărimile $1/R$ și $\sin\theta$ variază foarte puțin, și unda radiată are toate caracteristicile unei unde plane cu direcția de propagare radială (v. par. 29.3 și 29.4.1, din vol. I).

Pentru a putea aprecia distanța R față de dipol, la care numai cîmpul de radiație (cu mărimile de cîmp în $1/R$) nu este neglijabil, ar trebui să fi făcut calculul exact al tuturor termenilor. Acest calcul poate fi evitat, dacă se observă că o aproximație de același ordin s-ar fa e în expresia potențialului (57.38), dacă s-ar neglija primul termen, în $1/R^2$, față de al doilea, în $1/R$, ceea ce se poate dacă

$$\frac{|p|}{R^2} \ll \frac{|\dot{p}|}{cR}. \tag{57.49}$$

În regim periodic sinusoidal derivarea introduce factorului $\omega = 2\pi f$, așa că raportul $\left|\frac{\dot{p}}{p}\right|$ e de ordinul de mărime al frecvenței f : $|\dot{p}| \approx f|p|$. Cu aceasta, condiția (57.49) devine:

$$\frac{1}{R} \ll \frac{f}{c} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{sau} \quad \boxed{R \gg \lambda}. \tag{57.50}$$

Rezultă că predominarea cîmpului de radiație are loc la distanțe R de dipol, suficient de mari față de lungimea de undă de lucru. Inegalitatea inversă va exprima condiția posibilității neglijării cîmpului de radiație, adică a posibilității de a calcula cîmpul ca în regim cuasistaționar:

$$R \ll \lambda. \tag{57.50'}$$

Regimul cuasistaționar poate fi utilizat la calculul cîmpului în afara circuitelor numai pentru cazul cînd dimensiunile liniare ale acestora sînt mici față de cea mai mică lungime de undă de lucru.

57.3.3. **Rezistența de radiație a dipolului electric elementar.** Pentru a calcula rezistența de radiație trebuie să evaluăm puterea medie radiată de dipol în regim sinusoidal. În acest caz vom considera curentul origine de fază

$$i = I\sqrt{2}\sin\omega t = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{l}\frac{dp}{dt} = \frac{\dot{p}}{l} \tag{57.51}$$

și vom obține, cu $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda}$,

$$[\ddot{p}] = l\left[\frac{di}{dt}\right] = l\omega I\sqrt{2}[\cos\omega t] = l\omega I\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 2\pi\frac{R}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Componentele cîmpurilor din relațiile (57.44) și (57.46) vor avea forma:

$$E_{\theta_{\mathrm{rad}}} = \frac{Il\omega\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon c^2}\frac{\sin\theta}{R}\sin\left(\omega t - 2\pi\frac{R}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) \tag{57.52}$$

$$H_{\varphi_{\mathrm{rad}}} = \frac{Il\omega\sqrt{2}}{4\pi c}\frac{\sin\theta}{R}\sin\left(\omega t - 2\pi\frac{R}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right). \tag{57.53}$$

Densitatea instantanee a fluxului de energie rezultă cu relația (57.42):

$$S_R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon c^3} I^2 l^2 \omega^2 2 \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \sin^2\left(\omega t - 2\pi \frac{R}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$S_R(r, t) = \frac{I^2 l^2 f^2}{4\varepsilon c^3} \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \left[1 + \cos\left(2\omega t - 4\pi \frac{R}{\lambda}\right)\right], \tag{57.54}$$

iar valoarea ei medie pe o perioadă:

$$\widetilde{S}_R = \frac{I^2 l^2 f^2}{4\varepsilon c^3} \frac{\sin^2 \theta}{R^2}. \tag{57.55}$$

Integrînd această expresie pe suprafața sferei Σ de rază R (fig. 57.6), cu $\mathrm{d}A = R^2 \sin \theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$), se obține expresia puterii active radiate de dipol:

$$P_{\text{rad}} = \iint_{\Sigma} \widetilde{S}_R R^2 \sin \theta \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \frac{I^2 l^2 f^2}{4\varepsilon c^3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta \mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{I^2 l^2 f^2}{2\varepsilon c^3} \pi \int_{\theta=0}^{\pi} (-1 + \cos^2 \theta) \mathrm{d}(\cos \theta)$$

$$P_{\text{rad}} = \frac{I^2 l^2 f^2}{\varepsilon c^3} \frac{2\pi}{3} = R_{\text{rad}} I^2. \tag{57.56}$$

Cu $\lambda = c/f$ și (57.47) rezultă, pentru *rezistența de radiație*, expresia:

$$R_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \tag{57.57}$$

(în care $l \ll \lambda$ pentru ca dipolul să poată fi considerat elementar).

ELEMENTE DE TEORIE MICROSCOPICĂ

58. TEORIA ELECTRONILOR

Teoria fenomenelor electromagnetice, prezentată în primul volum al acestui curs și ale cărei principale aplicații în tehnică au fost studiate pînă acum, este *teoria macroscopică, fenomenologică, a cîmpului electromagnetic*. Caracterul ei macroscopic rezultă din faptul că în această teorie nu se ia în considerare structura la scară atomică a materiei, ci se admite un model continuu al acesteia. Conform acestui model, toate proprietățile fizice locale sînt caracterizabile prin repartiții continue în spațiu, cu evoluție continuă în timp, iar discontinuitățile care se manifestă uneori (de ex. la marginea corpurilor) pot fi totdeauna tratate drept cazuri limită ale unor foarte rapide variații continue. Caracterul ei fenomenologic rezultă din faptul că admite ca premize fundamentale, principii, proprietăți și relații obținute prin analiza modului cum se manifestă fenomenele fizice la scara simțurilor noastre — fără alte ipoteze care să nu poată fi verificate direct (cel puțin în cazuri particulare), prin experiențe efectuate la această scară.

O astfel de teorie este esențială pentru aplicații, deoarece asigură — măcar în principiu — o interpretare nemijlocită a conceptelor ei fundamentale și corespunde intuiției celui care trebuie să o utilizeze. De aceea, ea constituie și în zilele noastre baza teoretică a pregătirii inginerului electrician.

Către sfîrșitul secolului trecut, teoria macroscopică clasică a cîmpului electromagnetic era definitivată în trăsăturile ei esențiale, în principal datorită lucrărilor lui J. C. Maxwell (pentru medii în repaus) și H. Hertz (pentru medii în mișcare). Generalizarea făcută de H. Hertz, pentru a putea extinde teoria lui Maxwell la medii în mișcare, admitea în fond următoarele ipoteze:

a) Nu există *vid absolut*, ci numai un *vid* în sensul de stare limită de extremă rarefiere a substanței (materia corpurilor). De aceea fiecărui punct din spațiu i se poate asocia un sistem de referință privilegiat S_0 (referențialul propriu) imobil față de substanța din imediata lui vecinătate. În acest referențial se definesc mărimile electrice și magnetice **E**, **D**, **B**, **H**, **P**, **M**, **J**, ρ_v, astfel că valorile acestor mărimi sînt independente de referențialul S, utilizat pentru caracterizarea configurației geometrice și a stării de mișcare a mediului. În particular, corpul de probă utilizat pentru a măsura intensitatea cîmpului electric **E** într-un anumit punct e considerat imobil în raport cu referențialul propriu al acelui punct.

b) Forma cea mai generală a legilor cîmpului e forma lor integrală (v. rel. I, II, V, VI, IX din cap. 31 și prezentarea generală din par. 29.1, vol. I), în care derivatele în raport cu timpul sînt derivate substanțiale ale integralelor respective, curbele închise Γ și suprafețele

închise Σ fiind considerate atașate mișcării locale a substanței. Numai astfel formularea legilor e independentă de referențialul S, față de care se măsoară pozițiile și vitezele.

Deoarece la vremea cînd a fost elaborată această teorie se admitea un punct de vedere mecanicist, conform căruia cîmpul electromagnetic ar fi fost o stare de deformare specială a unei substanțe ipotetice extrem de „fine" numită *"eter"* — teoria lui Hertz, care prin ipotezele de mai sus identifica starea de mișcare a eterului cu starea de mișcare a corpurilor, a fost numită *teoria eterului antrenat.*

Cu toate succesele obținute în unificarea interpretării fenomenelor electromagnetice, teoria lui Maxwell și Hertz prezenta — chiar pentru stadiul dezvoltării cunoștințelor fizice de la sfîrșitul veacului trecut — anumite deficiențe esențiale.

În primul rînd, caracterul macroscopic al teoriei era depășit de realizările teoriei atomice a materiei. Numeroase experiențe puneau în evidență faptul că modelul continuu al substanței era numai o primă aproximație, iar ipotezele privitoare la alcătuirea corpurilor din atomi și molecule, imaginați ca sisteme de puncte materiale în mișcare în vidul absolut, reușiseră să dea o explicație unitară unui număr foarte mare de fenomene : legile combinațiilor chimice, legile electrolizei, legile gazelor (teoria cinetico-moleculară), legile căldurii (fundamentarea statistică a termodinamicii) etc.

În al doilea rînd, caracterul fenomenologic al teoriei lăsa neexplicate numeroasele legi de material, dintre care cele mai importante erau cele privitoare la conducția curentului electric, la polarizația electrică a corpurilor și la magnetizarea lor. În cadrul unei teorii macroscopice, fenomenologice, legile de material reprezintă proprietăți primitive ireductibile din punct de vedere logic la altele, adică neexplicabile pe baza legilor generale. Devenea din ce în ce mai evident faptul că interpretarea microscopică a fenomenelor putea aduce un cîștig însemnat în cunoașterea naturii.

În al treilea rînd — deși teoria lui Maxwell și Hertz clarificase numeroase fenomene privitoare la mediile în mișcare și, în primul rînd, fenomenele de inducție electromagnetică prin mișcare (v. par. 22.3 vol. I) care stăteau la baza construcției mașinilor electrice — existau anumite experiențe de optică și electrodinamica mediilor în mișcare [1], care nu puteau fi explicate în cadrul acestei teorii (și care, toate, păreau a impune ideea că „eterul" nu e antrenat de loc sau e antrenat numai parțial de corpurile în mișcare).

Aceste deficiențe ale teoriei macroscopice clasice au fost în mare parte înlăturate de teoria microscopică clasică a fenomenelor electromagnetice, datorită lui A.H. Lorentz (1895) și numită *teoria electronilor* — care a luat în considerare structura discontinuă la scară atomică a corpurilor.

În lumina cunoștințelor actuale despre structura materiei, proprietățile și legile de mișcare ale celor mai simple particule cunoscute, care intervin în această structură, sînt cu totul deosebite de acelea ale punctelor materiale din mecanica clasică și fac obiectul de studiu al fizicii cuantice. Această fizică, dezvoltată în prima jumătate a secolului nostru, a dus la concluzia că *nu numai substanța și cîmpul electromagnetic poate prezenta la scară atomică o structură discretă.* De aceea, teoria electronilor reprezintă doar o etapă intermediară a dezvoltării unei teorii microscopice consecvente, dezvoltare care se completează astăzi în cadrul *electrodinamicii cuantice.*

58.1 Ipotezele fundamentale ale teoriei electronilor

În lumina concepțiilor moderne, care au eliminat noțiunea inconsistentă de „eter", ipotezele fundamentale ale teoriei lui Lorentz pot fi formulate cum urmează :

1. *Există la scară atomică două forme de materie : substanța și cîmpul electromagnetic. Substanța are o structură discretă, fiind constituită din particule elementare*[2] *care sînt în permanentă mișcare în vid.* Cu un termen intro-

[1] Fenomenul aberației luminii (J. Bradley, 1728), experiența lui A. Fizeau (1851), experiențele lui W. C. Roentgen (1888) și A. A. Eichenwald (1903), experiența lui H. A. Wilson (1904). vezi, V. Novacu, *Introducere în electrodinamică*, vol. II, Ed. Academiei R.P.R., 1955.

[2] Se zice elementară, o particulă care în cadrul unei anumite etape de dezvoltare a cunoștințelor fizice nu poate fi prezentată ca un sistem de particule mai simple.

dus de J. Stoney, în 1891, Lorentz a numit *electron* orice[1] particulă elementară încărcată electric. Cîmpul electromagnetic microscopic are o repartiție continuă în spațiul vid dintre particulele elementare și în interiorul acestor particule cu care interacționează.

Particulele elementare sînt reunite în sisteme de particule, avînd o mare stabilitate la acțiuni exterioare, numite atomi, care sînt neutre din punct de vedere electric. Atomii caracterizează elementele chimice și sînt grupați în molecule, caracteristice substanțelor definite. În anumite condiții (în electroliți, în cristale conductoare, în gaze ionizate etc.) atomii pot pierde electroni, care se deplasează oricît de mult în spațiile interatomice sau sînt captați de alți atomi. Atomii sau moleculele cu electroni lipsă sau în exces sînt încărcați electric pozitiv sau negativ și se numesc ioni.

2. *Particulele elementare electrizate sînt complet caracterizate din punct de vedere electromagnetic — adică din punctul de vedere al interacțiunii lor cu cîmpul electromagnetic — de sarcina lor electrică* q_m (sarcina electrică microscopică).

Sarcina electrică microscopică e deci singura mărime primitivă care — în această teorie — caracterizează starea electromagnetică a corpurilor. Ea e invariabilă în timp (fiecare particulă elementară perfect izolată în vidul care o înconjură — par. 58.3.1) și e presupusă repartizată continuu în interiorul fiecărei particule cu *densitatea de volum* :

$$\rho_m = \lim_{\Delta V_m \to 0} \frac{\Delta q_m}{\Delta V_m}. \tag{58.1}$$

Celelalte mărimi de stare electrică și magnetică a corpurilor cunoscute din teoria macroscopică (polarizația electrică, magnetizația, densitatea curentului de conducție) trebuie să rezulte ca mărimi derivate (v. par. 58.4) în cadrul interpretării microscopice a fenomenelor.

3. *Starea locală și instantanee a cîmpului electromagnetic e carcterizată de două mărimi vectoriale : intensitatea microscopică a cîmpului electric* $\mathbf{e}$[2] *și inducția magnetică microscopică* $\mathbf{b}$. Aceste mărimi sînt definite prin intermediul forței microscopice $\mathbf{F}_m$, pe care cîmpul o exercită asupra unei particule elementare de sarcină q_m și viteză $\mathbf{e}_m$:

$$\mathbf{F}_m = q_m\mathbf{e} + q_m\mathbf{u}_m \times \mathbf{b}. \tag{58.2}$$

Primul termen al acestei forțe e analog forței

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \tag{58.3}$$

[1] Astăzi s-a păstrat numele de *electron* numai pentru cele mai ușoare particule elementare încărcate negativ. Particulele elementare încărcate pozitiv care intră în constituția nucleelor atomilor sînt de circa 2 000 de ori mai grele și se numesc *protoni*. În condiții speciale s-au pus în evidență particule pozitive la fel de ușoare ca electronii și numite *pozitroni*, precum și particule negative la fel de grele ca protonii și numite *antiprotoni*. Mai există particule elementare neîncărcate electric (de ex. neutrino) precum și numeroase particule elementare nestabile neutroni, mezoni etc...), încărcate sau neîncărcate.

[2] Folosim litere mici pentru mărimile microscopice corespunzătoare unor mărimi macroscopice notate cu literă mare. Dacă litera mică nu e disponibilă pentru acest scop, folosim indicele inferior m (de ex. q_m, ρ_m).

exercitate de cîmpul electric macroscopic de intensitate **E** asupra unui corp de probă încărcat cu sarcina q în repaus față de mediul ambiant, extrem de rarefiat (v. par. 2. 2, vol. I). Al doilea termen — numit și forța lui Lorentz — are corespondentul macroscopic în forța

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}' \times \mathbf{B}, \tag{58.4}$$

pe care un cîmp magnetic de inducție **B** o exercită asupra corpului de probă menționat, dacă acesta se deplasează cu viteza **v**′ față de mediul ambiant. E ușor de verificat că forța lui Lorentz exercitată asupra particulelor libere, a căror mișcare prin conductoare determină curentul de conducție macroscopic, are ca efect macroscopic forța lui Laplace (v. par. 16.3, vol. I), exercitată de cîmpul magnetic macroscopic asupra unui element de circuit parcurs de curent.

4. *Ecuațiile cîmpului electromagnetic microscopic au aceeași formă ca ecuațiile lui Maxwell pentru medii nepolarizabile în repaus din teoria macroscopică* (adică, cu rel. 55.2, 55.3, 55.4, 55.5, în care $\mathbf{P} = 0$ și $\mathbf{M} = 0$, respectiv $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$ și $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$), termenul corespunzător densității curentului de conducție fiind *densitatea curentului microscopic de convecție* :

$$\mathbf{j} = \rho_m \mathbf{u}_m \tag{58.5}$$

5. *Mărimile primitive ale teoriei electronilor sînt definite, iar legile acestei teorii sînt valabile, într-un sistem de referință inerțial privilegiat* : acela față de care se măsoară viteza microscopică $\mathbf{u}_m$ a particulelor din relațiile (58.2) și (58.5). Acest referențial privilegiat se mai numește *sistemul inerțial lorentzian* S_L.

Această restricție nu este esențială decît în cadrul cinematicii clasice. Dacă se folosesc relațiile acestei cinematici pentru schimbarea coordonatelor prin trecerea la alt referențial inerțial, se constată că ecuațiile teoriei electronilor (v. par. 58.2) își schimbă forma. Există deci un singur sistem de referință inerțial, în care aceste ecuații pot avea forma postulată de Lorentz și fenomenele electromagnetice par a permite să se identifice experimental acest referențial privilegiat. De aceea, în lumina interpretării mecaniciste a cîmpului ca stare de deformație a „eterului", sistemul inerțial lorentzian a fost considerat imobil față de „eter", care a fost imaginat ca o substanță imobilă în toate punctele din spațiu și pătrunzînd peste tot în vidul dintre particule și în interiorul particulelor. Existența obiectivă a acestui „eter" constituia deci o explicație a faptului că dintre toate sistemele de referință inerțiale (egal îndreptățite din punctul de vedere al fenomenelor mecanice), unul singur era privilegiat din punctul de vedere al fenomenelor electromagnetice. De aceea, teoria lui Lorentz a mai fost numită și teoria eterului fix. Astăzi, după apariția teoriei relativității restrînse (1905) a lui A. Einstein și în acord cu toate experiențele efectuate, se știe că în cadrul cinematicii relativiste ecuațiile lui Lorentz au aceeași formă oricare ar fi referențialul inerțial utilizat (v. și observația 2 de la par. 58.2). Ipoteza „eterului" s-a dovedit inutilă și în dezacord cu experiența.

6. *Proprietățile macroscopice sînt proprietăți medii, iar mărimile macroscopice corespund valorilor medii ale mărimilor microscopice*, valori medii calculate pentru domenii spațiale și intervale de timp foarte mici la scară macroscopică și, totodată, foarte mari la scară microscopică, numite *infiniți mici fizici*.

58.2. Ecuațiile Maxwell-Lorentz

Notăm cu x_m, y_m, z_m coordonatele microscopice ale unui punct față de sistemul inerțial considerat și cu t_m timpul microscopic. Ecuațiile cîmpului electromagnetic microscopic postulate de teoria lui Lorentz (conform pct.4 din paragraful precedent) și numite *ecuațiile Maxwell-Lorentz* sînt

$$\mathrm{rot}_m \frac{\mathbf{b}}{\mu_0} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t_m} \tag{58.6}$$

$$\mathrm{rot}_m \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t_m} \tag{58.7}$$

$$\mathrm{div}_m\, \varepsilon_0 \mathbf{e} = \rho_m \tag{58.8}$$

$$\mathrm{div}_m\, \mathbf{b} = 0 \tag{58.9}$$

completate cu expresia

$$\mathbf{f}_m = \rho_m (\mathbf{e} + \mathbf{u}_m \times \mathbf{b}). \tag{58.10}$$

Prima ecuație e *forma locală a legii circuitului magnetic*, a doua e *forma locală a legii inducției electromagnetice*, a treia e *forma locală a legii fluxului electric*, a patra e *forma locală a legii fluxului magnetic*, iar ultima e *forma locală a legii acțiunii ponderomotoare* a cîmpului electromagnetic microscopic, adică relația (58.2) exprimată pentru unitatea de volum $\mathbf{f}_m$ fiind densitatea de volum a forței microscopice.

Observații : 1. Ecuațiile Maxwell-Lorentz (58.6) ... (58.9) sînt cu totul analoge ecuațiilor lui Maxwell pentru medii omogene în repaus (55.2) ... (55.6). În acest caz „mediul omogen" este însă vidul ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$), iar densitatea curentului de conducție e înlocuită cu densitatea $\mathbf{j} = \rho_m \mathbf{u}_m$ a curentului microscopic de convecție. Se pot defini intensitatea microscopică $\mathbf{h}$ a cîmpului magnetic și inducția electrică microscopică $\mathbf{d}$ prin relații analoge (55.6) :

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{b}, \qquad \mathbf{d} = \varepsilon_0 \mathbf{e}. \tag{58.11}$$

2. Ținînd seama de această analogie, întreaga teorie a undelor electromagnetice pentru medii omogene și în particular teoria undei electromagnetice plane (v. par. 29.3 și par. 29.4.1, vol. I) și teoria potențialelor retardate (par. 57.1) rămîn valabile. Rezultă că undele cîmpului electromagnetic microscopic se propagă în vid, între particule, cu viteza de fază

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3.10^8 \text{ m/s}, \tag{58.12}$$

față de sistemul de referință în care sînt valabile ecuațiile (58.6), ... (58.9). În cadrul cinematicii clasice, aceste ecuații puteau să aibă această formă numai în raport cu un singur sistem de referință inerțial. Măsurarea vitezei de propagare a undelor electromagnetice (și deci a luminii) în vid ar fi putut deci să permită identificarea sistemului de referință privilegiat, sistemul inerțial lorentzian S : acela față de care viteza luminii ar fi avut valoarea dată de relația (58.12). Lorentz a crezut că acest sistem e imobil în raport cu soarele și cu grupul stelelor fixe. Experiențele efectuate și, în primul rînd, experiența lui Michelson și Morley au arătat că viteza luminii are valoarea (58.12) față de orice referențial inerțial. Acest fapt experimental a fost considerat de A. Einstein (1905) ca o lege a naturii, cu ajutorul căreia (postulînd și egala îndreptățire a tuturor sistemelor de referință

inerţiale) a elaborat *teoria relativităţii restrînse*, bazată pe o nouă cinematică, în care relaţia de simultaneitate şi, ca urmare, duratele şi distanţele sînt *relative la sistemul de referinţă inerţial*, în raport cu care sînt considerate. *În cadrul cinematicii relativiste, ecuaţiile Maxwell-Lorentz au aceeaşi formă în orice sistem de referinţă inerţial.*

3. În lumina cunoştinţelor actuale, deficienţele teoriei electronilor sînt acelea ale oricărei teorii *precuantice*, care nu ia în considerare în mod organic microstructura materiei pusă în evidenţă de *efectele cuantice* şi studiată de *fizica cuantică*. În cadrul acestei fizici, particulele elementare nu au proprietăţile punctelor materiale din mecanica clasică (newtoniană) şi nu evoluează după legile mecanicii clasice (v. şi par. 60). Totodată, aceste particule pot avea şi moment magnetic (momentul magnetic intrisec, de spin) şi nu numai sarcină electrică. Mărimile caracteristice particulelor şi sistemelor staţionare de particule *sînt cuantificate*, adică pot avea valori aparţinînd unui şir discret. În particular, sarcina electrică microscopică a particulelor elementare poate avea numai valorile 0, $+q_0$ şi $-q_0$, unde

$$q_0 \approx 1{,}6.10^{-19}\ \mathrm{C} \approx 4{,}8.10^{-10}\ \mathrm{Fr}. \tag{58·13}$$

(in Fizică, q_0 se notează de obicei e). De aceea, sistemele de particule au o sarcină care e *multiplul exact* al valorii de mai sus, ceea ce a permis, de altfel, şi măsurarea directă a acestei valori (experienţele lui Millikan, 1911)[1]. Cîmpul electromagnetic microscopic însuşi poate manifesta o structură discretă, ca fiind alcătuit din particule elementare, numite *fotoni* (fără masă de repaus şi fără sarcină electrică), *a căror probabilitate de prezenţă în spaţiu e caracterizată de repartiţia continuă a cîmpului calculat cu ecuaţiile Maxwell-Lorentz*

58.3. Aplicaţii

58.3.1. Conservarea sarcinii electrice în teoria electronilor. Proprietatea de conservare a sarcinii electrice este demonstrată ca o teoremă în această teorie. Astfel, dacă se ia divergenţa ecuaţiei (58.6) şi se ţine seama de ecuaţiile (58.8) şi (58.5) şi de faptul că divergenţa unui rotor e identic nulă, se obţine

$$\mathrm{div}_m (\rho_m \mathbf{u}_m) + \frac{\partial \rho_m}{\partial t_m} = 0. \tag{58.14}$$

Aceasta e forma locală a teoremei conservării sarcinii microscopice. Integrînd pe un volum V_Σ, mărginit de o suprafaţă închisă Σ (fixă), rezultă, cu teorema lui Gauss-Ostrogradski, forma integrală a teoremei conservării sarcinii

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_m}\iiint\limits_{V_\Sigma}\rho_m\,\mathrm{d}v = \iint\limits_{\Sigma}\rho_m\mathbf{u}_m\,\mathrm{d}\mathbf{A}. \tag{58.15}$$

Dacă suprafaţa Σ e dusă prin vid, astfel ca să înconjure complet o singură particulă de sarcină q_m, atunci în punctele acestei suprafeţe $\rho_m \mathbf{u}_m = 0$, iar $\iiint\limits_{V_\Sigma} \rho_m\,\mathrm{d}v = q_m$. Se obţine

$$-\frac{\mathrm{d}q_m}{\mathrm{d}t_m} = 0 \quad \text{sau} \quad q_m = \text{const.} \tag{58·16}$$

Sarcina unei particule electrice microscopice e invariabilă în timp.

[1] V. E. V. Spolski, *Fizica atomică*, vol. I, Ed. tehnică, 1952.

58.3.2. **Energia electromagnetică microscopică și fluxul de energie electromagnetică microscopică.** Cînd o particulă se mişcă în cîmpul electromagnetic microscopic cu viteza $\mathbf{u}_m$, forța electromagnetică (58.2) nu efectuează lucru mecanic decît prin termenul ei electric, *deoarece termenul magnetic (forța lui Lorentz $q_m \mathbf{u} \times \mathbf{b}$) e perpendicular pe viteză*. Dacă avem un sistem de particule asupra cărora acționează numai forțe electromagnetice, creşterea energiei cinetice W_c a sistemului în unitatea de timp este deci egală cu puterea efectuată numai de forțele electrice. Densitatea de volum a acestei puteri fiind, cu relațiile (58.10) și (58.5),

$$\mathbf{f}\mathbf{u}_m = \rho_m \mathbf{u}_m \mathbf{e} = \mathbf{j}\mathbf{e}, \tag{58.17}$$

creșterea acestei energii cinetice este dată de relația

$$\frac{\mathrm{d}W_c}{\mathrm{d}t_m} = \iiint\limits_{V_\Sigma} \mathbf{j}\,\mathbf{e}\,\mathrm{d}v, \tag{58.18}$$

unde V_Σ e un volum care conține în interiorul lui sistemul de particule. Expresia **je** din relația (58.18) se poate transforma cu ajutorul ecuațiilor (58.6) și (58.7) în acelaşi mod ca în teoria macroscopică (v. par. 29.4, vol. I). Se obține

$$\mathbf{j}\mathbf{e} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{e}\,\mathrm{rot}_m\,\mathbf{b} - \varepsilon_0 \mathbf{e}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t_m} = -\,\mathrm{div}_m\left(\frac{\mathbf{e}\times\mathbf{b}}{\mu_0}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mathbf{b}^2}{2\mu_0} + \varepsilon_0\frac{\mathbf{e}^2}{2}\right].$$

Înlocuind în relația (55·18) și folosind teorema lui Gauss-Ostrogradski, se obține forma integrală a teoremei conservării egergiei electromagnetice în teoria electronilor

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_m}\left[W_c + \iiint\limits_{V_\Sigma}\left(\frac{\mathbf{b}^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 \mathbf{e}^2}{2}\right)\mathrm{d}v\right] = \iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathbf{e}\times\mathbf{b}}{\mu_0}\,\mathrm{d}\mathbf{A}. \tag{58.19}$$

Viteza de scădere a sumei dintre energia cinetică a particulelor W_c și energia cîmpului electromagnetic microscopic cu densitatea de volum

$$w_m = \frac{\mathbf{b}^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 \mathbf{e}^2}{2} \tag{58.20}$$

e deci egală cu fluxul de energie electromagnetică prin suprafață (spre exterior), adică cu fluxul vectorului Poynting microscopic

$$\mathbf{s}_m = \frac{\mathbf{e}\times\mathbf{b}}{\mu_0} = \mathbf{e}\times\mathbf{h}. \tag{58.21}$$

58.3.3. **Conservarea energiei unei particule elementare care se mişcă într-un cîmp electromagnetic staționar.** Considerăm o particulă elementară de sarcină $q_m = \pm q_0$, care se mişcă într-un cîmp electromagnetic exterior, practic staționar, cu intensitatea cîmpului magnetic $\mathbf{e} \approx \mathbf{E}$ și inducția magnetică $\mathbf{b} \approx \mathbf{B}$, practic invariabile în timp. Asupra particulei se exercită forța electromagnetică (58.2)

$$\mathbf{F} = \pm q_0 (\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}),$$

Lucrul mecanic elementar efectuat de cîmp asupra particulei în deplasarea elementară $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{u}\mathrm{d}t$ cu viteza $\mathbf{u}$ este egal, conform teoremei energiei cinetice, cu variația acestei energii

$$\delta\mathfrak{L} = \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{F}\mathbf{u}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(m\frac{u^2}{2}\right),$$

unde m e masa particulei. Înlocuind expresia forței și observînd că în regim staționar cîmpul electric e potențial

$$\mathbf{e} \approx \mathbf{E} = -\operatorname{grad} V, \tag{58.22}$$

rezultă (cu $\mathbf{u}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) = 0$)

$$\delta\mathfrak{L} = \pm q_0 \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = \mp q_0\, d\mathbf{r} \operatorname{grad} V = d\left(m \frac{u^2}{2}\right).$$

Deoarece

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = d\mathbf{r} \operatorname{grad} V$$

e creșterea potențialului cîmpului exterior în lungul elementului de arc $d\mathbf{r}$, rezultă

$$\delta\mathfrak{L} = \mp q_0\, dV = d(\mp q_0 V) = d\left(m \frac{u^2}{2}\right), \tag{58.23}$$

adică

$$m \frac{u^2}{2} \pm q_0 V = \text{const.} \tag{58.24}$$

În mișcarea particulei considerate se conservă deci energia totală, compusă din energia cinetică $W_c = mu^2/2$ și energia potențială în cîmpul exterior

$$W_p = \pm q_0 V. \tag{58.25}$$

Dacă particula a intrat în cîmp cu viteza inițială nulă într-un punct de potențial V_0, rezultă

$$\frac{mu^2}{2} \pm q_0 V = \pm q_0 V_0$$

sau

$$u = \sqrt{\frac{2q_0}{m} \left| V - V_0 \right|}\,. \tag{58.26}$$

În modul, viteza u a particulei e univoc determinată în fiecare punct de diferența de potențial dintre punctul din cîmp considerat și potențialul de referință inițial. Cu ajutorul unei diferențe de potențial convenabile,particulele pot fi accelerate pînă la viteze foarte mari (de exemplu în tuburile electronice).

Deoarece toate particulele elementare încărcate au (în modul) aceeași sarcină q_0, lucrul mecanic e același (în modul) pentru toate, în cazul unei diferențe de potențial date: din relația (58.23) rezultă:

$$|\mathfrak{L}| = q_0\, |V - V_0|. \tag{58.27}$$

Se numește *electron-volt* (eV) lucrul mecanic efectuat de forțele electrice asupra unei particule elementare, care se deplasează între două puncte, sub acțiunea unei diferențe de potențial de un volt. Numeric:

$$1 \text{ eV} = |\mathfrak{L}|_{V-V_0=1} = q_0 \approx 1{,}6.10^{-19} \text{ J}. \tag{58.28}$$

58.3.4. **Mișcarea unui electron într-un cîmp electric staționar, transversal.** Forma exactă a traiectoriei particulei depinde de structura exactă a cîmpului electric, respectiv magnetic,

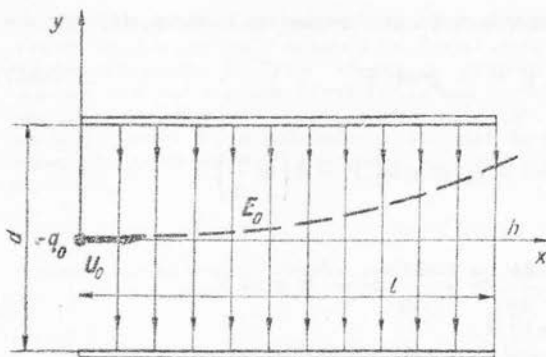


Fig. 58.1

relația (58.26) determinînd numai modulul vitezei. În cazul $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ (constant în spațiu), $q = -q_0$ și $m = m_0$ (electron), ecuația de mișcare este

$$\mathbf{F} = m_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = m_0 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -q_0\mathbf{E}_0. \tag{58.29}$$

Presupunînd viteza inițială $\mathbf{u}_0$ perpendiculară pe liniile de cîmp (produse, de exemplu, cu un condensator plan, v. fig. 58.1) și alegînd axele ca în figură, cu $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_0\mathbf{j}$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{i}\,u_0$, rezultă (proiectînd pe axe)

$$m_0 \frac{du_x}{dt} = m_0 \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad m_0 \frac{du_y}{dt} = m_0 \frac{d^2y}{dt^2} = q_0\mathrm{E}_0$$

de unde

$$\frac{dx}{dt} = u_x = \text{const.} = u_0$$

$$\frac{dy}{dt} = u_y = \frac{q_0}{m_0} E_0 t + \text{const.} = \frac{q_0}{m_0} E_0 t. \qquad (\mathbf{u}_y(0) = \mathbf{u}_0\mathbf{j} = 0.$$

Prin integrare rezultă ecuațiile parametrice $(x(0) = y(0) = 0)$

$$x = u_0 t$$

$$y = \frac{q_0}{m_0} E_0 \frac{t^2}{2},$$

corespunzătoare traiectoriei parabolice

$$y = \frac{q_0 E_0}{2m_0 u_0^2} x^2. \tag{58,30}$$

La distanța $x = l$, devierea traiectoriei este

$$h = y(l) = \frac{q_0 E_0}{2m_0 u_0^2} l^2.$$

Dacă $U \approx E_0 d$ e tensiunea dintre armăturile condensatorului, deviația rezultă proporțională cu tensiunea

$$h = \frac{q_0 l^2}{2m_0 u_0^2 d} U. \tag{58.31}$$

Acesta e principiul *deviației electrostatice*, utilizate în tuburile catodice. Cunoscînd viteza inițială u_0 (produsă cu o tensiune de accelerare și calculată cu (58.26)) și măsurînd mărimile l, d, h, U, se poate deduce experimental sarcina specifică a electronului $\frac{q_0}{m_0}$ care rezultă

$$\frac{q_0}{m_0} \approx 1{,}758 \cdot 10^{11} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}} \approx 5{,}27 \cdot 10^{17} \frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{g}}. \tag{58·32}$$

Pe această cale, cu valoarea (58.13) se poate deduce masa electronului

$$m_0 = \frac{q_0}{\frac{q_0}{m_0}} \approx 9{,}1\cdot10^{-31}\ \text{kg} = 9{,}1\cdot10^{-28}\ \text{g}. \tag{58.33}$$

Relaţia (58.32) arată că în particulele elementare concentrarea sarcinii electrice atinge valori uriaşe, cu multe ordine de mărime peste valorile realizabile macroscopic în laborator (inferioare lui 10^{-3} C/kg).

Observaţie: La viteze apropiate de viteza luminii, masa electronului creşte în acord cu prevederile teoriei relativităţii. Valoarea (58.32) e masa de repaus.

58.3.5. **Mişcarea unui electron într-un cîmp magnetic transversal.** În cazul $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ (constant în spaţiu), $q = -q_0$ şi $m = m_0$, ecuaţia de mişcare este

$$\mathbf{F} = m_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = m_0 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -q_0 (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0). \tag{58.34}$$

Dacă viteza iniţială $\mathbf{u}_0$ e paralelă cu inducţia magnetică, forţa e mereu nulă şi mişcarea e rectilinie şi unifomă în lungul liniilor de cîmp magnetice. Dacă viteza iniţială e însă perpendiculară pe liniile de cîmp magnetic, forţa (58.34) e maximă şi abate direcţia de mişcare într-un plan perpendicular pe liniile de cîmp (fig. 58.2).

Fie $\mathbf{B}_0 = \mathbf{k}B_0$ dirijat în lungul axei Oz şi $\mathbf{u}_0 = \mathbf{i}u_0$ dirijat în lungul axei Ox. Forţa e conţinută mereu în planul Oxy, care conţine şi viteza iniţială. Ca urmare, traiectoria e conţinută în planul Oxy şi $\mathbf{u} \perp \mathbf{B}$ în orice punct. Deoarece într-un cîmp magnetic modulul vitezei e constant (v. par. 58.3.3.), rezultă că şi modulul forţei e constant

$$F = q_0 u_0 B_0. \tag{58.35}$$

O forţă constantă în modul şi normală mereu pe viteză determină însă o acceleraţie centripetă egală cu

$$a = \frac{F}{m_0} = \frac{q_0}{m_0} u_0 B_0.$$

Traiectoria e deci circulară, cu raza R dedusă din valoarea acceleraţiei centripete

$$a = \frac{u_0^2}{R} = \frac{q_0}{m_0} u_0 B_0$$

de unde

$$R = \frac{m_0 u_0}{q_0 B_0}. \tag{58.36}$$

Mişcarea e circulară şi uniformă, cu viteza unghiulară de rotaţie

$$\omega = \frac{u_0}{R} = \frac{q_0 B_0}{m_0}.$$

Ecuaţia traiectoriei — care se putea obţine şi direct prin integrare din relaţia (58.34) — rezultă (v. fig. 58.2)

$$x^2 + (y - R)^2 - R^2 = 0.$$

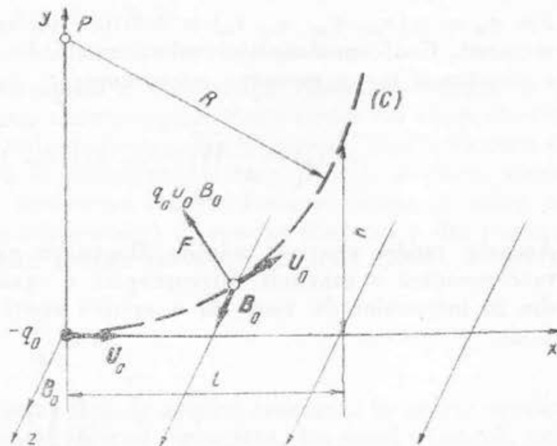


Fig. 58.2

iar deviația $y = h$ pentru $x = l < R$ rezultă

$$h = y(l) = R + \sqrt{R^2 - l^2}. \tag{58.37}$$

Acesta e principiul *deviației magnetice*, utilizat în tuburile catodice, în care cîmpul $\mathbf{B}_0$ e produs de două bobine de deflexiune cu planul spirelor perpendicular pe direcția lui $\mathbf{B}_0$, așezate de-o parte și de alta a tubului.

58.4. Interpretarea microscopică a mărimilor macroscopice

58.4.1. **Mediile macroscopice ale mărimilor microscopice.** Din punctul de vedere al interpretării microscopice, mărimile macroscopice sînt valori medii ale celor microscopice, calculate pe domenii spațiale și intervale de timp numiți infiniți mici fizici. Dacă $\Delta\mathcal{D}$ e un *domeniu spațial infinit mic fizic*, el trebuie să fie suficient de mic din punct de vedere macroscopic, pentru ca în cuprinsul lui mărimile macroscopice să aibă o variație neglijabilă și totodată suficient de mare din punct de vedere microscopic (să conțină un număr foarte mare de molecule). Dacă Δt e un *interval de timp infinit mic fizic*, el trebuie să fie suficient de mic din punct de vedere macroscopic, pentru ca în decursul lui funcțiunile macroscopice de timp să admită o variație neglijabilă și totodată suficient de mare din punct de vedere microscopic (să fie mult mai mare decît cele mai mari perioade ale proceselor care au loc la scară moleculară și atomică). Notăm cu (x, y, z) coordonatele spațiale macroscopice, adică acelea ale centrului C al infinitului mic fizic $\Delta\mathcal{D}$ de volum ΔV, cu t timpul macroscopic, adică timpul asociat mijlocului intervalului Δt, cu (x_m, y_m, z_m) coordonatele spațiale microscopice ale unui punct oarecare din $\Delta\mathcal{D}$, cu t_m timpul microscopic și cu ξ, η, ζ, τ coordonatele relative

$$\xi = x - x_m, \quad \eta = y - y_m, \quad \zeta = z - z_m, \quad \tau = t - t_m. \tag{58.38}$$

Fie $\varphi_m = \varphi\,(x_m, y_m, z_m, t_m)$ o mărime microscopică, funcție de punct și de moment. Conform definiției valorii medii din calculul integral, media spațială a funcțiunii la un moment microscopic t_m dat pe domeniul $\Delta\mathcal{D}$ este

$$\tilde{\varphi}^{s}\,(t_m) = \frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_{\Delta\mathcal{D}} \varphi(x_m, y_m, z_m, t_m)\,\mathrm{d}x_m\mathrm{d}y_m\mathrm{d}z_m. \tag{58.39}$$

Această medie spațială admite fluctuații rapide în timp. De aceea, media macroscopică a mărimii microscopice e egală prin definiție cu valoarea medie în intervalul de timp Δt a mediei spațiale (58.39), adică cu

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\tilde{\varphi}}^{s\,t} = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \tilde{\varphi}^{s}(t_m)\,\mathrm{d}t_m. \tag{58.40}$$

Înlocuind aici expresia (58.39) şi efectuînd schimbarea de variabile de integrare necesară pentru a trece de la coordonatele x_m, y_m, z_m, t_m la cele relative (58.38) se obţine expresia

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \frac{1}{\Delta v \Delta t} \underbrace{\iiint}_{\Delta \mathfrak{D}} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \varphi(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t+\tau) \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\zeta \, \mathrm{d}\tau, \quad (58.41)$$

din care rezultă imediat că media macroscopică $\tilde{\varphi}$ e o funcţiune de coordonatele macroscopice x, y, z, t.

O formă particulară importantă prezintă această operaţie de mediere, dacă mărimea microscopică φ este o mărime de stare a particulelor microscopice, fiind nulă în vid şi avînd dată integrala pe volumul V_{part} al unei particule

$$\Phi = \iiint_{V_{part}} \varphi \mathrm{d}x_m \mathrm{d}y_m \, \mathrm{d}z_m \quad (58.42)$$

(de exemplu, densitatea de sarcină a cărei integrală de volum e sarcina particulei). În acest caz, formula mediei spaţiale (58.39) devine

$$\tilde{\varphi}^s = \frac{1}{\Delta V} \Sigma \Phi,$$

unde suma se extinde asupra tuturor particulelor din $\Delta \mathfrak{D}$. Dacă mărimea Φ are aceeaşi valoare pentru toate particulele şi dacă $\Delta N = N_v \Delta V$ e numărul de particule din ΔV, unde $N_v = \Delta N / \Delta V$ e densitatea lor numerică, se obţine

$$\tilde{\varphi}^s = N_v \Phi. \quad (58.43)$$

Media macroscopică rezultă atunci

$$\tilde{\varphi} = \overset{\sim t}{\tilde{\varphi}^s} = \overline{N_v \Phi}^t, \quad (58.44)$$

unde medierea din ultimul membru se efectuează acum numai în timp.

58.4.2. **Interpretarea microscopică a intensităţii cîmpului electric E şi a inducţiei magnetice B din teoria macroscopică.** Considerăm un cîmp electromagnetic de intensitate **E** şi de inducţie magnetică **B** într-un mediu extrem de rarefiat (cu polarizaţie electrică şi magnetizaţia neglijabile), a cărui viteză locală faţă de sistemul inerţial lorentzian este **v**. Dacă se aduce în cîmp un mic corp de probă electrizat (şi nepolarizat) de sarcină electrică q, din punctul de vedere macroscopic se exercită asupra lui forţa electrică (58.3), avînd pe unitatea de sarcină valoarea

$$\frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{E}, \quad (58.45)$$

cînd micul corp e menţinut în repaus faţă de mediul ambiant. În aceste condiţii el are deci viteza **v** faţă de sistemul inerţial lorentzian. La scară atomică, asupra fiecărei particule a corpului, cîmpul electromagnetic exterior, de intensi-

tate microscopică **e** şi de inducţie microscopică **b**, exercită forţa microscopică (58.2), şi deci pe unitatea de sarcină forţa specifică

$$\frac{\mathbf{F}_m}{q_m} = \mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}. \qquad (58.46)$$

Valoarea medie a acestei forţe specifice microscopice determină acţiunea ponderomotoare macroscopică (58.45) *şi trebuie deci interpretată ca intensitate a cîmpului electric macroscopic*:

$$\mathbf{E} = \widetilde{\mathbf{e}} + \mathbf{v} \times \widetilde{\mathbf{b}}. \qquad (58.47)$$

Dacă, în condiţii in rest neschimbate, corpul de probă se mişcă cu viteza $\mathbf{v}'$ faţă de mediul ambiant, din punct de vedere macroscopic apare forţa suplimentară (58.4), avînd pe unitatea de sarcină valoarea

$$\frac{\mathbf{F}'}{q} = \mathbf{v}' \times \mathbf{B}. \qquad (58.48)$$

În aceleaşi condiţii, la scară atomică, asupra fiecărei particule a corpului de probă cîmpul microscopic exterior exercită o forţă magnetică suplimentară (corespunzătoare vitezei suplimentare $\mathbf{v}'$ căpătată de toate particulele corpului), care pe unitatea de sarcină are valoarea

$$\frac{\mathbf{F}'_m}{q_m} = \mathbf{v}' \times \mathbf{b}. \qquad (58.49)$$

Deoarece valoarea medie a acestei forţe specifice microscopice determină acţiunea ponderomotoare macroscopică (58.48), *oricare ar fi direcţia şi mărimea vitezei* $\mathbf{v}'$, *rezultă pentru inducţia magnetică macroscopică interpretarea*:

$$\mathbf{B} = \widetilde{\mathbf{b}}. \qquad (58.50)$$

58.4.3. **Interpretarea microscopică a densităţii de sarcină electrică şi a densităţii curentului electric de conducţie.** Aşa cum se ştie, particulele elementare sînt grupate în sisteme numite atomi, molecule, ioni. Moleculele şi atomii sînt neutre din punct de vedere electric, sarcinile pozitive din nucleele atomilor compensînd exact sarcinile negative ale electronilor de pe orbitele din jurul nucleelor. Particulele elementare care intră în constituţia atomilor şi moleculelor se numesc *particule legate* şi nu aduc nici o contribuţie la sarcina macroscopică a corpurilor, sarcina lor totală fiind nulă pentru orice mic corp izolat în vid. Ionii conţin atît particule legate, a căror sumă a sarcinilor e nulă pe întregul ion, cît şi electroni în exces (ioni negativi) sau în lipsă (ioni pozitivi). Oricare ar fi natura unui sistem de s particule legate, avînd sarcinile q^k_{leg} (moleculă, atom, ion etc.), există relaţia

$$\sum_{k=1}^{s} q^k_{leg} = 0. \qquad (58.51)$$

În afară de sistemele de particule mai există şi electroni liberi (mai corect evasi-liberi), care se pot deplasa oricît de mult în cuprinsul corpului considerat, nefiind localizaţi în anumite molecule sau în anumiţi atomi sau ioni.

Excesul local de sarcină pozitivă sau negativă al ionilor împreună cu sarcina electronilor liberi poate să contribuie la sarcina macroscopică a corpurilor, deoarece poate să aibă o valoare totală nenulă pentru un mic corp izolat în vid. Din acest motiv se numesc *particule libere* electronii liberi și particulele în exces față de starea neutră din ioni. Aceste particule se mai numesc și *purtători de sarcină* și, prin deplasarea lor (de ex. a ionilor în electroliți sau a electronilor în metale), pot contribui la *curentul electric de conducție* din teoria macroscopică, care — din punct de vedere microscopic *se interpretează prin curentul de convecție, al purtătorilor de sarcină, față de restul conductorului*.

În acord cu această clasificare a particulelor elementare din corpuri, densitatea microscopică de sarcină se poate descompune aditiv în doi termeni

$$\rho_m = \rho_{m\text{lib}} + \rho_{m\text{leg}}. \tag{58.52}$$

Primul, $\rho_{m\text{lib}}$, se numește *densitatea de volum a sarcinii microscopice libere* și e nul în vid sau în interiorul particulelor legate. Al doilea, $\rho_{m\text{leg}}$, se numește *densitatea de volum a sarcinii microscopice legate* și e nul în vid sau în interiorul particulelor libere. În acord cu faptul că particulele legate nu pot contribui la sarcina macroscopică a corpurilor, se admite că *densitatea de volum a sarcinii electrice din teoria macroscopică este valoarea medie a densității sarcinii microscopice libere*

$$\rho_v = \tilde{\rho}_{m\text{lib}} = \overline{N_v q_{\text{lib}}}^{\,t}, \tag{58.53}$$

ultima expresie fiind o formă particulară a relației (58.44), valabilă cînd toate particulele libere sînt de același tip și au densitatea numerică N_v. De asemenea, *densitatea curentului electric de conducție din teoria macroscopică este valoarea medie a densității curentului microscopic de convecție al particulelor libere față de conductor*

$$\mathbf{J} = \overline{\rho_{m\text{lib}} \mathbf{w}_{\text{lib}}}^{\,t} = \overline{N_v\, q_{\text{lib}} \mathbf{w}_{\text{lib}}}^{\,t}. \tag{58.54}$$

Aici $\mathbf{w}_{\text{lib}}$ e viteza relativă la conductor a acestor particule, iar ultima expresie e valabilă cînd toate particulele libere sînt de același tip.

58.4.4. Interpretarea microscopică a polarizației electrice. În teoria electronilor se consideră că particulele elementare nu au moment electric. Momentul electric trebuie să fie în acest caz o mărime derivată a sistemelor de particule legate, care sînt analoge unor dipoli electrici (v. par. 4.2. vol I). Generalizînd definiția momentului electric al dipolului pentru un sistem de s particule încărcate, se numește moment *electric microscopic dipolar* al sistemului mărimea

$$\mathbf{p} = \overline{\sum_{k=1}^{s} \mathbf{r}^k q^k_{leg}}^{\,t}, \tag{58.55}$$

în care $\mathbf{r}^k$ sînt razele vectoare ale particulelor față de centrul de inerție C al sistemului (moleculă, atom, ion etc. v. fig. 58.3).

Media se consideră pentru un interval de timp mare față de perioadele de rotație ale particulelor din sistem. Polarizația electrică **P** e definită macroscopic ca densitate de volum a momentului electric macroscopic. Cum acesta e rezultatul însumării valorilor medii ale tuturor momentelor (58.55) ale diferitelor molecule, rezultă că *polarizația e interpretabilă microscopic ca valoare medie a sumei momentelor microscopice ale moleculelor din unitatea de volum.* Dacă toate moleculele sînt identice, rezultă o relație analogă cu relația (58.44):

$$\mathbf{P} = \overline{N_v \mathbf{p}}^{\,t}, \tag{58.56}$$

în care medierea se face numai în timp. În aceste condiții se demonstrează că *densitatea sarcinii de polarizație din teoria macroscopică* (v. par. 4.4. vol. I) *este valoarea medie a densității microscopice a sarcinilor legate*:

$$\rho_{v_p} = -\operatorname{div}\mathbf{P} = \tilde{\rho}_{m_{\mathrm{leg}}}. \tag{58.57}$$

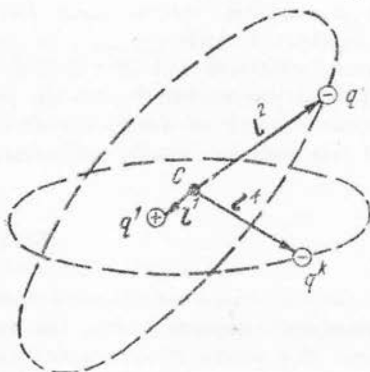


Fig. 58.3

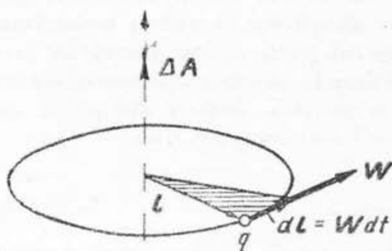


Fig. 58.4

58.4.5. **Interpretarea microscopică a magnetizației.** În teoria electronilor se consideră că particulele elementare nu au moment magnetic. Momentul magnetic trebuie să fie în acest caz o mărime derivată a sistemelor de particule legate în mișcare, care sînt analoge unor bucle de curent (v. par. 18.2. vol. I), așa cum a presupus Ampère cu mult timp înainte de cunoașterea structurii atomului. În adevăr, atomii sînt constituiți din nuclee încărcate pozitiv în jurul cărora se rotesc electroni pe orbite închise. Considerăm pentru simplificare o orbită circulară (fig. 58.4) de rază l, pe care se rotește o particulă de sarcină q, cu viteza $\mathbf{w}$ și raza vectoare $\mathbf{l}$ față de centrul orbitei. Orbita trebuie echivalată cu o buclă de curent de moment magnetic

$$\mathbf{m} = i\mathbf{A}, \tag{58.58}$$

unde $\mathbf{A}$ e vectorul arie al buclei, iar i curentul ei. Pentru a generaliza această definiție, observăm că în intervalul de timp Δt, particula străbate parcursul $\mathbf{w}\Delta t$ și raza vectoare mătură aria

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{l} \times \mathbf{w}\Delta t.$$

Cum intensitatea curentului e sarcina transmisă în unitatea de timp printr-o suprafață transversală față de direcția de mișcare, curentul echivalent, în acest caz, particulei e $q/\Delta t$. Contribuția mișcării particulei la momentul magnetic al sistemului poate fi definită prin analogie cu relația (58.58) de relația

$$\frac{q}{\Delta t}\Delta\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{l} \times q\mathbf{w}$$

Pe baza acestei analogii se numește *moment magnetic orbital* al unui sistem de s particule legate, în mișcare pe orbite închise în jurul centrului C, mărimea

$$\mathbf{m}_{orb} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\mathbf{l}^k \times q_{leg}^k\mathbf{w}^k. \tag{58.59}$$

Dezvoltarea ulterioară a teoriei atomice nu a confirmat ipoteza teoriei electronilor, conform căreia particulele elementare nu ar avea moment magnetic. Pe baze experimentale și teoretice (în cadrul Fizicii cuantice) s-a constatat că particulele pot avea un moment magnetic propriu sau intrinsec, numit *moment magnetic de spin*, care din punctul de vedere al teoriei electronilor trebuie considerat o mărime primitivă (ireductibilă la curenți electrici orbitali). Valoarea medie a sumei momentelor magnetice de spin $\mathbf{m}^k$ ale particulelor unui sistem atomic se numește *moment magnetic de spin al sistemului*

$$\mathbf{m}_{spin} = \widetilde{\sum_{k=1}^{s}\mathbf{m}^k}. \tag{58.60}$$

În ansamblu, un sistem de particule legate (moleculă, atom, ion etc. are *momentul magnetic microscopic*

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_{orb} + \mathbf{m}_{spin} = \overline{\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{1}{2}\mathbf{l}^k \times q^k\mathbf{w}^k + \mathbf{m}^k\right)}. \tag{58.61}$$

Magnetizația $\mathbf{M}$, adică momentul magnetic al unității de volum, are atunci o expresie analogă cu a polarizației electrice (58.56)

$$\mathbf{M} = \widetilde{N_v\mathbf{m}}, \tag{58.62}$$

dacă toate moleculele sînt identice.

Cu aceste interpretări pentru mărimile electromagnetice cele mai importante se pot deduce ecuațiile cîmpului electromagnetic macroscopic (ecuațiile Maxwell) prin mediere, pornind de la ecuațiile cîmpului electromagnetic microscopic[1] (58.6...58.9). Totodată, pe baza interpretării microscopice a mărimilor macroscopice și a ipotezelor teoriei atomice a corpurilor, se pot deduce și interpreta diferitele proprietăți și legi de material (v. și cap. 59 și cap. 60).

---

[1] R. Răduleț, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. IV, Tipografia și Litografia Învățămîntului, 1956.

58.4.6. **Medii statistice.** Calculul mediilor temporale care intervin în expresiile (58.44), (58.54), (58.56), (58.62) ar fi practic imposibil dacă nu s-ar folosi metode statistice în care aceste medii temporale se înlocuiesc prin *mediile statistice*[1].

În adevăr, în condiții macroscopice date și invariabile, un sistem macroscopic evoluează necontenit la scara microscopică, unde starea sa, caracterizabilă printr-un număr enorm de parametri, e o funcțiune extrem de complicată de timp. De aceea *există un număr foarte mare de stări microscopice* $S(t_m)$ *compatibile cu aceleași condiții macroscopice*. Realizarea efectivă a *uneia* oarecare dintre aceste stări reprezintă *un eveniment întîmplător* în raport cu condițiile macroscopice date. Dacă se cunoaște *probabilitatea* $\mathfrak{P}(S) \geqslant 0$ de realizare a acestui eveniment, numită *probabilitate de stare*, valoarea medie a unei mărimi microscopice oarecare $\Phi(S)$ (funcțiune de microstarea S) e dată de expresia

$$\tilde{\Phi} = \sum_{S} \Phi(S)\mathfrak{P}(S). \tag{58.63}$$

Aceasta e *media statistică* a unei mărimi microscopice. Cum media unei constante trebuie să fie egală cu acea constantă, probabilitățile de stare $\mathfrak{P}(S)$ satisfac o relație numită *condiția de normare*

$$\sum_{S} \mathfrak{P}(S) = 1, \tag{58.64}$$

din care rezultă că toate probabilitățile sînt subunitare, cel mult unitare

$$\mathfrak{P}(S) \leqslant 1. \tag{58.65}$$

Sumele din relațiile (58.63) și (58.64) se calculează asupra tuturor stărilor posibile ale sistemului, compatibile cu condițiile macroscopice date. Calculul pe cale statistică al valorilor medii necesită, așadar, cunoașterea funcției $\mathfrak{P}(S)$ numită *funcțiune de repartiție*.

În cazul unui sistem macroscopic, compus dintr-un număr foarte mare de microsisteme identice în interacțiune slabă — cum sînt, de exemplu, moleculele unui gaz — se demonstrează (în cadrul fizicii statistice clasice), că, la echilibru termic, probabilitatea ca un microsistem (o moleculă) să se afle într-o stare s [2] oarecare e dată de relația

$$\mathfrak{P}(s) = \text{const.}\ e^{-\frac{w(s)}{kT}}, \tag{58.66}$$

în care $w(s)$ e energia microsistemului în stare s, T e temperatura absolută (în grade Kelvin, iar

$$k \approx 1{,}37 \cdot 10^{-23}\ \text{J}/^0\text{K} \tag{58.67}$$

e *constanta universală a lui Boltzmann*. Constanta multiplicativă neprecizată din expresia (58.66) e o funcțiune de temperatură și de proprietățile macroscopice ale sistemului, care se determină cu ajutorul condiției de normare (58.64).

Funcțiunea de repartiție (58.66) se numește *funcțiunea de repartiție a lui Maxwell-Boltzmann* și pune în evidență rolul pe care îl are agitația termică, adică ansamblul interacțiunilor dezordonate existente la nivel atomic.

---

[1] v. S. Țițeica, *Elemente de mecanică statistică*. Ed. tehnică, 1956.

[2] Stările microsistemelor care compun sistemul macroscopic sînt notate cu litera mică s. Starea microscopică a acestui sistem definită de ansamblul stărilor microsistemelor a fost notată cu litera mare S.

59. POLARIZAREA ELECTRICĂ ŞI MAGNETICĂ A CORPURILOR

59.1. Teoria clasică a susceptivităţii electrice

59.1.1. Polarizarea corpurilor. Cîmpul electric activ. În vol. I paragraful 4.5 s-a prezentat o teorie calitativă microscopică a polarizaţiei electrice. S-a arătat că din punctul de vedere al polarizării electrice există două clase de molecule: *molecule nepolare*, al căror moment electric microscopic (dat de relaţia (58.55)) e nul în lipsa unui cîmp electric exterior moleculei, şi *molecule polare* al căror moment electric microscopic (58.55) e diferit de zero chiar în lipsa unui cîmp exterior. Se mai spune că moleculele polare prezintă moment electric microscopic spontan. Polarizarea electrică specifică corpurilor cu molecule nepolare se numeşte *polarizare diaelectrică* sau *polarizare de deformare* şi se manifestă la orice corp polarizat, iar aceea specifică corpurilor cu molecule polare se numeşte *polarizare paraelectrică* sau *polarizare de orientare* şi se manifestă numai la aceste corpuri.

Polarizarea electrică macroscopică a corpurilor se produce prin efectul acţiunilor exercitate asupra moleculelor (atomilor) de cîmpul electric exterior acestora. Acţiunile consistă în *deformarea* moleculelor nepolare — care, în acest fel, capătă momente electrice microscopice induse — sau în *orientarea* moleculelor polare, care în lipsa cîmpului exterior au de obicei o orientare haotică şi nu contribuie la polarizarea macroscopică a corpului. Cîmpul electric care exercită aceste acţiuni asupra moleculei se numeşte *cîmp electric activ* (sau *interior*) $\mathbf{E}_0$. El nu coincide cu cîmpul electric macroscopic, deoarece acesta din urmă e obţinut prin medierea cîmpului microscopic pe un volum infinit mic fizic care e ocupat de foarte multe molecule, inclusiv de molecula asupra căreia se exercită acţiunea, pe cînd cîmpul activ se obţine prin medierea efectuată numai pe volumul moleculei considerate şi în lipsa acesteia. Se poate însă arăta că pentru o clasă largă de corpuri mărimea $\mathbf{E}_0$ este aproximativ egală cu intensitatea $\mathbf{E}_c$ a cîmpului electric macroscopic dintr-o cavitate sferică vidă Σ, de rază foarte mică R, cu centrul în molecula considerată şi al cărei volum e un infinit mic fizic, adică e ocupat de foarte multe molecule:

$$\mathbf{E}_0 = \widetilde{\mathbf{e}}_{\mathrm{int}_\Sigma} + \widetilde{\mathbf{e}}_{\mathrm{ext}_\Sigma} \approx \widetilde{\mathbf{e}}_{\mathrm{int}_\Sigma} + \mathbf{E}_c \approx \mathbf{E}_c. \qquad (59.1)$$

În această aproximaţie se consideră, pe de o parte, că media intensităţii cîmpului electric $\mathbf{e}_{\mathrm{ext}_\Sigma}$ produs de moleculele din *exteriorul* sferei e practic egală cu intensitatea $\mathbf{E}_c$ (datorită faptului că aceste molecule exterioare se găsesc foarte departe de centrul sferei din punct de vedere microscopic) şi se consideră, pe de altă parte, că media intensităţii cîmpului electric $\widetilde{\mathbf{e}}_{\mathrm{int}_\Sigma}$ produs de moleculele polarizate din *interiorul* sferei Σ, adică vecine cu molecula considerată, e nulă. Această ultimă presupunere e sigur corectă, din motive de simetrie, la cristalele din sistemul cubic sau la gaze (unde repartiţia total dezordonată din

cauza agitației termice a moleculelor vecine din interiorul suprafeței Σ asigură compensarea statistică a cîmpului produs de ele în centrul sferei).

Pentru calcul mărimii $\mathbf{E}_c$ folosim relația (5.4) (par. 5.1, vol. I)

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_{\Sigma}\frac{(\mathbf{P}\mathbf{n}_i)\mathbf{R}}{R^3}\,\mathrm{d}A,$$

în care $\mathbf{n}_i = -\mathbf{u}$ e normala interioară la Σ, vectorul $\mathbf{R}$ e dirijat către punctul unde calculăm cîmpul, adică spre centrul sferei, iar $\mathbf{P}$ poate fi considerat constant în punctele suprafeței Σ a cavității, deoarece sfera este foarte mică. (fig. 59.1)

Facem notația $\mathbf{E}_\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_{\Sigma}\frac{(\mathbf{P}\mathbf{n}_i)\mathbf{R}}{R^3}\mathrm{d}A$. Din motive de simetrie $\mathbf{E}_\Sigma$ e orientat Σ după axa O_z și integrandul depinde numai de θ, astfel că

$$\mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{u}(\mathbf{u}\mathbf{E}_\Sigma) = \mathbf{u}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_{\Sigma}\frac{(\mathbf{P}\mathbf{n}_i)(\mathbf{R}\mathbf{u})}{R^3}\,\mathrm{dA} =$$

$$= \mathbf{u}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\theta=0}^{\pi}\frac{P\cos\theta\, R\cos\theta}{R^3}\,2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta =$$

$$= -\mathbf{u}\,\frac{P}{2\varepsilon_0}\int\limits_{0}^{\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}(\cos\theta) = \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}\,.$$

Fig. 59.1

În consecință rezultă

$$\mathbf{E}_0 \approx \mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\,\mathbf{P}. \qquad (59.2)$$

Teoria microscopică a polarizației electrice urmărește să demonstreze expresia *legii macroscopice a polarizației electrice* temporare (rel. 4.36, par. 6.3, vol. I)

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}, \qquad (59.3)$$

în care χ_e e mărimea de material numită *susceptivitate electrică.*

59.1.2. **Polarizarea diaelectrică** (de deformare). Momentul electric microscopic indus, $\mathbf{p}_{\mathrm{ind}}$, al moleculelor nepolare rezultă din deformarea moleculelor sau a atomilor (v. par. 4.5, vol. I), produsă de cîmpul electric $\mathbf{E}_0$. Considerăm ca exemplu pentru simplificarea expunerii un atom de hidrogen, și că vectorul $\mathbf{E}_0$ e orientat după normala la planul orbitei, ca în figura 59.2. Orbita electronului nu se deformează, dar planul ei se deplasează în sens contrar cîmpului electric, iar nucleul (protonul) în sensul cîmpului, și se formează astfel un dipol electric constituit din nucleul N al atomului, situat la distanța l de planul orbitei, și din centrul sarcinilor negative M, care reprezintă poziția medie a electronului aflat în mișcare rapidă pe orbită și e situat în centrul de simetrie al orbitei.

Scriind că în stare staţionară, cînd încetează acţiunea de deformare a atomului, proiecţia forţei rezultante pe direcţia vectorului $\mathbf{E}_0$ e nulă, se obţine relaţia

$$0 = -q_0E_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0^2}{R^2}\sin\beta,$$

în care primul termen e proiecţia forţei $-q_0\mathbf{E}_0$ exercitate de cîmpul electric asupra electronului, iar al doilea termen e proiecţia forţei coulombiene $\mathbf{F}_e$ de atracţie exercitate de nucleu asupra electronului, situat la distanţa R de el. Deoarece $\sin\beta = \frac{l}{R}$, iar $q_0l = p_{ind.}$ din ultima relaţie rezultă

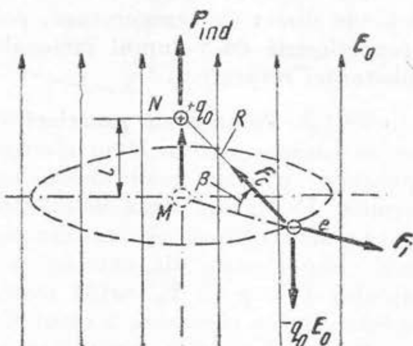


Fig. 59.2

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0l}{R^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_{ind}}{R^3}$$

sau

$$p_{ind} = 4\pi R^3\varepsilon_0E_0 \equiv \varepsilon_0\alpha E_0,$$

în care $\alpha = \frac{p_{ind}}{\varepsilon_0E_0}$ se numeşte *polarizabilitate electrică* şi e o mărime proporţională cu volumul atomului, respectiv al moleculei ($\alpha = 4\pi R^3$). Din cauză că momentul electric indus are aceeaşi orientare ca şi intensitatea cîmpului electric activ, rezultă relaţia vectorială

$$\mathbf{p}_{ind} = \varepsilon_0\alpha\mathbf{E}_0. \tag{59.4}$$

Experienţa arată că această relaţie e valabilă (cu anumite valori pentru α) atît în cazul cînd $\mathbf{E}_0$ are şi o componentă paralelă cu planul orbitei (care în aceste împrejurări, se deformează) cît şi în cazul unei molecule de structură mai complexă. De aceea se poate afirma că momentul electric microscopic indus e totdeauna proporţional cu intensitatea cîmpului electric activ.

Dacă în unitatea de volum al corpului există, în medie, N_v molecule, expresia polarizaţiei diaelectrice este următoarea :

$$\mathbf{P} = N_v\mathbf{p}_{ind} = \alpha N_v\varepsilon_0\,\mathbf{E}_0,$$

sau, ţinînd seama de relaţia (59.2) şi considerînd nulă polarizaţia permanentă,

$$\mathbf{P} = N_v\alpha\varepsilon_0\left(\mathbf{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{P}\right),$$

din care se obţine

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\frac{\alpha N_v}{1 - \frac{N_v\alpha}{3}}\mathbf{E}_0. \tag{59.5}$$

Am stabilit astfel, prin analiza microscopică a fenomenelor, expresia legii polarizației electrice temporare (59.3). Prin comparare rezultă *expresia susceptivității diaelectrice*

$$\chi_{ed} = \frac{N_v\alpha}{1 - \frac{N_v\alpha}{3}}. \tag{59.5'}$$

Din această relație rezultă că susceptivitatea de natură diaelectrică nu depinde direct de temperatură, polarizabilitatea fiind o mărime microscopică, proporțională cu volumul moleculei, iar N_v fiind proporțional cu densitatea substanței respective.

59.1.3. **Polarizarea paraelectrică.** Dacă un corp izotrop cu molecule polare nu se găsește într-un cîmp electric stabilit din exterior, momentele electrice spontane $\mathbf{p}_p$ ale moleculelor sînt orientate dezordonat, datorită agitației termice. De aceea, suma momentelor electrice din unitatea de volum e nulă, iar corpul rezultă nepolarizat din punct de vedere macroscopic. În cazul aplicării unui cîmp electric din exterior, moleculele tind să se orienteze sub acțiunea cuplului $\mathbf{C} = \mathbf{p}_p \times \mathbf{E}_0$, astfel încît momentele lor electrice să fie omoparalele cu intensitatea cîmpului, a cărui direcție — luată ca direcție Oz — constituie o direcție privilegiată în corp; la această ordonare a orientării moleculelor, determinată de cuplul exercitat de cîmpul activ asupra lor, se opune însă agitația termică, astfel că momentele electrice ale moleculelor formează diferite unghiuri (nule sau nenule) cu direcția cîmpului, fiind însă mai probabilă realizarea unghiurilor ascuțite cu această direcție privilegiată. În această situație, suma momentelor electrice din unitatea de volum e diferită de zero, și deci corpul rezultă polarizat electric în sensul intensității cîmpului. Dacă agitația termică ar fi atît de slabă și intensitatea cîmpului electric atît de mare, încît toate momentele electrice să aibă orientarea cîmpului, se spune că s-ar atinge *saturația*, iar polarizația nu ar mai putea crește.

Lucrul mecanic de rotație efectuat de forțele electrice care determină cuplul $\mathbf{C} = \mathbf{p}_p \times \mathbf{E}_0$ de valoare scalară $p_pE_0 \sin\theta$ este $-p_pE_0 \sin\theta \, d\theta$ (semnul minus provine din faptul că acest cuplu acționează în sens opus creșterii lui θ) și e egal cu descreșterea energiei potențiale w_p a moleculei în cîmpul exterior

$$-\,dw_p = -\,p_pE_0 \sin\theta \, d\theta = C_\theta \, d\theta.$$

Prin integrare rezultă expresia acestei energii

$$w_p = \int p_pE_0 \sin\theta \, d\theta = -\,p_pE_0 \cos\theta = -\,\mathbf{p}_p\mathbf{E}_0. \tag{59.6}$$

În lipsa unui cîmp exterior care să tindă să orienteze moleculele, toate direcțiile din spațiu sînt în mod egal îndreptățite, și de aceea numărul de molecule cu orientările momentului electric, cuprinse între θ și $\theta + d\theta$ și între φ și $\varphi + d\varphi$ (v. fig. 59.3), e proporțional cu unghiul solid elementar corespunzător, adică cu elementul de arie $dA = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ al sferei de rază unitate, centrată pe moleculă.

În termeni statistici se poate spune că, în absența vreunui cîmp exterior, probabilitatea elementară ca orientarea momentului electric al unei molecule să fie cuprinsă în unghiul solid elementar considerat este

$$d\mathfrak{P} = \text{const.} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (59.7)$$

În prezența cîmpului exterior $\mathbf{E}_0$, în care fiecare moleculă are energia potențială (59.6), această probabilitate devine (în acord cu repartiția Maxwell-Boltzmann, rel. 58.66)

$$d\mathfrak{P} = \text{const.} \, e^{-\frac{w_p}{kT}} dA = \text{const.} \, e^{-\frac{w_p}{kT}} \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi,$$

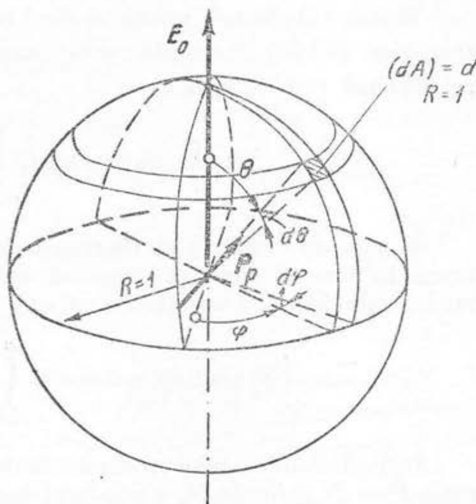


Fig. 59.3

sau, ținînd seama de relația (59.6),

$$d\mathfrak{P} = \text{const.} \, e^{\frac{p_p E_0 \cos\theta}{kT}} \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

sau

$$d\mathfrak{P} = \text{const.} \, e^{a\cos\theta} \, d(\cos\theta) \cdot d\varphi, \quad (59.8)$$

unde s-a notat

$$a = \frac{p_p E_0}{kT}. \quad (59.9)$$

Constanta din expresia (59.8) a probabilității elementare se determină din condiția de normare (58.64), care, în acest caz al unei mulțimi continue de stări, se exprimă prin integrala

$$\int d\mathfrak{P} = 1, \quad (59.10)$$

luată asupra tuturor valorilor posibile ale variabilelor independente. Se obține

$$\text{const.} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{a\cos\theta} d(\cos\theta) \, d\varphi = 1$$

sau

$$\text{const.} = \frac{1}{2\pi \int_0^{\pi} e^{a\cos\theta} \, d(\cos\theta)}. \quad (59.11)$$

Momentul electric mediu al unei molecule se calculează cu formula mediei statistice (58.63), care, în acest caz al unei mulţimi continue de stări, se exprimă prin integrala

$$\widetilde{\mathrm{p}} = \int \mathrm{p}_p \mathrm{d}\mathfrak{Q} = \text{const.} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{p}_p e^{a\cos\theta} \, \mathrm{d}(\cos\theta) \, \mathrm{d}\varphi. \qquad (59.12)$$

E uşor de verificat că singura componentă nenulă a momentului mediu e aceea în lungul direcţiei cîmpului exterior. De aceea, în modul, momentul mediu coincide cu proiecţia lui pe axa Oz

$$\widetilde{p} = \int p_p \cos\theta \, \mathrm{d}\mathfrak{Q} = \text{const.} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} p_p \cos\theta \, e^{a\cos\theta} \, \mathrm{d}(\cos\theta) \, \mathrm{d}\varphi.$$

Integrînd în φ, înlocuind constanta cu relaţia (59.11) şi trecînd la polarizaţia $P = N_v \widetilde{p}$ (unde N_v e numărul mediu de molecule din unitatea de volum), se obţine expresia

$$P = N_v p_p \frac{\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta} \cdot \cos\theta \, \mathrm{d}(\cos\theta)}{\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta} \, \mathrm{d}(\cos\theta)}. \qquad (59.13)$$

Observăm că numărătorul fracţiei din (59.13) este egal cu derivata numitorului în raport cu parametrul a. Făcînd schimbarea de variabilă $u = \cos\theta$, se obţine

$$P = N_v p_p \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\int_{u=1}^{-1} e^{au} \, \mathrm{d}u\right]}{\int_{u=1}^{-1} e^{au} \, \mathrm{d}u} = N_v \mathrm{p}_p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\ln \int_1^{-1} e^{au} \, \mathrm{d}u\right] = N_v p_p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\ln \frac{e^{-a} - e^{a}}{a}\right]$$

sau

$$P = N_v p_p \left[\frac{-e^{-a} - e^{a}}{e^{-a} - e^{a}} - \frac{1}{a}\right] = N_v \mathrm{p}_p \left[\frac{\mathrm{ch}\, a}{\mathrm{sh}\, a} - \frac{1}{a}\right] = N_v p_p \left[\mathrm{cth}\, a - \frac{1}{a}\right].$$

Funcţiunea

$$\mathfrak{L}(a) = \mathrm{cth}\, a - \frac{1}{a} \qquad (59.14)$$

se numeşte *funcţiunea lui Langevin*, iar reprezentarea ei grafică este indicată în figura 59.4.

Cu această notaţie obţinem

$$\mathbf{P} = Np_p\, \mathfrak{L}(a). \tag{59.15}$$

În condiţiile fizice obişnuite $a \ll 1$, şi deci $\mathfrak{L}(a) \approx \mathfrak{L}'(0)a = \frac{a}{3}$. Cu această aproximaţie se obţine, ţinînd seama de relaţiile (59.9) (59.15) şi (59.2),

$$P \simeq N_v p_p^2 \frac{E_0}{3\varepsilon_0 kT} = N_v \frac{p_p^2}{3\varepsilon_0 kT}\left(E + \frac{1}{3\varepsilon_0} P\right),$$

de unde rezultă, explicitînd polarizaţia,

$$P \simeq N_v \frac{p_p^2}{3\varepsilon_0 kT} \frac{1}{1 - N\frac{p_p^2}{9\varepsilon_0 kT}} \varepsilon_0 E.$$

Am demonstrat astfel expresia (59.3) a legii polarizaţiei electrice temporare pentru substanţe paraelectrice. *Susceptivitatea paraelectrică* are expresia

$$\chi_e \quad \frac{N_v p_p^2}{3\varepsilon_0 kT} \frac{1}{1 - \frac{N_v p_p^2}{9\varepsilon_0 kT}}. \tag{59.16}$$

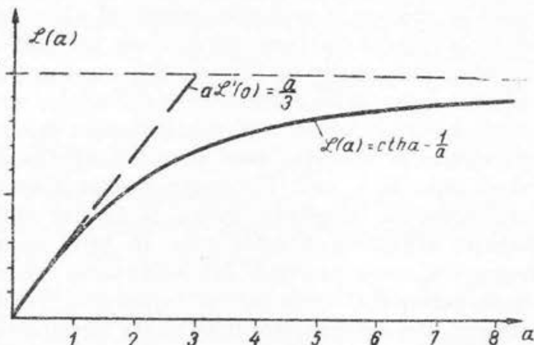


Fig. 59.4

Din această expresie rezultă că susceptivitatea de natură paraelectrică depinde de temperatură, şi anume că ea scade cînd temperatura creşte. În adevăr, dacă temperatura creşte, agitaţia termică a moleculelor se măreşte şi efectul de orientare a momentelor electrice în sensul cîmpului este mai slab.

În acest calcul s-a ţinut seama pînă acum numai de polarizaţia paraelectrică. În realitate şi în moleculele polare apare un moment electric indus, astfel că polarizaţia totală a corpurilor paraelectrice e egală cu suma dintre o polarizaţie de forma relaţiei (59.5) şi o polarizaţie de orientare de forma relaţiei (59.16). Ca rezultat, legea polarizaţiei electrice temporare are forma

$$P = \left[\frac{N_v \alpha}{1 - \frac{N_v \alpha}{3}} + \frac{N_v p_p^2}{3\varepsilon_0 kT} \frac{1}{1 - \frac{N_v p_p^2}{9\varepsilon_0 kT}}\right] \varepsilon_0 E, \tag{59.17}$$

din care rezultă relaţia

$$\chi_e = \frac{N_v \alpha}{1 - \frac{N_v \alpha}{3}} + \frac{N_v p_p^2}{3\varepsilon_0 kT} \frac{1}{1 - \frac{N_v p_p^2}{9\varepsilon_0 kT}}, \tag{59.18}$$

care reprezintă *expresia microscopică a susceptivităţii* unei clase largi de substanţe întîlnite în practică.

59.2. Teoria clasică a susceptivității magnetice

59.2.1. Magnetizarea corpurilor. Cîmpul magnetic activ. Așa cum am arătat în paragraful 58.4.5., moleculele corpurilor pot avea un moment magnetic microscopic **m**, dat de relația (58.61), la care contribuie atît momentul magnetic orbital al micilor bucle de curent, pe care le reprezintă mișcarea pe orbite închise a electronilor, cît și momentul magnetic intrinsec de spin al particulelor elementare. Și în acest caz se deosebesc *molecule nepolare*, al căror moment magnetic rezultant (58.61) e nul în lipsa unui cîmp magnetic exterior (momentele instantanee orbitale și de spin ale particulelor care compun molecula se compensează în medie) și *molecule polare*, al căror moment magnetic rezultant (58.61) nu se anulează în lipsa unui cîmp magnetic exterior, ci definește *momentul lor magnetic spontan*. Chiar dacă moleculele sînt polare, în lipsa unui cîmp exterior orientările momentelor diferitelor molecule sînt repartizate haotic, din cauza agitației termice și magnetizația macroscopică e nulă. Un cîmp exterior contribuie la apariția unei magnetizații macroscopice nenule prin două efecte (v. și par. 18.5, vol. I) : *magnetizarea diamagnetică*, care provine din apariția unui moment magnetic indus, la fiecare moleculă în parte, sub acțiunea și pe direcția cîmpului exterior (dar în sens opus acestuia), și *magnetizarea paramagnetică*, care provine din orientarea moleculelor polare sub acțiunea și în sensul cîmpului exterior și împotriva tendinței de dezorientare a agitației termice. Paramagnetismul se poate manifesta deci numai la substanțe cu molecule polare, pe cînd diamagnetismul se produce la orice substanță.

Ca și în cazul polarizării electrice, cîmpul magnetic exterior moleculei considerate, numit și *cîmpul magnetic activ* $\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0$, diferă de cîmpul magnetic macroscopic și e dat — pentru o clasă largă de corpuri — de relația

$$\frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mathbf{H}_0 \approx \mathbf{H} + \frac{1}{3}\mathbf{M}, \tag{59.19}$$

analogă cu relația (59.2) (așa cum știm din comparația legilor legăturilor $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ și $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, mărimii $\mathbf{P}$ îi corespunde $\mu_0\mathbf{M}$ în cazul magnetic).

Teoria microscopică a magnetizației urmărește să demonstreze expresia *legii macroscopice a magnetizației temporare* (rel. 18.28, par. 23.1, vol. I) :

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \tag{59.20}$$

în care χ_m e mărimea de material numită *susceptivitate magnetică*. Spre deosebire însă de mărimea electrică analogă, experiența și teoria arată că pentru marea majoritate a materialelor (dia- sau paramagnetice) susceptivitatea magnetică e extrem de mică ($\chi_m < 10^{-3}$). De aceea, termenul al doilea din relația (59.19) e neglijabil față de primul și cîmpul magnetic activ e practic egal cu intensitatea macroscopică a cîmpului magnetic

$$\mathbf{H}_0 \simeq \mathbf{H}, \qquad \mathbf{B}_0 \simeq \mu_0\mathbf{H}. \tag{59.21}$$

Există însă, după cum ştim, o clasă specială de materiale — materialele feromagnetice (v. par. 23.2, vol. I) — cu susceptivitate magnetică foarte mare şi cu proprietăţi speciale (nelinearitatea legii de magnetizaţie, isterezis, magnetizaţie remanentă etc.). De aceea, feromagnetismul va fi studiat separat (par. 59.3).

59.2.2. **Diamagnetismul.** Substanţele diamagnetice sînt acelea care au molecule nepolare, adică fără moment magnetic spontan. În lipsa unui cîmp magnetic exterior moleculei, expresia (59.61) a momentului magnetic al acestor molecule se anulează. La aplicarea unui cîmp magnetic exterior apare însă un moment magnetic indus, şi anume un moment magnetic orbital suplimentar.

În adevăr, dacă se consideră un sistem atomic compus din particule identice de sarcină q şi masă m care se mişcă într-un cîmp de forţe centrale, pe orbite închise care înconjură centrul cu viteze unghiulare foarte mari, după aplicarea unui cîmp magnetic exterior slab de inducţie $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$, întregul sistem capătă o mişcare suplimentară lentă de rotaţie în jurul direcţiei cîmpului cu viteza unghiulară

$$\Delta\omega \simeq -\frac{q}{2m}\mathbf{B}_0 = -\frac{q\mu_0}{2m}\mathbf{H}_0 \qquad (59.22)$$

($\Delta\omega \parallel \mathbf{B}_0$ dacă $q = -q_0 < 0$, cum e cazul electronilor din atomi). Aceasta e *teorema lui Larmor*, valabilă oricare ar fi planurile orbitelor particulelor, iar viteza unghiulară (59.22) se numeşte *precesia lui Larmor*.

Demonstrăm teorema lui Larmor numai în cazul particular deosebit de sugestiv al unui atom de hidrogen cu orbită circulară (fig. 59.5), la care se aplică un cîmp magnetic exterior perpendicular pe planul orbitei. Înainte de aplicarea cîmpului, forţa coulombiană centripetă $\mathbf{F}_c$ era echilibrată de forţa centrifugă $\mathbf{F} = \mathbf{l}m_0\omega^2_0$, unde $\mathbf{l}$ e raza vectoare, m_0 e masa electronului, iar ω_0 viteza lui unghiulară de rotaţie:

$$F_c = m_0\, l\, \omega_0^2 \qquad (59.23)$$

În tot intervalul de timp cît cîmpul magnetic creşte de la 0 la valoarea finală, apare un cîmp electric indus E_0, care (în cazul sensurilor din fig. 59.5) înfrînează mişcarea electronului. Viteza unghiulară a electronului se modifică cu mărimea (negativă) $\Delta\omega$, dar raza orbitei nu se modifică (şi deci nici F_c), deoarece scăderea forţei centrifuge e compensată exact de forţa lui Lorentz $\mathbf{F} = q\ (\mathbf{w} \times \mathbf{B}_0)$, care (în cazul din fig. 59.5 cu $q = -q_0$) are sensul radial şi modulul

$$F = q_0 w B_0 = q_0 \omega l B_0. \qquad (59.24)$$

După aplicarea cîmpului magnetic, forţa coulombiană F_c rămîne deci neschimbată o dată cu raza l a orbitei şi e echilibrată de suma dintre forţa centrifugă şi forţa Lorentz, calculate cu viteza unghiulară finală $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$

$$F_c = m_0 l\,(\omega_0 + \Delta\omega)^2 + q_0 l\,(\omega_0 + \Delta\omega)B_0 \qquad (59.25)$$

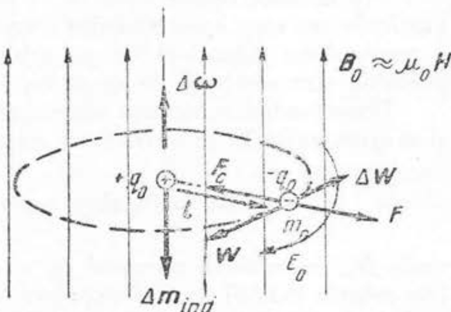


Fig. 59.5

Pentru toate valorile realizabile tehnic ale inducţiei exterioare B_0, modificarea vitezei unghiulare e foarte mică faţă de valoarea ei iniţială: $\Delta\omega \ll \omega_0$. De aceea, înlocuind F_c în relaţia (59.25) cu (59.23), reducînd termenii $m_0 l \omega_0^2$ şi neglijînd în rest pe $\Delta\omega$ faţă de ω_0, se obţine

$$2m_0 l\,\omega_0 \Delta\omega + q_0 l\,\omega_0 B_0 = 0 \quad \text{sau} \quad \Delta\omega = -\frac{q_0}{2m_0}B_0. \qquad (59.26)$$

Aici semnul minus arată că $\Delta\omega$ are sens opus lui ω_0, adică are sensul cîmpului magnetic. Ţinînd seama că $q = -q_0$, am obţinut chiar expresia (59.22).

Ţinînd seama de precesia lui Larmor, fiecare dintre cele s particule identice ($q^k = q$, $m^k = m$) ale unui sistem atomic capătă o viteză suplimentară $\Delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}^k$ şi contribuie la momentul magnetic orbital (58.59) al sistemului cu un termen „indus"

$$\Delta\mathbf{m}_{ind}^k = \frac{1}{2} q\,\mathbf{l}^k \times (\Delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}^k),$$

care cu relaţia (59.22) se scrie

$$\Delta\mathbf{m}_{ind}^k = -\frac{q^2\mu_0}{4m}\mathbf{l}^k \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{l}^k). \tag{59.27}$$

Sub acţiunea cîmpului magnetic exterior, momentul magnetic microscopic al întregului sistem se modifică deci cu mărimea

$$\widetilde{\mathbf{m}}_{ind} = \sum_{k=1}^{s}\Delta\mathbf{m}_{ind}^k = -\frac{q^2\mu_0}{4m}\sum_{k=1}^{s}\overline{\mathbf{l}^k \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{l}^k)}^{t}. \tag{59.28}$$

Vectorul $\mathbf{l}^k \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{l}^k) = \mathbf{H}_0\,\mathbf{l}^{k2} - \mathbf{l}^k(\mathbf{H}_0\,\mathbf{l}^k)$ are valoarea medie orientată în direcţia cîmpului exterior, deoarece componentele transversale se compensează statistic, singura direcţie privilegiată fiind a lui $\mathbf{H}_0 = \mathbf{k}H_0$. Se poate deci scrie (cu $\mathbf{k}\mathbf{l}^k = l^k\cos\theta^k$)

$$\overline{\mathbf{l}^k \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{l}^k)}^{t} \approx \mathbf{k}\,\overline{[\mathbf{k}\,(\mathbf{l}^k \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{l}^k))]}^{t} = \mathbf{H}_0\,\overline{l^{k2}\sin^2\theta^k}^{t},$$

rezultă *momentul magnetic indus* al sistemului

$$\widetilde{\mathbf{m}}_{ind} = -\frac{q^2\mu_0}{4m}\mathbf{H}_0\sum_{k=1}^{s}\overline{l^{k2}\sin^2\theta^k}^{t}. \tag{59.29}$$

Din această relaţie rezultă că momentul magnetic indus al sistemului de particule are sens opus sensului cîmpului exterior oricare ar fi semnul sarcinii q a particulelor (identice) de pe orbitele sistemului. În cazul atomilor, aceste particule sînt electroni de sarcină $q = -q_0$ şi masă $m = m_0$.

Presupunînd substanţa diamagnetică, acest moment indus e singurul nenul şi magnetizaţia $\mathbf{M}$ se obţine din relaţia

$$\mathbf{M} = N_v\,\widetilde{\mathbf{m}}_{ind} = -\frac{\mu_0 N_v q_0^2}{4m_0}\mathbf{H}_0\sum_{k=1}^{s}\overline{l^{k2}\sin^2\theta^k}^{t}, \tag{59.30}$$

unde N_v reprezintă numărul de molecule din unitatea de volum a corpului. Din relaţia (59.30) rezultă expresia *susceptivităţii diamagnetice* prin comparare cu relaţia (59.20) şi ţinînd seama de relaţia (59.21)

$$\chi_{md} = -\frac{\mu_0 N_v q_0^2}{4m_0}\sum_{k=1}^{s}\overline{l^{k2}\sin^2\theta^k}^{t} < 0. \tag{59.31}$$

Susceptivitatea diamagnetică este deci o mărime negativă (ceea ce arată, ca şi relaţia (59.30), că magnetizaţia indusă este opusă cîmpului magnetic inductor) — şi nu depinde direct de temperatura corpului (ci numai prin intermediul lui N_v). Orice corp prezintă, eventual împreună cu alte tipuri de magnetizaţie,

magnetizaţia de natură diamagnetică, care e însă extrem de slabă (de obicei $\chi_{md} \approx 10^{-6}$).

59.2.3. **Paramagnetismul.** Substanţele paramagnetice sînt acelea ale căror molecule au moment magnetic spontan (molecule polare). Acest moment magnetic, pe care îl notăm cu $\mathbf{m}_p$, este dirijat diferit, la fiecare moleculă în parte, astfel că datorită agitaţiei termice, valoarea medie a acestui moment e nulă pentru un corp macroscopic. Sub acţiunea unui cîmp magnetic exterior se produce însă orientarea ordonată parţială a moleculelor în direcţia cîmpului. Acest efect este similar celui paraelectric (v. par. 59.1.3), deoarece în acest caz cuplul care orientează moleculele este $\mathbf{C} = \mathbf{m}_p \times \mathbf{B}_0$; se obţine pentru energia potenţială a moleculei în cîmpul exterior, în locul relaţiei (59.6), expresia

$$w_m = -\mathbf{m}_p\mathbf{B}_0 = -\mathbf{m}_p\,\mathbf{H}_0\mu_0. \tag{59.32}$$

Calculul statistic se face cu totul analog şi dacă se notează acum

$$a = \frac{\mu_0 m_p H_0}{kT}, \tag{59.33}$$

se obţine următoarea expresie a proiecţiei magnetizaţiei pe direcţia cîmpului (singura proiecţie nenulă), analogă cu relaţia (59.15),

$$M = N_v\, m_p\, \mathfrak{L}(a). \tag{59.34}$$

Deoarece $a \ll 1$, se obţine $\mathfrak{L}(a) \approx \frac{a}{3} = \frac{\mu_0 m_p}{3kT} H_0$; ţinînd seamă însă de relaţiile (59.21), deoarece $M \ll H$, rezultă pentru legea magnetizaţiei temporare relaţia

$$\mathbf{M} \simeq \frac{\mu_0 N_v m_p^2}{3kT}\mathbf{H}, \tag{59.35}$$

din care se obţine expresia *susceptivităţii paramagnetice*

$$\chi_{mp} = \frac{\mu_0 N_v m_p^2}{3kT} = \frac{C}{T} > 0, \tag{59.36}$$

care e acum pozitivă (în opoziţie cu χ_{md}).

Din această expresie rezultă că susceptivitatea de natură paramagnetică depinde de temperatură, fiind invers proporţională cu temperatura absolută la densitate invariabilă (legea lui Curie).

Mărimea

$$C = \frac{\mu_0 N_v m_p^2}{3kT} \tag{59.37}$$

se mai numeşte *constanta lui Curie* (şi se raportează de obicei la un mol de substanţă).

Dacă se ţine seama şi de efectul diamagnetic se obţine susceptivitatea magnetică totală.

$$\chi_m = \chi_{md} + \chi_{mp} = \frac{\mu_0 N_v m_p^2}{3kT} - \frac{\mu_0 N_v q_0^2}{4m_0}\sum_{k=1}^{s} \overline{l^{k2} \sin^2 \theta^k}^{t}. \tag{59.38}$$

59.3. Teoria clasică a feromagnetismului (teoria lui Weiss)

Proprietățile corpurilor feromagnetice au fost expuse în vol. I, par. 23.2. S-a arătat că, după teoria lui Weiss, un corp feromagnetic e constituit din mici *domenii* (de dimensiuni accesibile cercetării cu microscopul, deci, care conțin un număr enorm de molecule), magnetizate la saturație fiecare în parte. *Magnetizația spontană a domeniilor e un efect cuantic și nu poate fi complet explicat în cadrul fizicii clasice.* Domeniile sînt însă orientate dezordonat în lipsa unui cîmp magnetic stabilit din exterior, din cauza agitației termice, astfel că magnetizația globală a corpului este nulă. Un cîmp magnetic stabilit din exterior tinde să orienteze domeniile în sensul intensității sale, acestei acțiuni opunîndu-i-se aceea a agitației termice. În cîmpuri magnetice suficient de intense se ajunge la saturație, cînd toate domeniile au momentele magnetice orientate în sensul cîmpului magnetic și cînd magnetizația corpului, practic, nu mai crește la mărirea cîmpului (în realitate ea crește totuși pe seama măririi momentului magnetic al domeniilor, dar acest efect e foarte slab). Pentru a da totuși o explicație magnetizării domeniilor, Weiss a considerat că magnetizarea unui domeniu e analogă aceleia a unui corp paramagnetic și poate fi studiată pe baza acelorași relații ca și paramagnetismul, *cu deosebire că la corpurile feromagnetice există un cîmp magnetic activ mult mai intens* decît ar rezulta din relația (59.19), ceea ce impune să se scrie

$$H_0 = H + KM, \tag{59.39}$$

unde constanta K se numește *constanta lui Weiss* și are valori extrem de mari, inexplicabile din punctul de vedere al fizicii clasice.

Ecuația (59.34) rămînînd valabilă

$$M = N_v m_p \,\mathfrak{L}(a) = N_v m_p \,\mathfrak{L}\left(\frac{\mu_0 m_p H_0}{kT}\right), \tag{59.40}$$

unde $\mathfrak{L}(a)$ e funcția (59.14) a lui Langevin.

Pentru a determina legea magnetizației unui domeniu, trebuie să se elimine H_0 între relațiile (59.40) și (59.39). În acest scop scriem relația (59.39) sub forma

$$M = \frac{H_0}{K} - \frac{H}{K} = \frac{1}{K}\frac{kT}{\mu_0 m_p} a - \frac{H}{K}, \tag{59.41}$$

în care am ținut seama că $a = \dfrac{\mu_0 m_p H_0}{kT}$.

Valoarea M_∞ a magnetizației obținută pentru $H_0 \to \infty$, cînd $a \to \infty$ și $\mathfrak{L}(a) \to 1$, rezultă din relația (59.40):

$$M_\infty = N_v m_p, \tag{59.42}$$

astfel că se poate scrie

$$\mathfrak{L}(a) = \operatorname{cth} a - \frac{1}{a} = \frac{M}{M_\infty}. \tag{59.43}$$

Împărţind relaţia (59.41) la $M_\infty = N_v m_p$ şi folosind notaţia (59.37) rezultă ecuaţia

$$\frac{M}{M_\infty} = \mathfrak{D}(a) = \frac{1}{K}\frac{kT}{\mu_0 N_v m_p^2}a - \frac{H}{m_p K N_v} = \frac{T}{3KC}a - \frac{H}{KN_v m_p}, \qquad (59.44)$$

care reprezintă o dreaptă (v. fig. 59.6) cu panta

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{T}{3KC} = \mathfrak{D}'(a) = \frac{kT}{\mu_0 N_v K m_p^2}. \qquad (59.45)$$

Relaţia dintre M şi H se obţine eliminînd pe a între $\mathfrak{L}(a)$ şi $\mathfrak{D}(a)$, ceea ce se realizează grafic. Punctul P obţinut prin intersectarea dreptei $\mathfrak{D}(a)$ (59.44) cu curba $\mathfrak{L}(a)$ reprezintă soluţia problemei, deoarece el dă valorile mărimii M corespunzătoare valorii date lui H (proporţional cu ordonata la origine a dreptei $\mathfrak{D}(a)$).

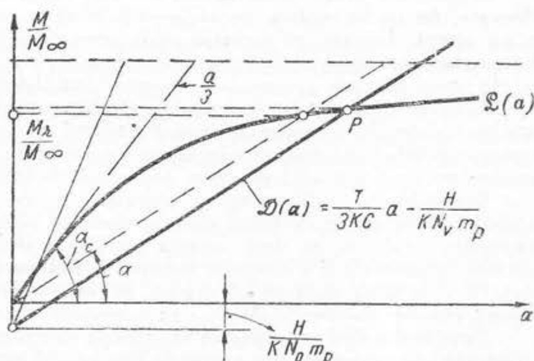


Fig. 59.6

Din această construcţie rezultă că, dacă panta dreptei $\mathfrak{D}(a)$— şi deci temperatura T — este suficient de mică, magnetizaţia variază foarte puţin cu H şi există şi pentru $H \to 0$, adică în absenţa cîmpului magnetic. Aceasta e *magnetizaţia remanentă* a domeniului, caracteristică feromagnetismului. Această proprietate nu se mai manifestă însă dacă temperatura corpului creşte peste o valoare critică T_c, numită *temperatura Curie*. În adevăr, din figura 59.6 se constată că dacă unghiul α dintre axa absciselor şi dreapta $\mathfrak{D}$ este mai mare decît unghiul α_c dintre axa absciselor şi tangenta în origine la curba $\mathfrak{L}(a)$, dreapta $\mathfrak{D}(a)$ nu mai intersectează curba $\mathfrak{L}(a)$ pentru $H = 0$ decît în origine ($M = 0$). Cum coeficientul unghiular al dreptei creşte cu temperatura, conform relaţiei (59.44), şi cum $\operatorname{tg}\alpha_c = \mathfrak{L}'(0) = \frac{1}{3}$, rezultă cu $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha_c = \frac{1}{3}$ valoarea următoare a temperaturii critice

$$T_c = \frac{\mu_0 N K m_p^2}{3k} = KC. \qquad (59.46)$$

Dincolo de temperatura Curie, materialul se comportă ca un paramagnetic obişnuit. Punînd în acest caz $\mathfrak{L}(a) \approx \frac{a}{3} = \frac{M}{M_\infty}$, rezultă din relaţiile (59.43) cu (59.44) legea de magnetizare

$$M = \frac{C}{T - T_c}H. \qquad (59.47)$$

60. ELEMENTELE DE TEORIE CUANTICĂ A UNOR PROPRIETĂŢI DE MATERIAL

60.1. Elemente de mecanică cuantică a unei particule

60.1.1. Dualitatea undă-corpuscul. În fizica microscopică clasică se consideră că există două clase de sisteme fizice: *cîmpurile electromagnetice*, care au o repartiţie continuă în spaţiu (în particular, undele electromagnetice), şi *corpurile*, care au o repartiţie discretă în spaţiu (sub formă de corpuscule). Un sistem fizic poate aparţine numai uneia dintre aceste clase, ale căror proprietăţi se exclud reciproc.

Experienţa arată însă că un acelaşi sistem fizic se comportă, în condiţiuni fizice adecvate, fie ca un sistem de corpusculi (deci ca un corp) fie ca un sistem de unde (deci ca un cîmp). În cele ce urmează vom prezenta efectul fotoelectric extern, în care cîmpul electromagnetic se comportă ca un sistem de corpuscule şi efectul difracţiei fasciculelor de electroni în care acestea se comportă ca sisteme de unde.

a) Efectul fotoelectric extern. Experienţa arată că metalele emit electroni dacă suprafaţa lor este luminată, *energia cinetică maximă a electronilor emişi fiind funcţiune liniară de frecvenţa undei electromagnetice incidente* (în particular, a luminii incidente), iar numărul electronilor emişi în unitatea de timp depinzînd de intensitatea ei.

Dependenţa de frecvenţă a energiei cinetice maxime a electronilor emişi este însă în contradicţie cu legile fizicii clasice, conform cărora ar trebui ca energia undei electromagnetice incidente, şi deci energia cinetică a electronilor emişi, să fie proporţională cu pătratul intensităţii E a cîmpului electric şi independentă de frecvenţă. Explicaţia efectului poate fi însă dată dacă se admite că, în interacţiunea ei cu corpurile, lumina — şi mai general, cîmpul electromagnetic — se comportă ca un sistem de particule.

Considerăm deci prin ipoteză că radiaţia electromagnetică e constituită, atunci cînd interacţionează cu corpurile, din particule elementare numite *fotoni*, şi notăm cu w şi p energia, respectiv impulsul unei astfel de particule. Din datele experimentale rezultă în acest caz că mărimile w şi p ale fotonilor asociaţi unei unde electromagnetice, monocromatice, de frecvenţă f şi lungime de undă λ, sînt date de următoarele expresii:

$$w = hf \tag{60.1}$$

$$p = \frac{h}{\lambda}, \tag{60.2}$$

în care h este o constantă universală, numită *cuantă de acţiune* sau *constanta lui Planck*, care are valoarea $h = 6{,}55 . 10^{-34}$ joulisecunde.

În adevăr, în aceste ipoteze, incidenţa undei electromagnetice pe suprafaţa unui corp care emite electroni e echivalentă cu ciocnirea fotonilor cu aceşti electroni. Dacă se admite, în conformitate cu experienţa, că după ciocnire energia fotonului este nulă (fotonul fiind „absorbit"), rezultă din principiul conservării energiei:

$$hf = \Phi_e + \frac{m_0(v^2 - v_0^2)}{2} = \frac{m_0 v^2}{2} + \Phi_e - \frac{m_0 v_0^2}{2}, \tag{60.3}$$

în care Φ_e e *lucrul mecanic de extracţie* a electronului, adică energia necesară pentru a scoate electronul din corp, m_0 e masa electronului, v_0 este viteza lui iniţială, iar v e viteza lui după ciocnire (după emisiune). Din relaţia (60.3), obţinută pe baza ipotezelor de mai sus, rezultă deci că energia cinetică a electronului emis e funcţiune liniară de frecvenţa undei electromagnetice incidente, aşa cum arată experienţa.

b) Difracţia electronilor. Experienţe efectuate cu fascicule de microparticule şi, în primul rînd, cu fascicule de electroni au pus în evidenţă fenomenul de difracţie caracteristic undelor. Considerăm, de exemplu, un catod incandescent C, care emite electroni acceleraţi de un anod A,

sub tensiunea U. Viteza iniţială a electronilor emişi fiind neglijabilă, viteza electronilor în dreptul anodului este (v. rel. 58.26)

$$v = \sqrt{2 \frac{q_0}{m_0} U}.$$

Anodul e perforat, astfel că un fascicul foarte îngust, cu electroni de aceeaşi viteză v (monocinetic), pătrunde în spaţiul din spatele anodului şi cade sub unghiul α pe suprafaţa plană a unui cristal K. Fasciculul reflectat e captat în camera de ionizare I, al cărui curent i, măsurat cu galvanometrul G, e proporţional cu intensitatea fasciculului reflectat.

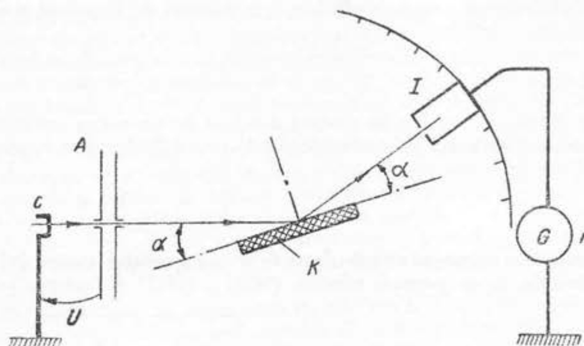


Fig. 60.1

Dacă se menţine constant unghiul α şi se variază tensiunea acceleratoare U, adică viteza v a electronilor, se constată experimental că *reflexia se produce practic numai pentru anumite viteze.* Din punct de vedere clasic, reflexia ar trebui să se producă la orice viteză a electronilor. Rezultatele experimentale se explică fără dificultăţi, dacă se consideră că reţeaua cristalină (de constantă d) acţionează ca o reţea de difracţie, iar fascicolul de electroni ca o undă, cu lungimea de undă λ. Condiţia lui Bragg, cunoscută din teoria elementară a difracţiei,

$$2d \sin \alpha = n\lambda; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{60.4}$$

arată că reflexia se produce numai pentru anumite lungimi de undă. Dacă se admite acum că electronilor de viteză v şi impuls $m_0 v = p$ le e asociată o undă cu lungimea de undă dată de relaţia

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{\sqrt{2 m_0 q_0 U}},$$

analogă cu relaţia (60.2), se constată că se obţine o bună concordanţă între valorile calculate pe această bază pentru tensiunea acceleratoare U, care asigură reflexia, şi valorile experimentale. Fasciculul de electroni prezintă deci proprietatea de difracţie ca un fascicul de unde, cu lungime de undă dată de relaţia (60.2), în funcţie de impulsul electronilor.

Fenomenul de difracţie a electronilor arată că particulele considerate drept *corpuscule* în fizica microscopică clasică se manifestă ca *unde* în anumite condiţii. Pentru a caracteriza această comportare, se asociază unui sistem de particule o anumită funcţiune de punct şi de timp, $\psi(\mathbf{r}, t)$, numită *funcţiune de undă*, a cărei formă depinde de proprietăţile mecanice ale particulei, astfel cum se va arăta mai departe. Mecanica microobiectelor care utilizează această funcţiune de undă se numeşte *mecanică ondulatorie* şi e una din modalităţile de prezentare ale *mecanicii cuantice.*

Din cele două experienţe prezentate mai sus rezultă că atît cîmpul electromagnetic cît şi sistemele de corpuscule au comportări duale, de cîmp sau de corpuri, în funcţie de condiţiile fizice în care se găsesc. Această dualitate, numită *dualitatea undă-corpuscul*, este în contradicţie cu legile fizicii clasice şi ea a determinat, în principal, constituirea fizicii cuantice.

60.1.2. **Funcţiunea de undă a unei particule.** Considerăm mai întîi o particulă liberă a cărei energie potenţială este constantă, adică nu depinde de coordonatele spaţiale şi de timp (şi poate fi deci anulată prin alegerea adecvată a nivelului de referinţă). Caracterizarea stării unei astfel de particule se face, în mecanica cuantică, cu ajutorul unei unde plane armonice complexe, funcţiunea de undă $\psi(\mathbf{r}, t)$, asociată particulei în felul următor: se postulează că frecvenţa f a undei e determinată de energia w a particulei, conform relaţiei (60.1)

$$f = \frac{w}{h},$$

şi că lungimea sa de undă λ e determinată de impulsul p al particulei, conform relaţiei (60.2):

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Se foloseşte, aşadar, la această asociere un procedeu reciproc aceluia folosit la introducerea mărimilor fotonului prin relaţiile (60.1) şi (60.2). Dacă se notează

$$k = |\mathbf{k}| = \frac{1}{\lambda}, \qquad (60.5)$$

unde k se numeşte *număr de unde* şi este modulul vectorului de undă $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_b$, orientat local în direcţia de propagare, relaţiile (60.1) şi (60.2) se mai pot scrie şi sub forma

$$w = hf = \frac{h}{2\pi}\,\omega \qquad (60.6)$$

$$\mathbf{p} = h\mathbf{k} = \frac{h}{2\pi}\,\beta\,\mathbf{u}_k \qquad (60.7)$$

şi ele sînt asociate microobiectului considerat (particulei libere), indiferent de faptul că el e considerat în fizica clasică drept corpuscul (căruia i se asociază în mecanica cuantică o undă), sau drept undă (căreia i se asociază în mecanica cuantică un corpuscul).

Expresia în mărimi instantanee a unei unde plane care se propagă în sensul unei axe Ox (v. şi Unda electromagnetică plană, vol. I, par. 29.3), în cazul unei variaţii sinusoidale armonice se poate scrie sub forma

$$f(x, t) = A \sin(\beta x - \omega t + \alpha),$$

sau, dacă se introduce mărimea k în locul constantei de fază $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi k$,

$$f(x,t) = A \sin(2\pi k\, x - \omega t + \alpha).$$

Forma complexă corespunzătoare este

$$\underline{f} = \underline{A}\, e^{-j(\omega t - 2\pi kx)} \quad (\text{cu } \underline{A} = A\, e^{j\alpha}).$$

Deoarece prin ipoteză unei particule libere i se asociază o undă plană armonică complexă, expresia acestei unde $\psi(\mathbf{r}, t)$ va fi prin analogie

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 e^{-j(\omega t - 2\pi \mathbf{kr})}\ ^1 \qquad (60.8)$$

dacă direcţia de propagare a undei e oarecare, sau

$$\psi(x,t) = \Psi_0\, e^{-j(\omega t - 2\pi kx)} \qquad (60.8')$$

dacă unda se propagă în sensul axei Ox. Amplitudinea Ψ_0 a undei este în general o mărime complexă, deoarece faza iniţială a undei poate să nu fie nulă. Pulsaţia ω şi numărul de unde k sînt determinate de energia w a particulei şi de impulsul ei p, conform relaţiilor (60.6) şi (60.7). Înlocuind cu relaţiile (60.6) şi (60.7), mărimile ω şi $\mathbf{k}$ din relaţia (60.8) se obţine pentru funcţiunea de undă a particulei libere expresia

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0\, e^{-j\frac{2\pi}{h}(wt - \mathbf{pr})} \qquad (j = \sqrt{-1}). \qquad (60.9)$$

---

[1] În acest capitol nu vom mai sublinia mărimile complexe — în acord cu notaţia obişnuită din lucrările de fizică atomică. De altfel, funcţiunea de undă nu e „reprezentarea" în complex a vreunei funcţiuni „instantanee" reale.

Dacă particula nu este liberă, ci se găsește într-un cîmp de forțe cu energie potențială $U(\mathbf{r})$, starea ei e caracterizabilă din punct de vedere cuantic printr-o funcțiune de undă complexă $\psi(\mathbf{r}, t)$ cu o expresie mai complicată. În toate cazurile interpretarea ei experimentală e următoarea : *intensitatea undei într-un punct dat, adică pătratul modulului ei* $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \psi(\mathbf{r}, t)\, \psi^*(\mathbf{r}, t)$, *e în fiecare moment proporțională cu probabilitatea de a găsi particula în acel moment în vecinătatea punctului considerat.*

Rezultă că funcțiunea de undă are în fizica cuantică o interpretare statistică. Din punctul de vedere experimental, funcțiunea de undă caracterizează în sens clasic starea unui ansamblu format din foarte multe particule identice; pentru o singură particulă ea determină numai probabilitatea de realizare a unor anumite valori ale coordonatelor ei de poziție.

În cazul particulei libere, funcțiunea de undă are aceeași intensitate în orice punct din spațiu $|\psi|^2 = |\Psi_0|^2$, ceea ce arată că particula liberă poate fi găsită oriunde în spațiu cu egală probabilitate.

Ținînd seama de interpretarea dată funcțiunii ψ, experiența de mai sus a difracției electronilor are următoarea explicație : mișcarea electronilor spre cristalul K este caracterizată prin propagarea, în aceeași direcție, a undei plane ψ asociate care, la „trecerea" prin cristal, suferă o difracție, în sensul clasic, și prezintă deci în diferitele orientări din spațiu maxime și minime; conform interpretării de mai sus a funcțiunii de undă rezultă că prezența electronilor în fasciculul difractat e mai probabilă în punctele în care pătratul modulului funcțiunii ψ prezintă maxime și mai puțin probabilă în celelalte, prezența electronilor fiind însă posibilă în orice punct în care funcțiunea de undă e nenulă.

În cadrul *interpretării statistice a funcțiunii de undă*, probabilitatea elementară $d\mathfrak{P}$ ca o particulă să se găsească într-un element de volum dv, de rază vectoare $\mathbf{r}$, la un moment t are expresia

$$d\mathfrak{P} = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2\, dv = \psi^*(\mathbf{r}, t)\, \psi(\mathbf{r}, t)\, dv \equiv \psi^*\, \psi\, dv. \tag{60.10}$$

Cum interpretarea statistică nu se schimbă dacă funcțiunea de undă se înmulțește cu o constantă, un astfel de factor constant nu modifică starea caracterizată prin funcțiunea de undă. Această constantă arbitrară se determină prin condiția de normare a probabilităților :

$$\int d\mathfrak{P} = \iiint \psi^*\, \psi\, dv = \iiint |\psi|^2\, dv = 1. \tag{60.11}$$

Din interpretarea ei fizică rezultă că funcțiunea de undă trebuie să mai satisfacă, în afară de condiția de normare, și alte condiții, în primul rînd acelea de *uniformitate, continuitate* și *mărginire*, numite *condiții standard*, în întregul domeniu de variație a variabilelor de care ea depinde.

60.1.3. Ecuația lui Schrödinger, pentru o particulă. Funcțiunea de undă $\psi(\mathbf{r}, t)$ a unei particule de masă m, situate într-un cîmp de forțe de energie potențială $U(\mathbf{r})$, satisface o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea, care se numește *ecuația lui Schrödinger pentru valorile instantanee ale funcțiunii de undă* sau *ecuația lui Schrödinger pentru stările nestaționare* :

$$\boxed{-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi + U\psi = -\frac{h}{2\pi \mathrm{j}}\frac{\partial\psi}{\partial t}}, \quad (\mathrm{j} = \sqrt{-1}) \tag{60.12}$$

unde

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

Funcțiunea ψ rezultă, în general, din ecuația (60.12) și se poate verifica simplu, că, pentru cazul particular al particulei libere, ea este o undă plană. Ecuația, fiind omogenă, determină funcțiunea pînă la o constantă arbitrară, care se poate preciza prin condiția de normare (60.11).

Ecuația (60.12) este ecuația de bază a mecanicii cuantice nerelativiste, așa cum ecuația $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\,\mathbf{v})$ e ecuația de bază a mecanicii clasice — și experiența a confirmat toate conse-

cinţele acestei ecuaţii în măsura în care nu apare ca necesară luarea în considerare a efectelor prevăzute de teoria relativităţii.

Principala problemă rezolvată cu ajutorul mecanicii cuantice a fost determinarea configuraţiilor staţionare din punct de vedere statistic (cum sînt atomii, moleculele etc. în condiţii exterioare invariabile). Pentru ca funcţiunea de undă să caracterizeze o stare staţionară din punct de vedere statistic, trebuie ca probabilitatea (60.10) să nu depindă de timp, şi deci modulul funcţiunii de undă să nu depindă de timp. Dacă se caută soluţii ale ecuaţiei lui Schrödinger (60.12), sub forma unui produs cu variabile separate,

$$\psi(\mathbf{r},t) = \Psi(\mathbf{r})\,\Theta(t),$$

se obţine pentru factorul temporal $\theta(t)$ expresia

$$\theta(t) = e^{-j\frac{2\pi}{h}at}, \qquad (\text{alegînd } \theta(0) = 1)$$

oricare ar fi factorul spaţial $\Psi(\mathbf{r})$, unde a e o constantă. Funcţiunea de undă corespunzătoare se poate deci scrie $\psi(\mathbf{r},t) = \Psi(\mathbf{r})e^{-j\frac{2\pi}{h}at}$. Comparînd această expresie cu expresia (60.9) a funcţiunii de undă a particulei libere se observă că această constantă e chiar energia totală a particulei : $a = w$. Funcţiunea de undă cu variabile separate are deci forma

$$\psi(\mathbf{r},t) = \Psi(\mathbf{r})\,e^{-j\frac{2\pi}{h}wt}, \tag{60.13}$$

în care se admite că w reprezintă energia totală a particulei. Se observă că modulul acestei expresii e egal cu modulul factorului spaţial $\Psi(\mathbf{r})$, adică *e independent de timp*. Funcţiunea de undă de forma relaţiei (60.13) caracterizează deci o stare staţionară din punct de vedere statistic. Substituind această expresie în ecuaţia (60.12), se obţine pentru $\Psi(\mathbf{r})$ ecuaţia

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\Psi + U\Psi = w\Psi, \tag{60.14}$$

numită *ecuaţia lui Schrödinger pentru stările staţionare* sau *ecuaţia spaţială a lui Schrödinger*.

Funcţiunea $\Psi(\mathbf{r})$ e *funcţiunea de undă spaţială* caracteristică stărilor staţionare ale particulei şi are aceeaşi interpretare fizică ca şi funcţiunea $\psi(\mathbf{r},t)$ deoarece $\psi^*\psi = \Psi^*\Psi$. Ea satisface deci şi condiţia de normare

$$\iiint \Psi^*\Psi\,dv = \iiint |\Psi|^2\,dv = 1, \tag{60.15}$$

precum şi condiţiile standard : continuitate, uniformitate şi mărginire.

Ecuaţia (60.14) nu are în general soluţii nenule care să satisfacă condiţiile standard, decît pentru anumite valori reale, w_k, ale parametrului w, numite *valorile proprii* ale energiei.

Funcţiunile de undă spaţiale corespunzătoare care satisfac condiţiile standard şi sînt soluţii ale ecuaţiei (60.14) pentru $w = w_k$ se mai numesc şi *funcţiuni proprii* ale problemei. În mecanica cuantică se admite — ca un postulat fundamental — că valorile proprii ale unei mărimi (şi în particular ale energiei) sînt singurele valori accesibile măsurării mărimii sau — cum se mai spune — *valorile permise ale mărimii*. Dacă valorile proprii ale unei mărimi pot fi egale cu orice număr real cuprins într-un anumit interval, se spune că mărimea are un *spectru continuu de valori* în acel interval, iar dacă ele formează un şir discret într-un interval anumit, se spune că mărimea are un *spectru discret de valori* în acel interval. Valorile permise ale energiei definesc aşa-numitele *nivele de energie* ale particulei.

Uneori, unei valori proprii a energiei particulei (unui anumit nivel de energie) îi corespund mai multe funcţiuni de undă spaţiale distincte. Se spune că stările particulei, definite de astfel de funcţiuni, sînt *degenerate*. Numărul de funcţiuni de undă distincte care corespund aceleeaşi

valori proprii a energiei se numeşte ordinul degenerării. Se mai spune că nivelul de energie definit de această valoare proprie e un nivel degenerat de ordinul respectiv.

Funcţiilor de undă li se aplică un principiu fundamental, numit *principiul superpoziţiei din mecanica cuantică*, şi care se enunţă în felul următor: dacă o particulă se poate găsi în una din stările caracterizate de funcţiunile de undă distincte $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$, atunci ea se poate găsi şi în starea caracterizată de o funcţiune de undă ψ, care reprezintă o combinaţie lineară a acestora:

$$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + ... + c_n \psi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \tag{60.16}$$

(eventual $n = \infty$)

Dacă ψ_k sînt funcţiunile de undă ale unor stări staţionare, de forma relaţiei (60.13), funcţiunea ψ din membrul sting al relaţiei (60.16) corespunde, în general, unei stări nestaţionare a particulei.

Principiul superpoziţiei constituie un postulat al mecanicii cuantice, şi alături de ecuaţia lui Schrödinger stă la baza acestei mecanici.

Energia particulei are valori bine determinate, w_k, numai în stările cuantic staţionare definite de funcţiunile de undă $\psi_k = \Psi_k e^{-j\frac{2\pi}{h} w_k t}$, aceste valori fiind egale cu valorile proprii corespunzătoare. Energia particulei nu este însă bine determinată în starea cuantică definită de o funcţiune de undă ψ, obţinută prin suprapunerea unor funcţiuni de undă corespunzătoare unor stări staţionare, cu relaţia (60.16), deoarece această relaţie nu poate fi adusă la forma (60.13); mai general, energia nu este bine determinată în stările ale căror funcţiuni de undă sînt soluţii ale ecuaţiei nestaţionare a lui Schrödinger, dar nu sînt soluţii ale ecuaţiei staţionare. Acest fapt e inexplicabil în cadrul mecanicii clasice, în care particula trebuie să aibă valori bine determinate ale energiei în orice stare a ei. În cadrul mecanicii cuantice, interpretarea acestui rezultat este următoarea: într-o eventuală măsurătoare, energia particulei va rezulta egală cu una dintre valorile proprii corespunzătoare uneia dintre funcţiunile de undă $\psi_1, ..., \psi_n$, — acestea fiind singurele valor măsurabile ale energiei. Nu se poate însă preciza anticipat care va fi valoarea proprie a energiei care va fi dată de măsurare; se poate numai indica probabilitatea de a măsura o valoare oarecaire w_k, această probabilitate fiind proporţională cu pătratul $|c_k|^2$ al modulului coeficientului funcţiunii ψ_k din expresia (60.16). În consecinţă se pot determina, cu ajutorul funcţiunii ψ, pe baza interpretării ei fizice, valorile permise ale energiei particulei, precum şi probabilitatea realizării acestor valori; se mai poate însă determina şi valoarea medie $\tilde{w}$ a energiei într-o stare oarecare, dacă se utilizează formula mediei statistice (v. şi 60.10)

$$\tilde{w} = \int w \, d\mathfrak{P} = \iiint w \, \psi^* \psi \, dv = \iiint \psi^* w \psi \, dv. \tag{60.17}$$

Această relaţie e valabilă — în particular — şi pentru stările staţionare, în care w este egală cu valorile proprii (bine determinate) ale energiei particulei în acele stări.

Valoarea medie a energiei se poate exprima şi printr-o expresie în care se foloseşte ecuaţia (60.14) a lui Schrödinger. Integrăm în acest scop ecuaţia (60.14) în întregul domeniu de variaţie a variabilelor, după înmulţirea ei cu Ψ^*, şi obţinem:

$$\iiint \Psi^* \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta\Psi + U\Psi \right] dv = \iiint \Psi^* w \, \Psi \, dv.$$

Cu relaţia (60.17) rezultă expresia

$$\tilde{w} = \iiint \Psi^* \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta\Psi + U\Psi \right] dv, \tag{60.18}$$

în care parametrul w nu mai apare.

Integralele (60.11, 60.15, 60.17, 60,18) se iau asupra întregului domeniu de variaţie al coordonatelor particulei.

60.2. Sisteme de particule

Se spune că un ansamblu de particule constituie un sistem de particule, dacă între acestea există o interacţiune care practic nu poate fi neglijată.

Stările unui astfel de sistem de N particule sînt descrise cu ajutorul unei funcţiuni de undă globale, ψ_s, care depinde simultan de coordonatele tuturor particulelor şi de timp :

$$\psi_s = \psi_s\,(x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N, t)$$

sau, folosind notaţii mai simple :

$$\psi_s = \psi_s\,(x_i, y_i, z_i, t),$$

sau

$$\psi_s = \psi_s\,(\mathbf{r}_i, t).$$

Cele arătate în paragraful 60.1 în legătură cu funcţiunea de undă asociată unei particule se menţin şi pentru funcţiunea de undă asociată unui sistem de particule. Astfel, de exemplu, stările staţionare sînt determinate de funcţiunea spaţială $\psi_s = \psi_s\,(\mathbf{r}_i)$, care intră în relaţia $\psi_s\,(\mathbf{r}_i, t) = \Psi_s\,(\mathbf{r}_i)\, e^{-j\frac{2\pi}{h} w_s t}$.

Interpretarea fizică a funcţiunii de undă ψ_s asociată unui sistem de particule este următoarea : intensitatea ei $|\,\psi_s\,|^2 = \psi_s^*\,\psi_s$ e proporţională cu probabilitatea de prezenţă la un moment dat a particulei 1 în vecinătatea punctului dat M_1 (x_1, y_1, z_1), a particulei 2 în vecinătatea punctului dat M_2 (x_2, y_2, z_2), ... , a particulei N în vecinătatea punctului dat M_N (x_N, y_N, z_N). Deci, funcţiunea ψ_s e asociată întregului sistem de particule şi nu se poate asocia, în cazul general, fiecărei particule cîte o funcţiune de undă proprie ei.

Ecuaţia lui Schrödinger pentru stările staţionare, satisfăcută de funcţiunea de undă spaţială asociată sistemului de particule, are forma următoare :

$$\sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m_i}\left(\frac{\partial^2\Psi_s}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2\Psi_s}{\partial y_i^2}+\frac{\partial^2\Psi_s}{\partial z_i^2}\right)\right]+U_s\,\Psi_s = w_s\,\Psi_s, \tag{60.19}$$

în care U_s reprezintă energia potenţială a sistemului, iar w_s e valoarea proprie a energiei lui, totale.

În cele ce urmează ne vom ocupa în special de *sistemele de electroni* şi prezentăm numai cîteva rezultate privitoare la studiul cuantic al acestor sisteme. Din teoria atomului de hidrogen, cel mai simplu atom, deoarece are un singur electron, rezultă că funcţiunile de undă spaţiale care descriu stările staţionare ale electronului depind de patru indici numerici, numiţi *numere cuantice*, ale căror şiruri de valori permit determinarea şirurilor de valori (cuantificate) ale energiei, momentului cinetic, momentului magnetic orbital şi momentului magnetic de spin (sau propriu) ale electronului. Aceste numere se numesc *numărul cuantic principal*, n, *numărul cuantic secundar*, l, *numărul cuantic magnetic*, m_l şi *numărul cuantic de spin*, m_s. Ansamblul primelor trei numere cuantice, — n, l şi m_l —, defineşte *starea orbitală* a electronului din atom (similară, în anumite condiţiuni, stării pe care ar avea-o electronul din punctul de vedere al mecanicii clasice în atom), iar ansamblul celor patru numere cuantice defineşte *starea cuantică* a electronului. Deoarece numărul cuantic de spin are numai două valori posibile, rezultă că unei stări orbitale date (cînd deci n, l şi m_l au valori date) îi corespund două stări cuantice distincte, determinate de valorile numărului m_s. Deoarece valorile proprii ale energiei atomului de hidrogen depind numai de numărul cuantic principal n, toate stările cu acelaşi n au aceeaşi energie. Nivelurile de energie sînt deci puternic degenerate.

Sistemelor de electroni — mai general sistemelor de particule identice *care au spin semi-întreg* (adică al căror moment cinetic de spin, exprimat în unităţi $\frac{h}{2\pi}$ este impar) — li se aplică *principiul de excluziune* al lui Pauli, conform căruia într-o stare cuantică dată se poate găsi cel mult un singur electron. Rezultă deci că într-o stare orbitală dată se pot găsi cel mult doi electroni, care trebuie să aibă spinii diferiţi.

Într-un atom izolat cu mai mulţi electroni, care formează un sistem căruia i se aplică principiul de excluziune, energia unuia dintre electroni depinde, în general, de primele trei numere cuantice, astfel că electronii aflaţi într-o aceeaşi stare orbitală au energii diferite. Nivelurile de energie ale sistemului sînt în general degenerate, deoarece corespund la cîte două stări cuantice, pe care le pot avea numai doi electroni diferiţi prin spin.

Să considerăm doi atomi ai unui corp, situaţi la distanţă mare unul de altul (cum şi de alţi atomi), astfel că electronii fiecăruia dintre atomi nu interacţionează practic cu electronii celuilalt. În acest caz, nivelurile de energie ale unuia din atomi se pot reprezenta ca în figura 60.2 şi sînt ocupate fiecare de cel mult doi electroni. Dacă atomii se apropie, interacţiunea



Fig. 60.2

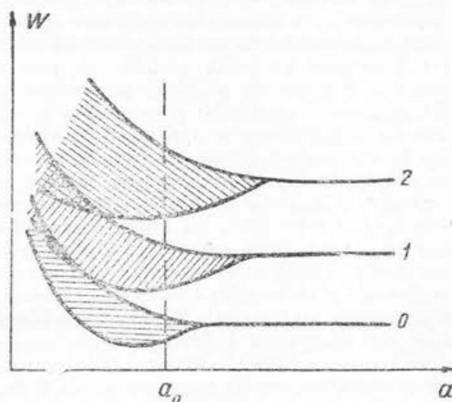


Fig. 60.3

electronilor nu mai poate fi neglijată şi, conform principiului de excluziune, perechile omologe de electroni, care în atomii izolaţi se găseau pe niveluri egale de energie (fiecare pereche în atomul căruia îi aparţine), trebuie să se găsească, în noile condiţiuni, pe niveluri de energie diferite. Acest lucru e posibil deoarece (la apropierea atomilor) nivelurile de energie din atomul izolat se „despică" în două niveluri, în sensul că fiecăruia dintre nivelurile de energie ale atomului izolat îi corespund două niveluri în sistemul compus din doi atomi. Mai general, dacă se consideră N atomi, ca aceia cari formează, de exemplu, un cristal al unui corp solid, nivelurile de energie ale unuia dintre atomi, din starea izolată a acestuia, se despică în N niveluri distincte, dacă cei N atomi sînt suficient de apropiaţi. Din nivelurile de energie ale atomului izolat se formează deci „benzi", care se lărgesc şi care se pot întrepătrunde pe măsură ce distanţa dintre atomi se micşorează, astfel cum se arată în figura 60.3, în care prin a s-a notat distanţa dintre doi atomi vecini ai cristalului.

Aceste benzi se numesc *benzi permise de energie* ale cristalului sau *zone permise de energie*, deoarece nivelurile de energie care le constituie *pot fi* ocupate de electroni. Zonele care separă una de alta benzile permise se numesc *zone* sau *benzi de energie interzise*, deoarece electronii din atom nu pot avea nici o valoare a energiei cuprinsă în interiorul acestora. Benzile permise şi cele interzise de energie prezintă importanţă pentru explicarea fenomenului de conducţie electrică în cadrul *teoriei zonelor* din fizica solidului, prezentată simplificat în paragraful următor.

60.3. Benzile permise de energie într-un cristal unidimensional

În starea cristalină, structura corpurilor prezintă simetrie și studiul proprietăților lor se face cu mai puține dificultăți matematice. Corpul cristalizat poate fi format dintr-un singur cristal de dimensiuni relativ mari (corp monocristalin) sau dintr-un număr mare de cristale foarte mici, dispuse mai mult sau mai puțin ordonat (corp policristalin). Majoritatea materialelor conductoare și semiconductoare utilizate în aplicații (cum sînt de ex. metalele) au o structură policristalină. Mai departe vom considera numai cazul ideal al unui corp avînd cristalele dispuse strict ordonat, astfel ca parametrii care îi determină proprietățile să prezinte o variație periodică, într-o direcție arbitrară din corp, cu perioada egală cu dimensiunea liniară a unui cristal după acea direcție. Vom mai considera cristalul ca fiind format prin juxtapunerea periodică a unei celule de formă regulată, ale cărui vîrfuri, constituind nodurile rețelei cristaline, sînt ocupate de atomii (ionii) constituenți ai corpului. Studiul proprietăților fundamentale ale unui cristal se poate face simplificat pe un *model unidimensional*, în care cristalul e un șir rectiliniu, periodic de noduri în lungul căruia se ia axa Ox (fig. 60.4). Generalizarea rezultatelor astfel obținute la un cristal tridimensional se poate face ulterior.

Electronii unui cristal al corpului solid formează un sistem de particule identice, căruia i se aplică principiul de excluziune al lui Pauli, deoarece distanța dintre atomii vecini ai cristalului este egală aproximativ cu dimensiunile liniare ale atomului (circa 10^{-8}cm), și deci interacțiunea electronilor dintr-un același cristal nu poate fi neglijată. În schimb se poate neglija interacțiunea dintre electronii care aparțin unor cristale diferite.

Starea sistemului de particule dintr-un cristal se determină, așa cum s-a arătat mai sus, printr-o funcțiune de undă globală ψ_s care satisface ecuația (60.19). În această ecuație, mărimea U_s depinde de coordonatele tuturor particulelor și nu este aditivă, astfel că nu e posibilă separarea variabilelor și integrarea pe această cale, în cazul general. Calculele se pot însă efectua folosindu-se o aproximație (numită aproximația cîmpului selfconsistent), care consistă în a considera fiecare electron ca o particulă care se mișcă într-un cîmp de forțe de energie potențială $U(x)$ dată, corespunzătoare mediei (în timp) $V(x)$ a potențialului electric local stabilit, în punctul în care se află electronul considerat, de toate nucleele și de toți ceilalți electroni ai cristalului. Cu ajutorul acestui artificiu se poate asocia unui singur electron (arbitrar ales) o funcțiune de undă ψ proprie lui. Metoda aceasta poate fi folosită numai dacă valoarea medie în timp a potențialului electric nu diferă prea mult de valorile sale instantanee, ceea ce implică o interacțiune nu prea puternică a electronilor. Se consideră de asemenea că nucleele atomilor sînt imobile (ipoteză simplificatoare justificată de faptul că masa nucleului este mult mai mare decît a electronului).

Din motive de simetrie, mărimea $V(x)$ este o funcțiune periodică de x, prezentînd maxime în dreptul nodurilor rețelei cristaline ocupate de ionii pozitivi și avînd perioada egală cu distanța a dintre nucleele vecine (fig. 60.4). În consecință și energia potențială $U(x)$, care are expresia

$$U(x) = -q_0 V(x),$$

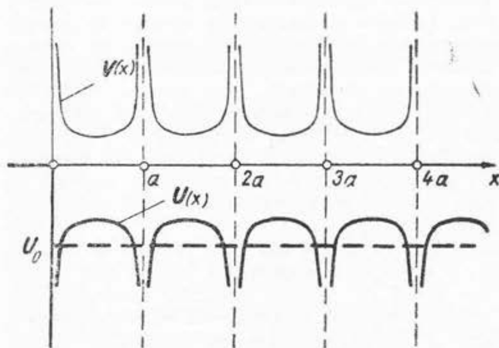


Fig. 60.4

unde $-q_0$ este sarcina electrică a electronului, variază periodic în funcțiune de x, fiind minimă în dreptul nodurilor și avînd perioada egală de asemenea cu a. Funcțiunea $U(x)$ reprezentată în figura 60.4 este pară și poate fi deci dezvoltată în serie Fourier (în cosinus):

$$U(x) = U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \cos\frac{2\pi i x}{a}. \qquad (60.20)$$

Funcțiunea de undă ψ asociată unui electron din cristal permite să se descrie din punct de vedere ondulatoriu mișcarea acestuia de-a lungul axei Ox: deplasării electronului îi corespunde propagarea, în același sens, a funcțiunii de undă prin cristal.

Rezolvarea riguroasă a problemei determinării funcţiilor de undă asociabile stărilor unui electron care se găseşte într-un cîmp periodic cu energia potenţială (60.20) adică rezolvarea ecuaţiei (60.14) a lui Schrödinger în aceste condiţii e relativ complicată şi necesită cunoştinţe sistematice de mecanică cuantică. expuse în tratate de specialitate [1].

În cele ce urmează vom trata această problemă numai aproximativ, cu scopul de a obţine rezultate corecte din punctul de vedere calitativ, care să uşureze înţelegerea proprietăţilor privitoare la conducţia electrică în solide (cristale). Vom folosi în acest scop analogii intuitive cu propagarea undelor electromagnetice prin cristale. Teoria acestei propagări arată că undele sînt reflectate de reţeaua cristalină dacă e satisfăcută următoarea relaţie (o formă particulară a relaţiei lui Bragg — 60.4, cînd $\alpha = \frac{\pi}{2}$):

$$2a = \pm n\lambda \qquad (n = 1.2,3,...), \tag{60.21}$$

în care λ e lungimea de undă, iar a constanta reţelei (distanţa dintre nodurile cristaline vecine); dacă relaţia (60.21) nu e satisfăcută, undele se propagă practic neperturbate în cristal, adică ele nu sînt reflectate de acesta.

Aceste consideraţii fiind valabile şi pentru unda ataşată electronului, rezultă că mişcarea electronului în cristal e practic perturbată de reţea — adică el se ciocneşte, în sens clasic, cu ionii din nodurile reţelei cristaline — dacă impulsul său p, respectiv numărul de unde k, satisfac condiţiile

$$\left.\begin{aligned} p &= \pm n \frac{h}{2a} \\ k &= \pm n \frac{1}{2a} \end{aligned}\right\} \qquad (n = 1,2,3,...) \tag{60.22}$$

deduse din relaţia (60.21), cu $\frac{1}{\lambda} = k = \frac{p}{h}$.

Cînd condiţiile (60.22) nu sînt satisfăcute, mişcarea electronului e practic neperturbată şi el poate fi asimilat unei particule libere; cînd condiţiile (60.22) sînt satisfăcute, mişcarea e puternic perturbată. Vom considera separat aceste două cazuri.

a) Electronul are o mişcare practic neperturbată de reţea, deoarece

$$k \neq n \frac{1}{2a}. \qquad (n = \pm 1, \pm 2,...) \tag{60.23}$$

În acest caz, pentru a neglija influenţa reţelei, energia potenţială trebuie considerată constantă : $U \approx U_0$. Ecuaţia (60.14) devine

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + U_0\Psi = w\Psi \tag{60.24}$$

sau

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2}(w - U_0)\Psi$$

sau încă

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{h^2}p^2\Psi = -4\pi^2 k^2\Psi, \tag{60.25}$$

[1] v. D. Blohinţev, *Bazele mecanicii cuantice*, Ed. tehnică, 1956.

deoarece energia particulei libere este

$$w = \frac{p^2}{2m} + U_0 = \frac{h^2}{2m} k^2 + U_0 \qquad (60.26)$$

unde $p = hk$ e impulsul, iar k numărul de unde. Ecuația (60.25) are soluția generală

$$\Psi(x) = A' e^{j2\pi kx} + A'' e^{-j2\pi kx}, \qquad (60.27)$$

care consistă din suprapunerea soluțiilor particulare

$$\Psi'(x) = A' e^{j2\pi kx} = A' e^{j\frac{2\pi p}{h}x} \qquad (60.28)$$

și

$$\Psi''(x) = A'' e^{-j2\pi kx} = A'' e^{-j\frac{2\pi p}{h}x}. \qquad (60.29)$$

Comparînd aceste expresii cu expresia (60.9) — care mai conține și factorul temporal $e^{-j\frac{2\pi}{h}wt}$, absent în funcțiunile de undă spațiale $\Psi(x)$, rezultă că funcțiunea (60.28) reprezintă o undă plană progresivă directă, asociabilă unei particule libere care se mișcă în sensul pozitiv al axei x; iar funcțiunea (60.29) reprezintă o undă plană progresivă inversă asociabilă unei particule libere care se mișcă în sensul negativ al axei x. Se obține așadar funcțiunea de undă căutată a unei particule libere în mișcare *neperturbată* prin cristal, dacă se reține numai unul dintre termenii soluției generale (60.27), de exemplu soluția (60.28), pentru a avea o undă progresivă. Dînd lui k toate valorile posibile — pozitive sau negative — compatibile cu (60.23) (și cu dimensiunile finite ale cristalului, de care pînă acum nu am ținut seama avînd în vedere numărul N extrem de mare al atomilor din cristal), se obține toate stările electronilor cu mișcare neperturbată. Energia asociată acestor stări e dată de relația (60.26).

b) Electronul are o mișcare puternic perturbată de rețea, deoarece

$$k = n \frac{1}{2a}. \qquad (n = \pm 1, \pm 2, ...) \qquad (60.30)$$

În acest caz trebuie să se opereze cu întreaga expresie (60.20) a energiei potențiale și ecuația lui Schrödinger, pentru stări staționare (60.14) devine (în transcriere unidimensională):

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left(U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \cos\frac{2\pi i x}{a}\right)\Psi = w\Psi. \qquad (60.31)$$

Aceasta este o ecuație diferențială liniară cu coeficienți variabili (de tip parametric), a cărei integrare e complicată. Dacă ne limităm numai la determinarea valorilor permise ale energiei w, corespunzătoare valorilor (60.30), ne putem mulțumi cu o expresie aproximativă a funcțiunii de undă, cu ajutorul căreia se poate determina energia, folosind relația (60.18). O astfel de expresie aproximativă poate fi stabilită pe considerente fizice, ținînd seama de analogia menționată de la început, cu propagarea undelor electromagnetice prin cristale [1]. Se admite anume că efectul principal al perturbației mișcării libere a electronului provine din apariția unei unde inverse, reflectate, de forma (60.29), alături de unda directă (60.28) a mișcării libere, — și anume astfel încît prin suprapunere să rezulte o undă staționară, în care caz propagarea (adică mișcarea electronului) e complet anihilată. Aceasta înseamnă că funcțiile de undă

[1] v. V. Sergiescu, *Introducere în fizica solidului*, Ed. tehnică, 1959.

ale mişcării perturbate sînt aproximate prin soluţii de forma relaţiei (60.27) ale ecuaţiei mişcării neperturbate, cu coeficienţi aleşi astfel încît să exprime unde staţionare, iar densitatea de probabilitate $|\Psi|^2$ să fie o funcţiune pară de x (în acord cu simetria problemei). Există numai două combinaţii liniare independente care satisfac condiţiile cerute şi anume funcţiunile reale.

$$\Psi_1 = A_1 \cos 2\pi k x \tag{60.32}$$

$$\Psi_2 = A_2 \sin 2\pi k x. \tag{60.33}$$

Amplitudinile A_1 şi A_2 se determină cu ajutorul condiţiei de normare (60.11) în care integrarea se face pe întregul cristal unidimensional cu N atomi. Se obţine

$$1 = \int_0^{Na} |\Psi_1|^2 \mathrm{d}x = A_1^2 \int_0^{Na} \cos^2 2\pi k x \, \mathrm{d}x = A_1^2 \frac{Na}{2}$$

şi o expresie analogă pentru A_2, adică

$$A_1 = A_2 = \sqrt{\frac{2}{Na}}. \tag{60.34}$$

În aproximaţia considerată a mişcării perturbate, fiecărei valori (60.30) a numărului de unde îi corespund două funcţiuni de undă distincte cu expresiile aproximative

$$\Psi_1 \approx \sqrt{\frac{2}{Na}} \sin 2\pi k x = \sqrt{\frac{2}{Na}} \sin \frac{\pi n x}{a}. \tag{60.35}$$

$$\Psi_2 \approx \sqrt{\frac{2}{Na}} \cos 2\pi k x = \sqrt{\frac{2}{Na}} \cos \frac{\pi n x}{a}. \tag{60.36}$$

Valorile corespunzătoare ale energiei electronului se obţin cu relaţia (60.18). În transcriere unidimensională

$$w_1 \approx \widetilde{w}_1 = \int_0^{Na} \Psi_1^* \left[- \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\mathrm{d}^2\Psi_1}{\mathrm{d}x^2} + U\Psi_1 \right] \mathrm{d}x \tag{60.37}$$

$$w_2 \approx \widetilde{w}_2 = \int_0^{Na} \Psi_2^* \left[- \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}x^2} + U\Psi_2 \right] \mathrm{d}x. \tag{60.38}$$

Aici trebuie introdusă expresia corectă (60.20) a energiei potenţiale. Calculul se simplifică, deoarece Ψ_1 şi Ψ_2 sînt soluţii ale ecuaţiei neperturbate (60.25). Se obţine :

$$w_1 \approx \int_0^{Na} \Psi_1^* \left[\frac{h^2}{2m} k^2 + U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \cos \frac{i 2\pi x}{a} \right] \Psi_1 \mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{h^2}{2m} k^2 + U_0 \right) \int_0^{Na} |\Psi_1|^2 \, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \int_0^{Na} |\Psi_1|^2 \cos \frac{i 2\pi x}{a} \, \mathrm{d}x$$

şi analog

$$w_2 \approx \left(\frac{h^2}{2m} k^2 + U_0\right)\int_0^{Na} |\Psi_2|^2 \, dx + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \int_0^{Na} |\Psi_2|^2 \cos\frac{i\,2\pi x}{a} dx.$$

Din relaţia (60.11) rezultă $\int_0^{Na} |\Psi_1|^2 dx = \int_0^{Na} |\Psi_2|^2 dx = 1$, astfel că ultimele relaţii devin

$$w_1 \approx \frac{h^2}{2m} k^2 + U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \int_0^{Na} |\Psi_1|^2 \cos\frac{i\,2\pi x}{a} \cdot dx \tag{60.39}$$

$$w_2 \approx \frac{h^2}{2m} k^2 + U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \int_0^{Na} |\Psi_2|^2 \cos\frac{i\,2\pi x}{a} \cdot dx \tag{60.40}$$

Efectuînd integrarea cu Ψ_1 şi Ψ_2 daţi de relaţiile (60.35) şi (60.36), se obţine

$$\int_0^{Na} |\Psi_1|^2 \cos\frac{i\,2\pi x}{a} dx = A_1^2 \int_0^{Na} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{i\,2\pi x}{a}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{Na}\int_0^{Na} \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\right] \cdot \cos\left(\frac{i2\pi x}{a}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{Na}\int_0^{Na} \frac{1}{2}\left[\cos\frac{(n+i)\pi x}{a} + \cos\frac{(n-i)\pi x}{a}\right] dx$$

(cu $\int_0^{Na} \cos\frac{i2\pi x}{a} dx = 0$),

astfel că

$$\int_0^{Na} |\Psi_1|^2 \cos\frac{i2\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & \text{pentru } i \neq n \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } i = n, \end{cases}$$

şi deci pentru k dat (deci n dat) rezultă

$$w_1 \approx \frac{h^2}{2m} k^2 + U_0 + \frac{1}{2} U_n, \tag{60.41}$$

în care U_n reprezintă amplitudinea armonicii de ordinul $i = n$ din dezvoltarea în serie Fourier (60.20) a energiei potenţiale $U(x)$.

Analog dacă se ţinea seama de relaţia

$$\int_0^{Na} |\Psi_2|^2 \cos\frac{i2\pi x}{a}\,dx = A_2^2\int_0^{Na} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cdot\cos\left(\frac{i2\pi x}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{Na}\int_0^{Na}\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\right]\cdot\cos\left(\frac{i2\pi x}{a}\right)dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pentru } i \neq n \\ -\dfrac{1}{\ } & \text{pentru } i = n \end{cases},$$

se obţine

$$w_2 \approx \frac{h^2}{2m}k^2 + U_0 - \frac{1}{2}U_n. \tag{60.42}$$

Recapitulînd, am obţinut pentru dependenţa energiei electronului de numărul de undă $w = w(k)$ expresiile următoare:

a) pentru $k \neq \pm n\dfrac{1}{2a}$ (mişcare neperturbată)

$$w = w(k) \approx \frac{h^2}{2m}k^2 + U_0; \tag{60.43}$$

b) pentru $k = \pm n\dfrac{1}{2a}$ (mişcare perturbată), cu n = 1,2...,

$$w = w(k) \approx \frac{h^2}{2m}k^2 + U_0 \pm \frac{1}{2}U_n. \tag{60.44}$$

Rezultă că variaţia energiei electronului în funcţiune de numărul de unde k se reprezintă aproximativ printr-o parabolă (60.43) care, în punctele „critice" $k = \pm n\dfrac{1}{2a}$, suferă salturi egale în valoare absolută cu U_n; în vecinătatea punctelor „critice", parabola se deformează pentru a se obţine racordări impuse de considerente de continuitate, aşa cum se arată în figura 60.5, *a*. Deoarece U_n scade cînd n creşte, seria Fourier fiind uniform convergentă, salturile energiei în punctele critice se micşorează pe măsură ce $k = n\dfrac{1}{2a}$ creşte.

În realitate, şi în intervalele cuprinse între două valori critice consecutive ale mărimii k, energia electronului variază discontinuu, salturile energiei fiind însă extrem de mici în aceste intervale. În adevăr, observînd că funcţiunea de undă Ψ este periodică în x, cu perioada egală şi cu Na — deoarece din motive de simetrie în punctele omologe ale două cristale vecine electronul se găseşte în stări egale — rezultă, ţinînd seama de relaţia (60.28):

$$A' e^{j2\pi kx} = A' e^{j2\pi k(x+Na)},$$

de unde se deduce

$$e^{j2\pi kNa} = 1,$$

care conduce la relaţia kNa = număr întreg, sau

$$k = \frac{r}{Na}. \qquad (r = 1,2,3,...) \tag{60.45}$$

Deci şi în intervalele dintre punctele critice, mărimea k variază discontinuu, astfel că energia electronului e capabilă de valori discrete şi în aceste intervale, în care însă salturile sînt foarte mici, deoarece N este foarte mare.

În figura 60.5 *a* este reprezentată variaţia energiei în funcţie de k într-un punct arbitrar din cristal. Se poate face o reprezentare a variaţiei energiei electronului, ca în figura 60.5 *b*, de-a lungul axei Ox extinsă în lungul cristalului, obţinîndu-se astfel benzile de energie permise (b.p.) şi interzise (b.i.), găsite în paragraful precedent pe altă cale. Electronul poate avea deci

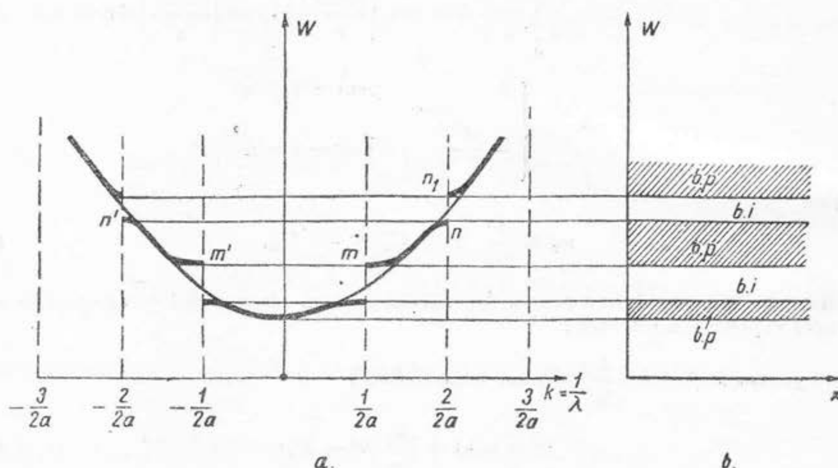


Fig. 60.5

numai stări în care energia sa are valori cuprinse în benzile (zonele) permise; în aceste benzi energia variază practic continuu, deoarece, aşa cum s-a arătat mai sus, structura discontinuă a zonelor permise este foarte fină. Teoria care foloseşte zonele interzise şi permise de energie pentru explicarea unor proprietăţi ale corpului solid se numeşte *teoria zonelor*.

60.4. Elemente de teorie cuantică a conducţiei electrice în solide

60.4.1. **Statistica Fermi-Dirac.** S-a arătat mai sus că electronii pot „ocupa" numai benzile de energie permise (înţelegîndu-se prin această afirmaţie că ei pot avea numai acele valori ale energiei care sînt cuprinse în aceste benzi), fără a se indica însă modul de ocupare al benzilor. Aceasta rezultă din *statistica Fermi-Dirac*, aplicabilă electronilor sau, mai general, microparticulelor cu spin semiîntreg. Conform statisticii Fermi-Dirac, numărul mediu $\tilde{n}_k$ de electroni care se pot afla într-o stare dată, care are energia w_k, e dat de expresia

$$\tilde{n}_k = \frac{1}{e^{\frac{w_k - \mu(T)}{kT}} + 1}, \qquad (60.46)$$

în care k este constanta lui Boltzmann, T temperatura absolută, iar μ o mărime numită *potenţial chimic pentru o particulă*, care depinde de temperatura cristalului. În adevăr, numărul total de electroni N fiind dat, există relaţia

$$N = \sum_k \tilde{n}_k, \qquad (60.47)$$

care exprimă implicit o legătură între mărimile μ și T (la N dat). Studiul termodinamic al condițiilor de echilibru a două corpuri în contact chimic (care pot schimba particule între ele) arată că *se realizează echilibrul chimic* (adică lipsa unui transfer mediu de particule) *dacă potențialele chimice ale celor două corpuri sînt egale.* Potențialul chimic are deci pentru schimbul de particule, rolul pe care temperatura îl are pentru schimbul de căldură.

Interacțiunea electronilor din cristal asigură nivelurile de energie distincte pentru stări orbitale distincte ale electronilor. Deoarece însă la fiecare stare orbitală corespund două stări (cuantice) posibile (cu spinii electronilor opuși), fiecărui nivel de energie îi corespund două stări (cuantic) posibile. Numărul mediu de electroni care revin unui nivel de energie cu energia w e deci de două ori mai mare la numărul mediu de electroni ai unei stări (60.46)

$$\tilde{n}_w = \frac{2}{e^{\frac{w-\mu(T)}{kT}}+1} = F(w). \quad (60.48)$$

Se observă că nivelurile cu energii mici sînt ocupate cu precădere la μ și T date. De asemenea, dacă temperatura absolută e nulă, $T = 0$, se obțin următoarele egalități

$$\tilde{n}_w = 2 \text{ pentru } w_0 < w < \mu(0)$$
$$\tilde{n}_w = 0 \text{ pentru } \quad w > \mu(0) \quad (60.49)$$

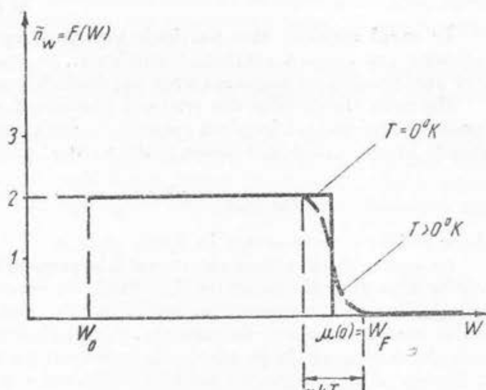


Fig. 60.6

(în care w_0 e cel mai scăzut nivel de energie permis) care conduc la reprezentarea din figura 60.6 a dependenței mărimii $\tilde{n}_w = F(w)$ de energia permisă w. Rezultă deci existența unui nivel limită de energie $w_F = \mu(0)$, dependent de natura corpului, deasupra căruia nivelurile permise nu pot fi ocupate de electroni — și care se numește *nivelul limită Fermi*. De asemenea, mai rezultă că, la $T = 0$, nivelurile de energie permise situate sub nivelul limită Fermi sînt ocupate fiecare de doi electroni (în conformitate și cu principiul de excluziune al lui Pauli de care se ținea seama în statistica Fermi-Dirac). Dacă $T \neq 0$, curba $\tilde{n}_w = F(w)$ are colțurile rotunjite (curba punctată în fig. 60.6), astfel că nu există un nivel limită perfect definit. Zona de trecere de la $\tilde{n}_w = 2$ la $\tilde{n}_w = 0$ are însă o extensiune egală cu $k\,T$. La temperaturile obișnuite de utilizare ale corpurilor solide $kT \ll \mu(0) - w_0$ (deoarece constanta lui Boltzmann e $k = 1{,}36 \cdot 10^{-23}$ jouli/grad). De aceea, relațiile (60.49) sînt practic satisfăcute și la aceste temperaturi.

60.4.2. **Conducția electrică.** Presupunem acum că în interiorul cristalului se stabilește un cîmp electric mediu dirijat (pentru simplificarea expunerii), în sensul negativ al axei Ox, de intensitate $E_x = -E$. Din punctul de vedere al mecanicii clasice asupra electronilor se exercită o forță medie $F = -q_0E_x = q_0E$ ($-q_0$ fiind sarcina lui electrică), care determină variația în timp a impulsului p. Din punctul de vedere cuantic, cîmpul exterior constituie o perturbație, care determină tranziții ale electronilor de pe nivelurile cu număr de unde mai mic pe nivele cu număr de undă mai mare. Nivelul de energie ocupat de un electron se deplasează pe curba $w = f(k)$ din figura 60.5, a, în sensul numerelor de undă k crescătoare.

În cazul unei particule libere cu energia (60.26), viteza $v = \frac{p}{m}$ a electronului se poate determina din relația

$$\frac{dw}{dk} = h\frac{dw}{dp} = h\frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m} + U_0\right) = h\frac{p}{m} = hv,$$

din care rezultă

$$v = \frac{1}{h}\frac{dw}{dk}. \quad (60.50)$$

În mecanica cuantică se demonstrează că această relație este valabilă și în cazul mișcării unei particule într-un cîmp de forțe (cînd energia lui nu mai e dată de (60.26), și unda asociată lui nu mai e o undă progresivă, plană, monocromatică), și anume pentru viteza de grup a undei asociate, interpretabilă ca viteză a particulei în reprezentarea ei corpusculară.

De asemenea, tot în cazul unei particule libere cu energia (60.26), masa m a electronului se poate determina din relaţia

$$\frac{d^2w}{dk^2} = h^2\frac{d^2w}{dp^2} = h^2\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p^2}{2m} + U_0\right) = h^2\frac{1}{m},$$

din care rezultă

$$m = \frac{1}{h^2}\frac{d^2w}{dk^2}. \tag{60.51}$$

În cazul mişcării unei particule într-un cîmp de forţe, expresia (60.51) defineşte o masă *echivalentă* sau *efectivă* asociabilă particulei, în ipoteza că mişcarea ei poate fi considerată în primă aproximaţie ca mişcarea unei particule libere.

Mişcarea electronilor din cristalul considerat, sub acţiunea unui cîmp mediu (macroscopic) E, poate fi deci tratată în plină aproximaţie din punctul de vedere corpuscular ca mişcarea unei particule libere, avînd însă *viteza echivalentă* v^* şi *masa echivalentă* m^* date de relaţiile

$$v^* = \frac{1}{h}\frac{dw}{dk}, \qquad m^* = \frac{1}{h^2}\frac{d^2w}{dk^2}, \tag{60.52}$$

unde $w = f(k)$ e, reprezentat în figura 60.5, *a*.

Se constată că viteza electronului e proporţională cu coeficientul unghiular al tangentei la curba $w = f(k)$ din figura 60.5,*a*, fiind, de exemplu, nulă în punctele m, m', n, n', pozitivă pe porţiunea $m\ n$ şi negativă pe porţiunea $m'n'$ a curbei. Dacă considerăm un electron din banda permisă corespunzătoare, de exemplu, porţiunilor $m\ n$, respectiv $m'\ n'$, observăm că la creşterea numărului k el trece de pe nivelurile inferioare pe niveluri superioare de energie (dacă acestea sînt libere), punctul figurativ fiind pe porţiunea $m\ n$, şi că el se mişcă în sensul pozitiv al axei Ox, deoarece $v > 0$. Aceste tranziţii între niveluri vecine ale unei benzi permise sînt foarte probabile, deoarece diferenţa dintre nivelurile respective e extrem de mică. Cînd electronul ajunge la nivelul superior al benzii, corespunzător punctului n, viteza sa se anulează, iar starea sa poate evolua în unul din următoarele două moduri:

a) electronul poate „sări" peste banda interzisă pe nivelul corespunzător punctului n_1, dacă acest nivel este liber; saltul este însă posibil numai dacă banda interzisă respectivă este suficient de îngustă şi temperatura e suficient de mare, ca electronul să poată dispune, prin efecte cumulative ale agitaţiei termice, de energia necesară, egală cu diferenţa dintre energiile corespunzătoare nivelurilor care limitează banda interzisă.

b) electronul poate trece din starea corespunzătoare punctului n în care numărul de unde e pozitiv, în aceea corespunzătoare punctului n', în care numărul de unde e negativ, dar cu aceeaşi valoare absolută. Această tranziţie a electronului între cele două stări constituie un proces specific cuantic: în punctul n, funcţiunea de undă a electronului e aproximată prin expresia (60.27), care reprezintă o suprapunere de două stări descrise de funcţiunile $\Psi' = A'\ e^{j2\pi kx}$ şi $\Psi'' = A''\ e^{-j2\pi kx}$, corespunzătoare unor particule libere care s-ar mişca cu impulsuri $p = hk$ egale şi opuse. În această stare, electronul nu are un impuls determinat şi de aceea viteza lui echivalentă (a „corpusculului" echivalent — 60.50) e nulă. Tranziţia $n \to n'$ corespunde din punct de vedere corpuscular trecerii vitezei prin zero spre valori negative corespunzătoare porţiunii $n'm'$ (viteza electronului se micşorează începînd de la punctul de inflexiune al curbei mn, deoarece *pe toată porţiunea finală a acestei curbe masa echivalentă (60.52) e negativă* şi forţa medie dirijată în sensul pozitiv al axei Ox accelerează electronul în sens opus, adică îl decelerează). După ce electronul atinge nivelul inferior al benzii, punctul figurativ trece din m' în m şi procesul se poate repeta ciclic.

Dacă banda considerată e complet ocupată de electroni, adică are cîte doi electroni pe fiecare nivel de energie, iar în interiorul corpului se stabileşte un cîmp electric exterior, ca mai sus, fiecărui electron care se mişcă într-un sens al axei Ox îi corespunde unul care se mişcă în sensul opus. În adevăr, cîmpul electric imprimă electronilor o mişcare în bloc, astfel că fiecare nivel de energie rămas liber este ocupat de un electron de pe nivelul vecin; nivelul inferior, precum şi cel situat imediat sub nivelul superior al benzii, se ocupă de electronii care îşi schimbă sensul de mişcare (corespunzător salturilor din m' în m şi din n în n'), astfel că banda fiind complet ocupată, numărul electronilor care ocupă nivelurile superioare de energie părăsindu-le pe cele inferioare este egal cu numărul celor care trec de pe nivelurile superioare pe cele inferioare. Electronii unei *astfel de benzi, complet ocupate, nu pot deci contribui la stabilirea unui curent electric mediu, adică a unui curent de conducţie*, celor două sensuri opuse de mişcare revenindu-le numere egale de electroni.

Dacă însă banda e incomplet ocupată de electroni, există mai mulţi electroni care au viteza orientată într-unul din sensurile axei Ox decît în celălalt, deoarece cîmpul electric, determinînd un sens privilegiat de mişcare a electronilor, măreşte probabilitatea de realizare a stărilor electronilor în care vectorul **k** este orientat în sensul opus vectorului **E** (sarcina electronilor fiind negativă), faţă de stările în care **k** şi **E** au aceeaşi orientare. *Benzile incomplet ocupate pot deci contribui la stabilirea unui curent de conducţie* în corp, deoarece electronii lor se pot mişca într-un sens în număr mai mare decît în sens contrar.

Rezultă următoarea concluzie importantă : *materialele care au în lipsa unui cîmp electric exterior numai benzi complet ocupate sînt izolanţi electrici, iar cele care au benzi incomplet ocupate — în lipsa unui cîmp electric exterior — sînt conductori electrici.*

În teoria zonelor, conducţia electrică nu se explică deci pe baza existenţei unor electroni care se pot mişca liber în interiorul corpului, ci pe baza modului de ocupare a benzilor care determină un surplus de electroni ce se mişcă într-un sens privilegiat.

60.4.3. **Conductori, semiconductori, izolanţi.** S-a arătat mai sus că modul de ocupare a benzilor de energie permise e dat de statistica Fermi-Dirac, din care rezultă că electronii ocupă (la temperaturi joase) numai benzile situate sub nivelul limită Fermi. Dacă acest nivel se găseşte în interiorul unei benzi permise, ca în figura 60.7, *a*, banda e incomplet ocupată, deoarece nive-

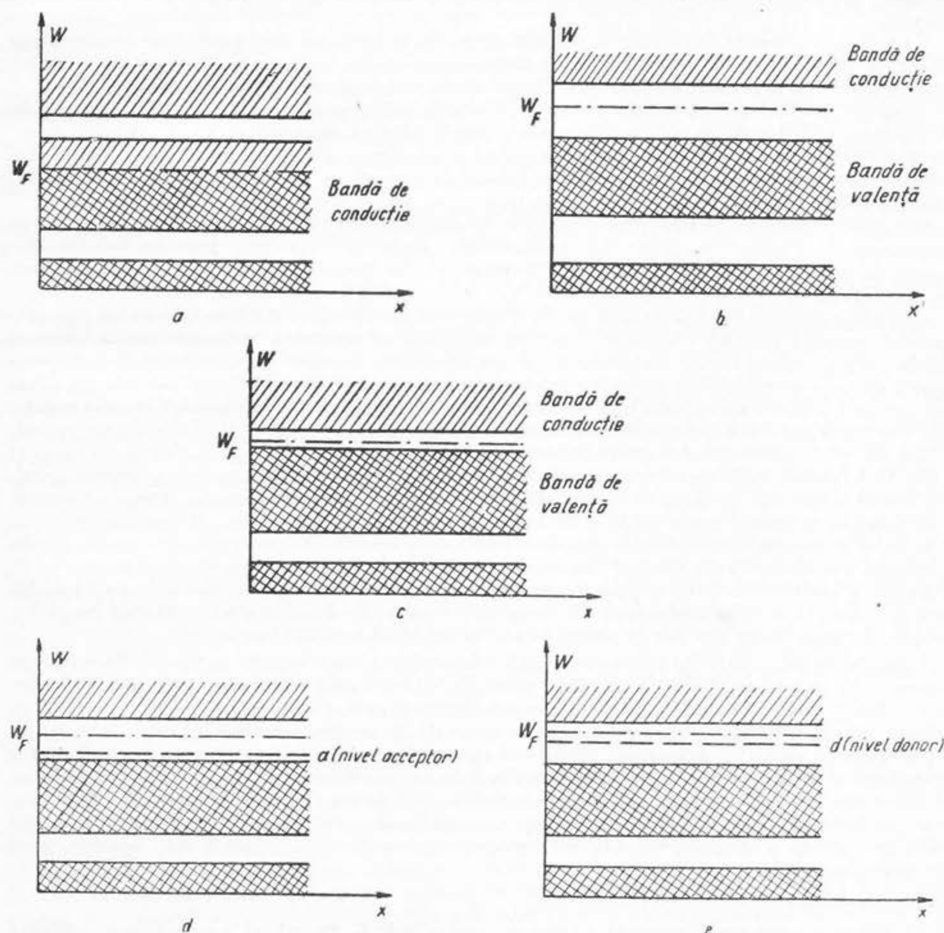


Fig. 60.7

lurile situate deasupra nivelului limită Fermi $w_F = \mu(0)$, desenat cu linie-punct în figura 60.7,*a* şi următoarele, sînt libere [1]. *Un corp al cărui nivel limită se găseşte în interiorul unei benzi permise este deci conductor.* Banda incomplet ocupată se numeşte *bandă de conducţie;* celelalte benzi, inferioare, sînt toate complet ocupate şi nu contribuie la stabilirea curentului electric. Mai există posibilitatea (la cristale reale, tridimensionale) ca banda cea mai înaltă ocupată de electroni să se suprapună parţial peste banda permisă imediat superioară, aşa cum se observă şi în figura 60.3 pentru valori destul de mici ale distanţei a; în acest caz, electronii pot trece uşor din ultima bandă ocupată de electroni în cea superioară, la stabilirea cîmpului electric. În corp se poate stabili un curent electric : corpul este conductor.

La izolanţi, nivelul limită trece prin mijlocul unui benzi interzise, astfel că toate benzile inferioare sînt complet ocupate, şi deci nu se poate stabili un curent electric în corp (fig. 60.7,*b*). Banda permisă situată imediat sub nivelul w_F se numeşte *bandă de valenţă.*

În această clasificare, *semiconductorii* sînt materiale solide, care au nivelul Fermi w_F situat într-o bandă interzisă ca şi la izolanţi şi care satisfac una din următoarele două condiţii :

a) *Banda interzisă în care se găseşte nivelul Fermi e suficient de îngustă*, pentru ca o parte din electroni să o poată depăşi sub acţiunea agitaţiei termice, lăsînd banda de valenţă incomplet ocupată (fig. 60.7*c*). Semiconductorii din această categorie se numesc *semiconductori intrinseci*;

b) *Bandă interzisă străbătută de nivelul Fermi nu e suficient de îngustă, dar conţine unele niveluri de energie permise*, numite *niveluri adiţionale* şi notate cu a şi d în figura 60.7,*d* şi 60.7,*e*, datorită prezenţei impurităţilor (cum se va explica mai jos) şi care pot fi libere (cele notate cu a) sau ocupate de electroni (cele notate cu d). Nivelurile adiţionale libere trebuie să fie situate la mică distanţă de banda de valenţă, iar cele ocupate la mică distanţă de banda imediat superioară celei de valenţă şi care se numeşte *banda de conducţie.* Dacă aceste ultime condiţii sînt satisfăcute, electronii pot trece uşor de pe banda de valenţă pe nivelurile adiţionale libere (a) care se numesc *niveluri acceptoare*, sau pot trece uşor de pe nivelurile adiţionale ocupate (d), numite *niveluri donoare*, în banda de conducţie. În ambele cazuri, una din benzile permise rămîne descompletată şi poate deci contribui la stabilirea curentului electric. Semiconductorii din această categorie se numesc *semiconductori extrinseci.* Semiconductorii uzuali sînt *semiconductori extrinseci.*

Semiconductorii extrinseci care au nivelurile donoare se numesc *semiconductori de tip „n"*, deoarece curentul electric e stabilit în aceste materiale de electronii încărcaţi *negativ* (de aici iniţiala „*n*") ajunşi în banda de conducţie de pe nivelurile donoare. Semiconductorii extrinseci care au niveluri acceptoare se numesc *semiconductori de tip „p"*, din următorul motiv : electronii care trec pe nivelurile acceptoare lasă în nivelurile superioare ale benzii de valenţă locuri vacante. Cum electronii au sarcina negativă, iar cei de pe nivelurile superioare ale benzilor au (v. rel. 60.52 şi fig. 60.5, *a*) masa echivalentă (efectivă) negativă, *lipsa unui astfel de electron*, numită şi *lacună* (sau gaură, gol), *e echivalentă prezenţei unei particule de masă pozitivă şi sarcină pozitivă;* aceste locuri sînt ocupate de electronii de pe nivelurile imediat inferioare, astfel că lacunele se deplasează în sensul opus deplasării electronilor care vin să le ocupe. Deoarece numărul electronilor ajunşi pe nivelurile acceptoare e relativ mic, rezultă că numărul lacunelor din banda de valenţă e mult mai mic decît al electronilor şi deci e mai simplu să se studieze mişcarea de ansamblu a electronilor prin mişcarea acestor lacune, echivalente unor particule *pozitive.* De aceea se spune că la semiconductorii din această categorie, conductivitatea e datorită lacunelor pozitive, de unde litera „*p*" (de la pozitiv) care indică tipul semiconductorului.

Nivelurile adiţionale pot apărea dacă există adausuri străine, numite *impurităţi*, în cristalele unor anumite substanţe. De exemplu, dacă germaniului, care este tetravalent, i se adaugă fosfor (pentavalent), una din valenţele fiecărui atom de fosfor rămîne nesaturată (deoarece el are cinci electroni de valenţă, dintre care numai patru sînt folosiţi pentru a realiza legătura chimică cu cei patru atomi vecini de germaniu; electronul rămas liber poate fi cedat benzii de conducţie a germaniului şi deci efectul este apariţia unui nivel donor; dacă însă se adaugă atomi de bor care sînt trivalenţi, unul din aceşti atomi saturează numai trei dintre valenţele atomilor de germaniu vecini, iar saturarea celei de a patra valenţe se realizează prin trecerea unui electron de pe banda de valenţă a corpului pe nivelul corespunzător nesaturat. Efectul este apariţia unui nivel acceptor.

---

[1] Riguros, conform celor arătate anterior, numai la 0°K. Practic şi la temperatura camerei cînd, de fapt, agitaţia termică aduce puţini electroni pe niveluri superioare nivelului Fermi.

În încheiere menționăm că electronii ajunși în banda de conducție, respectiv lacunele formate în banda de valență, sînt în număr relativ mic, din care cauză conducția electrică este mai slabă la semiconductori decît la conductori. Totodată, numărul acestor electroni și lacune sporește considerabil o dată cu creșterea temperaturii, de aceea *conductivitatea electrică a semiconductorilor crește cu temperatura.*

60.5. Aplicație. Efecte de contact

La suprafața de contact a unui metal cu un semiconductor sau a doi semiconductori de tipuri diferite (unul „p" și altul „n") se realizează un *efect de redresare*, care constă în trecerea mai ușoară a curentului electric prin contact în unul din sensuri decît în celălalt.

Prezentăm, ca exemplu, efectul de redresare la contactul dintre un conductor metalic și un semiconductor extrinsec de tip „n" (cu conducție electronică). Dacă un conductor metalic (m) e situat în imediata apropiere a unui semiconductor de tip „n" (s_n), fără să se atingă, ambele fiind neîncărcate electric, așezarea relativă a nivelurilor de energie e arătată în figura 60.8. Deoarece nu există cîmp electric în exteriorul lor, potențialul electric e constant în exterior și energia potențială a unui electron complet îndepărtat din corp e aceeași (w^0_{ext}) pentru ambele corpuri. Nivelurile superioare coincid deci pentru ambele diagrame ale nivelurilor de energie. Potențialele chimice sînt însă distincte în cele două materiale. La temperaturi suficient de joase, aceste potențiale chimice sînt practic egale cu valorile lor la T = 0°K, adică cu nivelurile Fermi: din metal, w^m_F (situat în banda de conducție a acestuia), și din semiconductor, w^s_F (situat între marginea inferioară a benzii de conducție și nivelul adițional donor populat cu electroni). Energiile de extracție ale metalului, respectiv ale semiconductorului, sînt $\Phi^m = w^0_{ext} - w^m_F$, respectiv $\Phi^s = w^0_{ext} - w^s_F$, și presupunem $\Phi^m > \Phi^s$, adică $w^m_F < w^s_F$. Dacă vom considera acum că cele două corpuri sînt puse în contact electric, în primul moment diferența de potențial chimic dintre ele determină un schimb de particule pînă se realizează echilibrul termodinamic. Semiconductorul, care are potențialul chimic mai înalt, cedează electroni de pe nivelurile lui adiționale, donoare, metalului, care are potențialul chimic mai scăzut. Metalul se încarcă (superficial) negativ, iar semiconductorul rămîne încărcat pozitiv în vecinătatea zonei de contact. Potențialul electric mediu V_0 al metalului scade, iar energia potențială $U_0 = -q_0V_0$ a unui electron (negativ) din metal crește, astfel încît toate nivelurile de energie din metal (inclusiv nivelul Fermi) se înalță, nivelul superior devenind $w^m_{ext} > w^0_{ext}$. Deoarece semiconductorul se descarcă de electroni, potențialul lui electric mediu crește și energia potențială a unui electron din semiconductor scade. Spre deosebire de metal, încărcarea semiconductorului se face pe o anumită porțiune din volumul lui, corespunzător numărului mult mai mic de purtători de sarcină liberi pe care îi furnizează nivelurile donoare. Sarcina pozitivă se repartizează spațial pe o lungime L măsurată de la suprafața de contact. În acest strat de lungime L, energia potențială scade continuu și întreaga diagramă a nivelurilor (care a fost calculată avînd ca referință energia potențială medie) coboară continuu în intervalul de la $x = 0$ la $x = L$. Schimbul de particule e încetinit de cîmpul electric **E**, care apare în stratul de grosime L, ca urmare a separării sarcinilor, și se oprește cînd potențialele chimice ajung egale în cele două medii (fig. 60.9). Din punct de vedere macroscopic, în stratul de grosime L există un cîmp electric imprimat (v. vol. I, par. 10.3), care la echilibru este $\mathbf{E}_i = -\mathbf{E}$. Pentru $x > L$, nivelurile semiconductorului rezultă coborîte față de ale metalului cu $\Delta w = w^m_{ext} - w^s_{ext} = \Phi^m - \Phi^s$ (adică cu diferența energiilor lor de extracție). În urma acestui proces de stabilire a echilibrului în semiconductor s-a creat un strat de grosime L, numit *strat de blocare* sau *strat de baraj*, în cuprinsul căruia nivelurile donoare au rămas neocupate. În acest strat nu există practic purtători de sarcină liberi și de aceea rezistența lui electrică e mult sporită. Totodată, în cuprinsul acestui strat există o sarcină spațială, o variație a potențialului electric mediu și un cîmp electric imprimat dinspre metal spre semiconductor. Stratul de blocare are un rol esențial în proprietatea de redresare a contactului dintre metal și semiconductor.

Dacă sistemul metal — semiconductor e alimentat din exterior, astfel încît în regiunea de contact *se stabilește un cîmp electric exterior orientat de la semiconductor la metal* potențialul electric al semiconductorului crește, energia potențială a unui electron scade, benzile de energie se înclină și, mai mult, lărgimea stratului de blocare crește. De aceea, rezistența electrică a contactului e sporită și curentul electric care se stabilește e slab. Sensul semiconductor-metal e deci

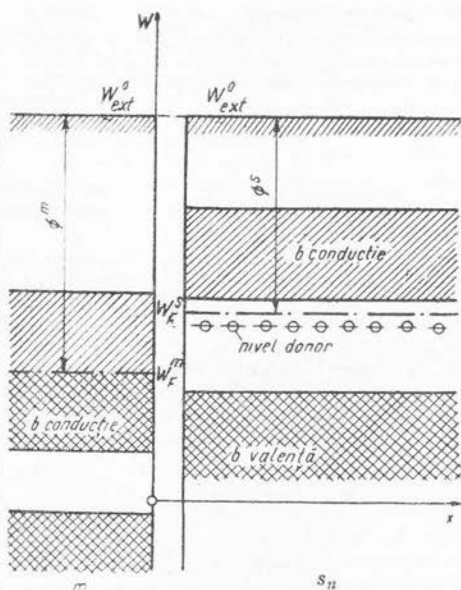


Fig. 60.8

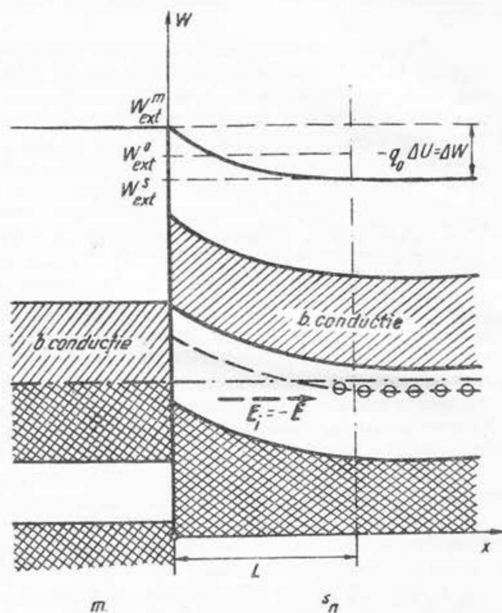


Fig. 60.9

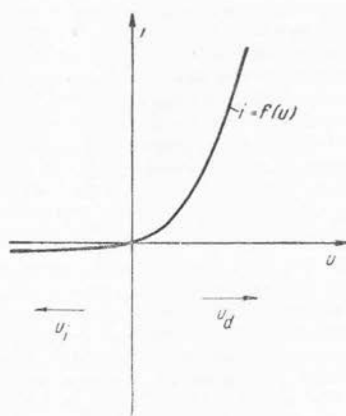


Fig. 60.10

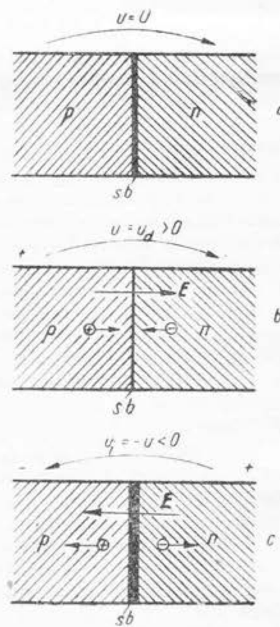


Fig. 60.11

sensul de oprire, iar tensiunea aplicată corespunzătoare se numește *tensiune inversă*. *Dacă sensul cîmpului electric exterior e îndreptat de la metal la semiconductor*, fenomenele decurg invers, lărgimea stratului de blocare scade și rezistența electrică a contactului scade, curentul electric fiind mult mai intens. Acest sens se numește *sensul de trecere* și tensiunea aplicată corespunzătoare se numește *tensiune directă*. În ansamblu, variația curentului cu tensiunea aplicată e redată în caracteristica din figura 60.10.

Efectul de redresare se poate realiza și prin contactul unui semiconductor extrinsec tip „*p*" (cu conducție lacunară, sau de goluri), cu un semiconductor extrinsec tip „*n*" (cu conducție electronică). Se obține așa-numita *joncțiune „p—n"*. Și în acest caz, la echilibru apare un strat de blocare (s.b. fig. 60.11, *a*), sărac în purtători de sarcină liberi. La aplicarea unei tensiuni dinspre semiconductorul tip „*p*" spre cel de tip „*n*" (tensiune directă), atît lacunele din primul cît și electronii din cel de-al doilea sînt dirijați de cîmpul exterior spre regiunea de joncțiune, căreia îi furnizează purtători de sarcină. Stratul de blocare se îngustează și rezistența electrică a contactului scade (fig. 60.11,*b*). La aplicarea unei tensiuni dinspre semiconductorul de tip „*n*" spre cel de tip „*p*" (tensiune inversă), purtătorii de sarcină sînt îndepărtați de la regiunea de contact care devine și mai săracă în purtători liberi. Stratul de blocare se lărgește și rezistența electrică a contactului scade. Această prezentare sumară, valabilă numai calitativ pentru anumite limite ale tensiunii aplicate, se poate completa cu un studiu mai detaliat cantitativ, care se prezintă în lucrările de specialitate [1].

---

[1] V. M. Drăgănescu, *Procese electronice în dispozitive semiconductoare de circuit)* Ed. Acad. R.P.R., 1962.

BIBLIOGRAFIE

A. BIBLIOGRAFIE PRINCIPALĂ

1. R ă d u l e ţ, R., *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. I, Litografia Învăţămîntului, 1955, vol. II, Ed. energetică de stat, 1954, vol. III Litografia Învăţămîntului, 1955, vol. IV Tipografia şi litografia M.I., 1956.
2. R ă d u l e ţ, R., *Bazele electrotehnicii*. Probleme I, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963, Culegere de probleme de Bazele teoretice ale electrotehnicii, vol. II Litografia şi tipografia învăţămîntului, 1957, vol. III Litografia şi tipografia învăţămîntului, 1958.
3. B u d e a n u, C., ş. a., *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, Probleme I, Ed. tehnică, 1958 şi II, Ed. tehnică, 1959.
4. N e i m a n, L. R. ş i K a l a n t a r o v, P. L., *Bazele teoretice ale electrotehnicii* (trad. din l. rusă). vol. I, II. Ed. Energetică de stat, 1955, vol. III Ed. tehnică, 1956.
5. A n t o n i u, S. I., *Chestiuni speciale de electrotehnică*, Ed. Acad. R.P.R. 1956.
6. P r e d a, M., *Bazele teoretice ale electrotehnicii: circuite electrice în curent variabil*. Litografia învăţămîntului, Bucureşti, 1955.
7. K ü p f m ü l l e r, K., *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*. Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957.

B. BIBLIOGRAFIE SUPLIMENTARĂ PENTRU ELECTROTEHNICĂ TEORETICĂ ŞI GENERALĂ.

8. B e c k e r, R., *Theorie der Elektrizität*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1957, Bd. I.
9. S i m o n y, K., *Theoretische Elektrotechnik*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.
10. W e i s s, A., *Übersicht über die theoretische Elektrotechnik*. Die physikalisch-mathematischen Grundlagen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G., Leipzig, 1954.
    W e i s s, A. ş i K l e i n w ä c h t e r, H., *Übersichtüber die theoretische Elektrotechnik*. Ausgewählte Kapitel und Aufgaben, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G., Leipzig, 1956.
11. S m y t h e, W., *Static and Dynamic Electricity*, Mc. Graw-Hill Book Company, Inc. New-York, Toronto. London, 1950.
12. J o o s, G., *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G., Leipzig, 1954.
13. D u r a n d, E., *Electrostatique et magnetostatique*, Masson & Co., Paris, 1953.
14. I o n e s c u T h., *Electricitatea*, Ed. de stat didactică şi pedagogică, 1962.
15. N o v a c u, V., *Introducere în Electrodinamică* vol. I şi II. Ed., Acad. R.P.R., 1955.
16. T a m m, I. E., *Bazele teoriei electricităţii*. Ed. tehnică, 1952.
17. K r u g, K. A., *Osnovîi elektrotehniki*. Gosenergoizdat Moskva — Leningrad, 1946.
18. K a s s a t k i n, A. S., P e r e k a l i n, M. A., S e r g e e v, P. S., *Elektrotehnika*, Gosenergoizdat Moskva, Leningrad, 1953.

19. Netuşil, A. W. şi Polivanov, K. M., *Osnovii elektrotehniki*, Gosenergoizdat, Moskvá, Leningrad, 1956.
20. Mierdel, G. şi Wagner, S., *Aufgaben zur theoretischen Elektrotechnik*, Berlin, VEB Verlag Technik, 1959.
21. Philippow, E., *Grundlagen der Elektrotechnik*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G., Leipzig, 1959.
22. Cahen, Fr., *Electrotechnique. Circuits et réseaux en régime permanent*. Tome I. Librairie Gauthier-Villars, Paris, 1962.

C. BIBLIOGRAFIE SUPLIMENTARĂ PENTRU ANUMITE CAPITOLE

23. Antoniu, S. I., *Calculul matriceal şi tensorial în electrotehnică*, Bucureşti, Ed. tehnică, 1962.
24. Doetsch, G., *Anleitung zum praktischen Gebrauch de Laplace-Transformation*. R. Oldenburg München, 1961.
25. Andronescu, Pl., *Aplicaţiile calculului operaţional la studiul circuitelor electrice*, Ed. tehnică, 1957.
26. Weiss, A., *Einführung in die Matrizenrechnung zur Anwendung in der Elektrotechnik*. R. Oldenburg, München, 1961.
27. Hochrainer, A., *Symmetrische Komponenten in Drehstromsystemen*. Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957.
28. Popescu, Al. T., *Curs de electrotehnică II*, partea I-a. Analiza armonică a funcţiunilor periodice nesinusoidale. 1957.
29. Lunze Kl., *Berechnung elektrischer Stromkreise*, VEB Verlag Technik Berlin 1960.
30. Wegrzyn, St., *Operatorenrechnung in der Elektrotechnik*, PWN Warszawa, 1962.
31. Kontorovici, M. I., *Calculul operaţional şi fenomenele tranzitorii în circuitele electrice* (trad. din l. rusă), Ed. energetică de stat, 1955.